جامعة الملك سعود
King Saud University

كلية العلوم – قسم الرياضيات
الاختبار النهائي
المقرر 111 ريض

الفصل الأول 1445 هـ
الزمن: 3 ساعات

ملاحظات 1. ممنوع استخدام الآلة الحاسبة 2. رتب اجابتك حسب ترتيب ورود الاسئلة واكتب بخط واضح.

الجزء الأول (7 درجات):

(1) جد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = (x-1)^2$ على الفترة $[1,4]$. (3 درجات)

(2) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x) = \int_{\ln|x|}^{e^x} \sqrt{t^2+5}\, dt$. (درجتان)

(3) جد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = sinh^{-1}(3^x) + \ln(|\tanh(4x)|)$. (درجتان)

الجزء الثانى (14 درجة): احسب التكاملات التالية

(1) $\int \frac{2}{\sqrt{-x^2-6x}}\, dx$ (3 درجات)

(2) $\int x^2\, coshx\, dx$ (3 درجات)

(3) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\, dx$ (3 درجات)

(4) $\int \frac{4x^2-x+12}{x^3+4x}\, dx$ (3 درجات)

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\, dx$ (درجتان)

الجزء الثالث (19 درجة):

(1) احسب $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x+5x}{e^{2x}+2x+1}$ (درجتان)

(2) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_1^{\infty} \frac{1}{(2x-1)^3}\, dx$ متقارباً أو متباعداً. (3 درجات)

(3) ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = -x^2$ و $y = x^2+1$ و $x = -1$ و $x = 2$ ، وجد مساحتها. (3 درجات)

(4) ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = \sqrt{x}$، ثم جد حجم الجسم الناتج عن دوران هذه المنطقة حول محور X. (3 درجات)

(5) جد طول المنحنى $y = 2 + \cosh(x)$ من $x = 0$ إلى $x = ln2$. (3 درجات)

(6) حول المعادلة القطبية $r = 8\, cos\theta + 6\, sin\theta$ إلى معادلة كارتيزية. (درجتان)

(7) ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 3 + 3\, cos\theta$ وخارج المنحنى $r = 3$ وجد مساحتها. (3 درجات)

لا يكتب في هذا الهامش

1

نموذج إجابة الاختبار النهائي
مقرر 111 ريض - الفصل الدراسي الأول
1440هـ

الجزء الأول (7 درجات)

(1)

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a), \quad c \in (a,b)$$

نظرية القيمة المتوسطة

$$\Rightarrow \int_1^4 (x-1)^2\,dx = 3(c-1)^2$$

$$\left.\frac{(x-1)^3}{3}\right|_1^4 = 3(c-1)^2$$

③

$$9-0 = 3(c-1)^2$$

$$(c-1)^2 = 3$$

$$c-1 = \pm\sqrt{3}$$

$$\therefore c = 1 \pm \sqrt{3}$$

لاحظ أن $c = 1+\sqrt{3}$ هي القيمة الوحيدة التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة حيث $c = 1+\sqrt{3} \in (1,4)$

(2)

$$F(x) = \int_{\ln|x|}^{e^x} \sqrt{t^2+5}\,dt$$

②

$$\Rightarrow F'(x) = \left(\sqrt{e^{2x}+5}\right)e^x - \left(\sqrt{(\ln x)^2+5}\right)\frac{1}{x}$$

(3)

$$f(x) = \sinh^{-1}(3^x) + \ln(|\tanh(4x)|)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3^x \ln 3}{\sqrt{1+3^{2x}}} + \frac{4\,\mathrm{sech}^2 4x}{\tanh 4x}$$

②

الجزء الثاني (14 درجة)

(1)

$$I = \int \frac{2}{\sqrt{-x^2-6x}}\,dx$$

③

$$I = \int \frac{2}{\sqrt{-(x^2+6x+9-9)}}\,dx$$

$$\therefore I = 2\int \frac{1}{\sqrt{9-(x+3)^2}}\,dx = 2\sin^{-1}\left(\frac{x+3}{3}\right) + C$$

لا يكتب في هذا الهامش

2

$$I = \int x^2 \cosh x \, dx \qquad (2)$$

نستخدم طريقة التكامل بالتجزئ

$u = x^2 \quad , \quad dv = \cosh x \, dx$

$du = 2x\,dx \leftarrow v = \sinh x$

3

$\Rightarrow I = x^2 \sinh x - 2\int x \sinh x \, dx$

$u = x \qquad dv = \sinh x \, dx$

$du = dx \rightarrow v = \cosh x$

$\Rightarrow I = x^2 \sinh x - 2x \cosh x + 2\int \cosh x \, dx$

$\therefore I = x^2 \sinh x - 2x \cosh x + 2 \sinh x + C$

$$I = \int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}} \, dx \qquad (3)$$

نستخدم طريقة التكامل بالتعويض

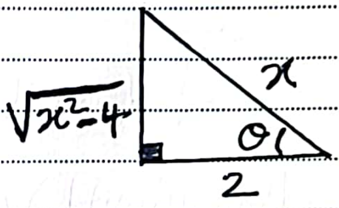
$x = 2\sec\theta \; , \; dx = 2\sec\theta\tan\theta \, d\theta$

$$I = \int \frac{2\sec\theta\tan\theta}{4\sec^2\theta\sqrt{4\sec^2\theta - 4}} \, d\theta$$

3

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{\cancel{\tan\theta}}{\sec\theta \cancel{\tan\theta}} \, d\theta$$

$$I = \frac{1}{4}\int \cos\theta \, d\theta$$



$$\therefore I = \frac{1}{4}\sin\theta + C = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + C$$

$$I = \int \frac{4x^2 - x + 12}{x^3 + 4x} \, dx \qquad (4)$$

نستخدم طريقة التكامل بالكسور الجزئية

$$\frac{4x^2 - x + 12}{x^2 + 4x} = \frac{4x^2 - x + 12}{x(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

$\Rightarrow A(x^2+4) + x(Bx + C) = 4x^2 - x + 12$

$(A+B)x^2 + Cx + 4A = 4x^2 - x + 12$

3

$\Rightarrow A + B = 4 \; , \; C = -1 \; , \; 4A = 12$ (مقارنة المعاملات)

$\therefore A = 3 , \; B = 1$ and $C = -1$

3

$$\therefore I = \int \left[\frac{3}{x} + \frac{x-1}{x^2+4} \right] dx$$

$$I = 3\int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

$$\therefore I = 3\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$\Rightarrow I = \ln\left|x^3\sqrt{x^2+4}\right| - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}\,dx \qquad (5)$$

بفرض $\boxed{u = x^{1/6}}$

$$\Rightarrow \boxed{x = u^6}\ , \quad dx = 6u^5\,du$$

$\sqrt{x} = u^3$
$\sqrt[3]{x} = u^2$

$$I = \int \frac{6u^5}{u^3+u^2}\,du$$

(2)

$$I = 6\int \frac{u^3}{u+1}\,du$$

$$I = 6\int \left[u^2 - u + 1 - \frac{1}{u+1}\right] du$$

$$I = 6\left[\frac{u^3}{3} - \frac{u^2}{2} + u - \ln|u+1|\right] + C$$

$u^2 - u + 1$
$u+1 \;\big)\; \cancel{u^3}$
$\cancel{-u^3} \mp u^2$
$-\cancel{u^2}$
$\pm \cancel{u^2} \pm u$
$\cancel{u}$
$\cancel{-u} \mp 1$
-1

$$\therefore I = 6\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + x^{1/6} - \ln\left|x^{1/6}+1\right|\right) + C$$

الجزء الثالث (19 درجة)

(1)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + 5x}{e^{2x} + 2x + 1} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

بتطبيق قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + 5}{2e^{2x} + 2} \longrightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{4e^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4e^x}$$ مرة ثانية " " "

$$= 0$$

(2)

لا يكتب في
هذا الهامش

4

(2) التكامل المعتل $\int_1^{\infty} \frac{1}{(2x-1)^3}\,dx$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(2x-1)^3}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{(2x-1)^3}\,dx$$

③

$$= \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{2} \frac{(2x-1)^{-2}}{-2} \right]_1^t$$

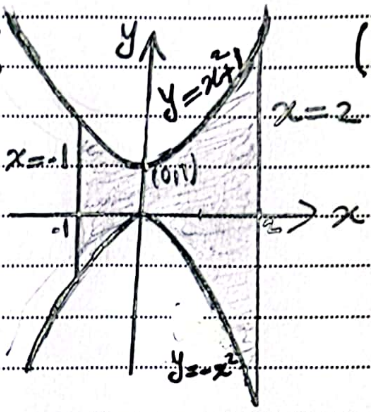
$$\therefore \int_1^{\infty} \frac{1}{(2x-1)^3}\,dx = \frac{-1}{4} \lim_{t\to\infty} \left[\cancel{\frac{1}{(2t-1)^2}} - 1 \right] = \frac{1}{4}$$

0

∴ التكامل المعتل المعطى متقارب وقيمته $1/4$.

(3) مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y=-x^2$ ، $y=x^2+1$ ، $x=-1$ ، $x=2$

هو



$$A = \int_{-1}^{2} \left[(x^2+1) - (-x^2) \right] dx$$

$$A = \int_{-1}^{2} (2x^2+1)\,dx$$

③

$$A = \left[\frac{2}{3}x^3 + x \right]_{-1}^{2}$$

$$\therefore A = \frac{2}{3}(8) + 2 - \left(-\frac{2}{3} - 1\right) = 9$$

(4) حجم الجسم الناتج عن دوران المنطقة المحدودة بالمنحنيات $y=x^2$ ، $y=\sqrt{x}$ حول محور x .

$y=\sqrt{x}$ ① , $y=x^2$ ②

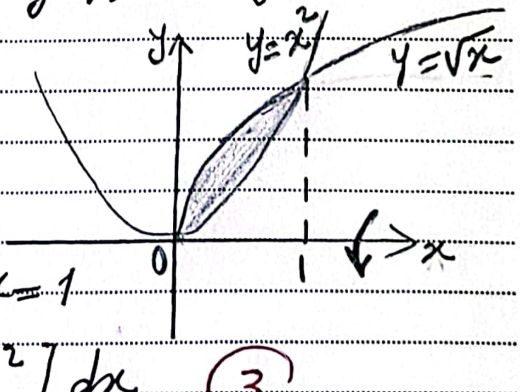
Solving Eqns ① and ②

$\Rightarrow x^2 = \sqrt{x}$

$x^4 = x$

$x^4 - x = 0$

$x(x^3-1) = 0 \Rightarrow x=0 , x=1$



$$V = \pi \int_a^b \left[(f(x))^2 - (g(x))^2 \right] dx$$

③

$$V = \pi \int_0^1 \left[(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2 \right] dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4)\,dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{3\pi}{10}$$

$$\therefore V = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)\pi = \frac{3\pi}{10}.$$

#

لا يكتب في
هذا الهامش

5

(5) طول القوس لمنحنى الدالة f من $x=a$ إلى $x=b$ هو

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\, dx$$

طول القوس المنحنى $y = 2+\cosh x$ من $x=0$ إلى $x=\ln 2$ هو

$$L = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

3

$$L = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1+\sinh^2 x}\, dx = \int_0^{\ln 2} \cosh x\, dx$$

$$L = \left[\sinh x\right]_0^{\ln 2}$$

$$L = \left(\frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2}\right) - \cancel{\left(\frac{e^0 - e^0}{2}\right)}^{0}$$

$$\therefore L = \frac{2-\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

(6) المعادلة القطبية $r = 8\cos\theta + 6\sin\theta$ مطلوب تحويلها إلى الصيغة الديكارتية

$$\because x = r\cos\theta \,,\; y = r\sin\theta$$

$$\Rightarrow r = 8\left(\frac{x}{r}\right) + 6\left(\frac{y}{r}\right) \qquad (\times r)$$

$$\Rightarrow r^2 = 8x + 6y$$

2

$$\because r^2 = x^2+y^2$$

$$\therefore x^2+y^2 = 8x+6y$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + y^2 - 6y = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 - 16y^2 - 6y + 9 - 9 = 0$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$$

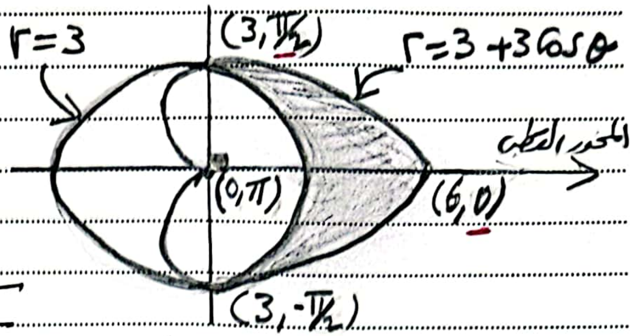
هذه هي الصيغة الكارتيزية (الديكارتية) والتي تمثل معادلة دائرة مركزها (4,3) ونصف قطرها 5.

لا يكتب في
هذا الهامش

6

نقاط تقاطع منحنى القلب (الكارديود)
$r=3+3\cos\theta$ مع منحنى الدائرة $r=3$

$$3+3\cos\theta=3$$
$$\Rightarrow 3\cos\theta=0$$
$$\Rightarrow \cos\theta=0$$
$$\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \text{ or } \theta=\frac{-\pi}{2}$$



∴ نقاط التقاطع هي $(3,\frac{\pi}{2})$, $(3,-\frac{\pi}{2})$

وتكون مساحة المنطقة داخل منحنى القلب $r=3+3\cos\theta$
وخارج منحنى الدائرة $r=3$ هي $A=\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(r_1^2-r_2^2)d\theta$

$$A=\cancel{2}\left[\cancel{\frac{1}{2}}\int_0^{\pi/2}\left[(3+3\cos\theta)^2-3^2\right]d\theta\right]$$ 3

$$A=\int_0^{\pi/2}(\cancel{9}+18\cos\theta+9\cos^2\theta-\cancel{9})\,d\theta$$

$$A=\int_0^{\pi/2}\left[18\cos\theta+9\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\right]d\theta$$

$$A=\left[18\sin\theta+\frac{9}{2}\theta+\frac{9}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$\therefore A=18+\frac{9\pi}{4}$$ #