ملاحظة: ممنوع استخدام الآلة الحاسبة.

## السؤال الأول:

**(1)** استخدم مجموع ريمان لحساب التكامل المحدد $\int_0^4 \left(x^2+1\right) dx$ (3 درجات)

**الحل:** $[a,b]=[0,4]$ و $f(x)=x^2+1$

$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{4}{n}$ و $x_k=a+k\Delta x=\frac{4k}{n}$

$$f(x_k)=\left(\frac{4k}{n}\right)^2+1=\frac{16k^2}{n^2}+1 \qquad \textbf{(0.5)}$$

$$R_n=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{16k^2}{n^2}+1\right)\frac{4}{n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{64k^2}{n^3}+\frac{4}{n}\right)=\frac{64}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=\frac{64}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{4}{n}n \qquad \textbf{(1.5)}$$

$$\int_0^4\left(x^2+1\right)dx=\lim_{n\to\infty}R_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{64}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{4}{n}n\right)=\frac{64}{3}+4=\frac{76}{3}. \qquad \textbf{(1)}$$

**(2)** جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x)=\int_{\sin\left(x^2\right)}^{\pi^{2x}}\left(\sqrt{2t^3+2}\right)dt$ (درجتان)

**الحل:**

$$\textbf{(1+1)}\quad F'(x)=\left(\sqrt{2(\pi^{2x})^3+2}\right)\pi^{2x}\,2\ln(\pi)-\left(\sqrt{2\sin^3\left(x^2\right)+2}\right)\cos\left(x^2\right)(2x)$$

**احسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :**

**(3)** $y=\tan^{-1}(3x)\ log_5\left|1-\sec(3x)\right|$ (درجتان)

**الحل:**

$$\textbf{(1+1)}\quad y'=\frac{3}{1+(3x)^2}\ log_5\left|1-\sec(3x)\right|+\tan^{-1}(3x)\frac{(-3\sec(3x)\tan(3x))}{1-\sec(3x)}\frac{1}{\ln 5}$$

**(4)** $y=\cot(x)^{\sin(x)}+4^x$ (درجتان)

**الحل:**

$$\textbf{(1.5 +0.5)}\quad y'=\left[(\cos x).\ln(\cot x)+\sin x\left(\frac{-\csc^2 x}{\cot x}\right)\right](\cot x)^{\sin x}+4^x\ln 4$$

**السؤال الثاني:** احسب التكاملات التالية :

(1) $I=\int\left(\sqrt{x}\;e^{x^2}\right)^2dx$ (درجتان)

**الحل:** $I=\int xe^{2x^2}dx=\frac{1}{4}\int e^{2x^2}(4x)dx=\frac{1}{4}e^{2x^2}+c$ **(0.5+0.5+1)**

(2) $I=\int x\sqrt{x+1}\,dx$ (درجتان)

**الحل:** نفرض $u=x+1$ بالتالي $du=dx$ و $x=u-1$

$I=\int(\text{u-1})\,\text{u}^{\frac{1}{2}}du=\int(\text{u}^{\frac{3}{2}}\text{-u}^{\frac{1}{2}})\,du=\frac{2}{5}\text{u}^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}\text{u}^{\frac{3}{2}}+c$ **(0.5+0.5+0.5)**

$=\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+c$ **(0.5)**

(3) $I=\int_0^1 x\;5^{2-x^2}dx$ (درجتان)

**الحل:** $I=-\frac{1}{2}\int_0^1 5^{2-x^2}(-2x)dx=-\frac{1}{2\ln 5}\left[5^{2-x^2}\right]_0^1$ **(0.5+1)**

$=-\frac{1}{2\ln 5}(5-5^2)=\frac{10}{\ln 5}$ **(0.5)**

(4) $I=\int\frac{2-x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (درجتان)

**الحل:** $I=\int\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx+\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\,dx$ **(0.5+0.5)**

$=2\sin^{-1}(x)+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}+c$ **(0.5+0.5)**

(5) $I=\int\frac{\tan\left(\ln\left(x^2\right)\right)}{x}dx$ (درجتان)

**الحل:** $I=\frac{1}{2}\int\tan\left(\ln\left(x^2\right)\right)\frac{2}{x}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\sec(\ln\left(x^2\right))\right|+c$ **(1+1)**

(6) $I=\int\frac{\sec\left(\sqrt{x}\right)\tan\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}dx$ (درجتان)

**الحل :**

$I=2\int\sec\left(\sqrt{x}\right)\tan\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=2\sec\left(\sqrt{x}\right)+c$ **(1+1)**

**(7)** $I=\int \frac{\left(\tan^{-1}x\right)^2}{x^2+1}dx$ (درجتان)

**الحل:** $I=\int\left(\tan^{-1}x\right)^2\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{1}{3}\left(\tan^{-1}x\right)^3+c$ **(1+1)**

**(8)** $I=\int \frac{\sin\left(2x\right)\cos\left(2x\right)}{\sin^2 2x}dx$ (درجتان)

**الحل:** $I=\frac{1}{4}\int \frac{4\sin\left(2x\right)\cos\left(2x\right)}{\sin^2 2x}dx=\frac{1}{4}\ln(\sin^2 2x)+c$ **(1+1)**