111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثاني 1445 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

الجزء الأول (7 درجات):

(1) جد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ على الفترة $[-2, 0]$. [3]

الحل: باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\, dx$

حيث $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ و $[a,b] = [-2,0]$

$$(0-(-2))\ \sqrt[3]{c+1} = \int_{-2}^{0} \sqrt[3]{x+1}\, dx = \int_{-2}^{0} (x+1)^{\frac{1}{3}}\ dx$$

$$2\sqrt[3]{c+1} = \left[\frac{3}{4}\,(x+1)^{\frac{4}{3}}\right]_{-2}^{0} = \frac{3}{4}\,(0+1)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4}\,(-2+1)^{\frac{4}{3}}$$

$$2\sqrt[3]{c+1} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0 \implies 2\sqrt[3]{c+1} = 0$$

$$\sqrt[3]{c+1} = 0 \implies c+1 = 0 \implies c = -1$$

لاحظ أن $c = -1 \in (-2, 0)$.

قيمة c المطلوبة هي -1 .

(2) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x) = \int_{\sqrt{3x}}^{e^{x^2}} \tan(t^2+1)\, dt$. [2]

الحل: $F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{\sqrt{3x}}^{e^{x^2}} \tan(t^2+1)\, dt$

$$F'(x) = \tan\left(\left(e^{x^2}\right)^2 + 1\right)\ e^{x^2}\ (2x) - \tan\left(\left(\sqrt{3x}\right)^2 + 1\right)\ \frac{1}{2\sqrt{3x}}\ (3)$$

$$= 2x\, e^{x^2}\ \tan\left(e^{2x^2} + 1\right) - \frac{3}{2\sqrt{3x}}\ \tan(3x+1)$$

(3) جد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = \cosh^{-1}\left(3^{2x-1}\right) + \log\left|csch\left(\frac{x}{2}\right)\right|$. [2]

الحل:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(3^{2x-1}\right)^2 - 1}}\ \left(3^{2x-1}\,(2)\ \ln 3\right) + \frac{-csch\left(\frac{x}{2}\right)\ \coth\left(\frac{x}{2}\right)\ \left(\frac{1}{2}\right)}{csch\left(\frac{x}{2}\right)}\ \frac{1}{\ln 10}$$

$$= \frac{2\, 3^{2x-1} \ln 3}{\sqrt{3^{4x-2}-1}} - \frac{\coth\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \ln 10}$$

الجزء الثاني (16 درجة) : أحسب التكاملات التالية :

(1) $\int \frac{2}{\sqrt{4x^2+8x+20}}\, dx$. [3]

الحل : باستخدام الإكمال إلى مربع كامل

$$4x^2+8x+20 = 4(x^2+2x+5) = 4\left[(x^2+2x+1)+4\right] = 4\left[(x+1)^2+(2)^2\right]$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{4x^2+8x+20}}\, dx = \int \frac{2}{\sqrt{4\left[(x+1)^2+(2)^2\right]}}\, dx = \int \frac{2}{2\sqrt{(x+1)^2+(2)^2}}\, dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+(2)^2}}\, dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c$$

باستخدام القانون $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2+a^2}}\, dx = \sinh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$ حيث $a > 0$

(2) $\int \tan^{-1} x\, dx$. [3]

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$u = \tan^{-1} x \qquad dv = dx$$
$$du = \frac{1}{1+x^2}\, dx \qquad v = x$$

$$\int \tan^{-1} x\, dx = x\, \tan^{-1} x - \int x\, \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= x\, \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx = x\, \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\, \ln(x^2+1) + c$$

(3) $\int \frac{4}{x^2\sqrt{x^2-4}}\, dx$. [3]

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

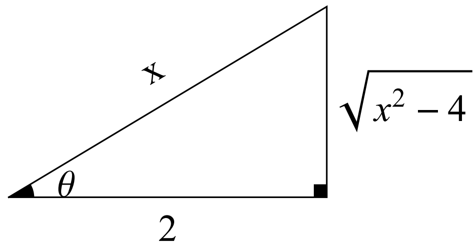
ضع $\cos\theta = \frac{2}{x} \implies \sec\theta = \frac{x}{2} \implies x = 2\sec\theta$

$$dx = 2\sec\theta\, \tan\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{4\sec^2\theta-4} = \sqrt{4\left(\sec^2\theta-1\right)} = \sqrt{4\tan^2\theta} = 2\tan\theta$$

$$\int \frac{4}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx = \int \frac{4\ (2\sec\theta\ \tan\theta)}{(2\sec\theta)^2\ 2\tan\theta}\,d\theta = \int \frac{8\sec\theta\ \tan\theta}{8\sec^2\theta\ \tan\theta}\,d\theta$$

$$= \int \frac{1}{\sec\theta}\,d\theta = \int \cos\theta\,d\theta = \sin\theta + c$$



من المثلث نجد أن : $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-4}}\,dx = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} + c$$

(4) $\int \dfrac{3x+1}{x^2+2x-8}\,dx$. [3]

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{3x+1}{x^2+2x-8} = \frac{3x+1}{(x-2)(x+4)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+4}$$

$$\frac{3x+1}{(x-2)(x+4)} = \frac{A_1\ (x+4)}{(x-2)(x-4)} + \frac{A_2\ (x-2)}{(x+4)(x-2)}$$

$$3x+1 = A_1\ (x+4) + A_2\ (x-2)$$

بوضع $x = 2$ نجد أن : $3(2)+1 = A_1\ (2+4) \implies 7 = 6A_1 \implies A_1 = \dfrac{7}{6}$

بوضع $x = -4$ نجد أن : $3(-4)+1 = A_2\ (-4-2) \implies -11 = -6A_2 \implies A_2 = \dfrac{11}{6}$

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x-8}\,dx = \int \left(\frac{\frac{7}{6}}{x-2} + \frac{\frac{11}{6}}{x+4}\right)\,dx$$

$$= \frac{7}{6}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{11}{6}\int \frac{1}{x+4}\,dx$$

$$= \frac{7}{6}\ln|x-2| + \frac{11}{6}\ln|x+4| + c$$

(5) $\int \frac{1}{x+\sqrt[3]{x}}\,dx$. [2]

الحل : $\int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x+x^{\frac{1}{3}}}\,dx$

باستخدام التعويض $x = u^3$ ، أي أن $u = x^{\frac{1}{3}}$

$dx = 3u^2\,du$

$$\int \frac{dx}{x+x^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{3u^2}{u^3+(u^3)^{\frac{1}{3}}}\,du = \int \frac{3u^2}{u^3+u}\,du = \int \frac{3u^2}{u\,(u^2+1)}\,du$$

$$= 3\int \frac{u}{u^2+1}\,du = \frac{3}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}\,du = \frac{3}{2}\,\ln(u^2+1)+c = \frac{3}{2}\,\ln\left(x^{\frac{2}{3}}+1\right)+c$$

(6) $\int \sin^5 x\,\cos^6 x\,dx$. [2]

الحل :

$$\int \sin^5 x\,\cos^6 x\,dx = \int \sin^4 x\,\cos^6 x\,\sin x\,dx$$

$$= \int \left(\sin^2 x\right)^2\,\cos^6 x\,\sin x\,dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2\,\cos^6 x\,\sin x\,dx$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x \implies (-1)\,du = \sin x\,dx$$

$$\int \left(1-\cos^2 x\right)^2\,\cos^6 x\,\sin x\,dx = \int \left(1-u^2\right)^2\,u^6\,(-1)\,du$$

$$= -\int \left(1-2u^2+u^4\right)\,u^6\,du = -\int \left(u^6-2u^8+u^{10}\right)\,du$$

$$= -\left[\frac{u^7}{7}-2\,\frac{u^9}{9}+\frac{u^{11}}{11}\right]+c = -\frac{\cos^7 x}{7}+2\,\frac{\cos^9 x}{9}-\frac{\cos^{11} x}{11}+c$$

الجزء الثالث (17 درجة) :

(1) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_0^\infty x\,e^{1-x^2}\,dx$ متقارباً أم متباعداً . [3]

الحل :

$$\int_0^\infty x\,e^{1-x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_0^t x\,e^{1-x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{2}\,\int_0^t e^{1-x^2}(-2x)\,dx\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{2}\,\left[e^{1-x^2}\right]_0^t\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{2}\,\left[e^{1-t^2}-e^{1-0^2}\right]\right) = \frac{-1}{2}\,[0-e] = \frac{e}{2}$$

التكامل المعتل متقارب .

تذكر أن $\lim_{t\to\infty} e^{1-t^2} = 0$.

(2) أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$ ،
وجد مساحتها . [3]

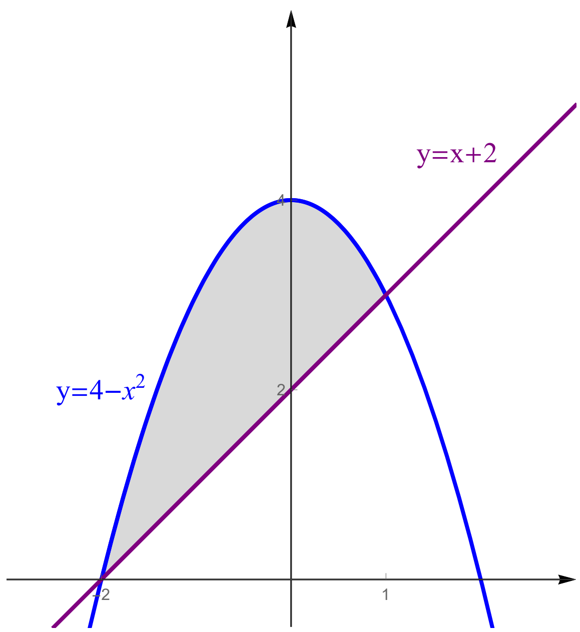
الحل :

المنحنى $y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأسفل .

المنحنى $y = x + 2$ يمثل خط مستقيم يمر بالنقطة $(0, 2)$ ، وميله يساوي 1 .

إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 4 - x^2$ و $y = x + 2$:

$$x + 2 = 4 - x^2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x+2)(x-1) = 0 \implies x = -2\,,\ x = 1$$



$$\mathrm{A} = \int_{-2}^{1} \left[(4 - x^2) - (x + 2)\right]\, dx = \int_{-2}^{1} (4 - x^2 - x - 2)\, dx$$

$$= \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2(1)\right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2(-2)\right)$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 6 = -3 + 8 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

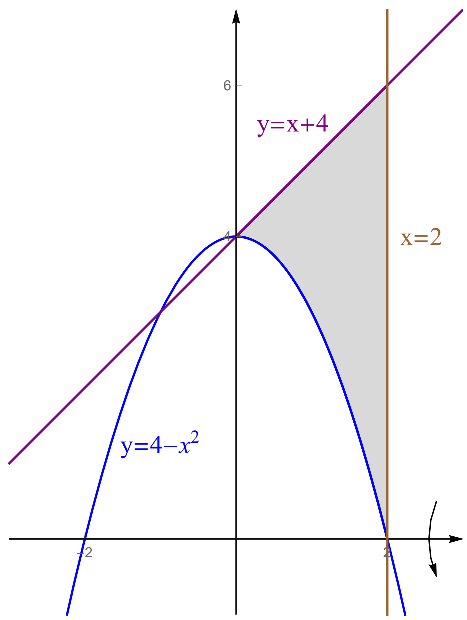
(3) ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = 4 - x^2$ و $y = x + 4$ و $x = 2$ ، ثم جد حجم الجسم الناتج من دوران هذه المنطقة حول محور x . [3]

الحل :

$y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأسفل .

$y = x + 4$ يمثل خط مستقيم يمر بالنقطة $(0, 4)$ ، وميله يساوي 1 .

$x = 2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(2, 0)$.



لاحظ أن الخط المستقيم $x = 2$ يقطع القطع المكافئ $y = 4 - x^2$ في النقطة $(2, 0)$.

باستخدام طريقة الوردات :

$$\text{V} = \pi \int_0^2 \left[(x+4)^2 - (4-x^2)^2\right] \, dx = \pi \int_0^2 \left[(x^2 + 8x + 16) - (16 - 8x^2 + x^4)\right] \, dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left(x^2 + 8x + 16 - 16 + 8x^2 - x^4\right) \, dx = \pi \int_0^2 \left(-x^4 + 9x^2 + 8x\right) \, dx$$

$$= \pi \left[-\frac{x^5}{5} + 3x^3 + 4x^2\right]_0^2 = \pi \left[\left(-\frac{2^5}{5} + 3(2)^3 + 4(2)^2\right) - \left(-\frac{0^5}{5} + 3(0)^3 + 4(0)^2\right)\right]$$

$$= \pi \left(-\frac{32}{5} + 24 + 16\right) = \pi \left(-\frac{32}{5} + 40\right) = \pi \left(\frac{-32 + 200}{5}\right) = \frac{168\pi}{5}$$

(4) جد طول المنحنى $y = \sqrt{1-x^2}$ من $x = -1$ إلى $x = 1$. [3]

الحل :

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\,(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathrm{L} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{(1-x^2)+x^2}{1-x^2}}\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \left[\sin^{-1} x\right]_{-1}^{1}$$

$$= \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

(5) حول المعادلة القطبية $r = 8\sin\theta + 6\cos\theta$ إلى معادلة كارتيزية . [2]

الحل :

$$r = 8\sin\theta + 6\cos\theta \implies r^2 = 8(r\sin\theta) + 6(r\cos\theta) \implies x^2 + y^2 = 8y + 6x$$

$$\implies x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0 \implies (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = 9 + 16$$

$$\implies (x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2$$

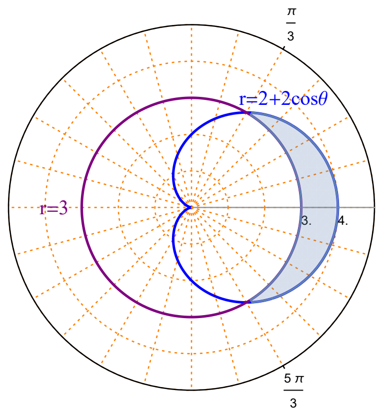
تمثل دائرة مركزها النقطة $(3, 4)$ ونصف قطرها 5 .

(6) ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2 + 2\cos\theta$ وخارج المنحنى $r = 3$ وجد مساحتها. [3]

الحل :

المنحنى $r = 2 + 2\cos\theta$ يمثل منحنى قلبي رأسه إلى اليمين ومتناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 3$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 3 .



نقاط تقاطع المنحنى $r = 2 + 2\cos\theta$ مع المنحنى $r = 3$:

$$2 + 2\cos\theta = 3 \implies 2\cos\theta = 1 \implies \cos\theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{3} \;\;,\;\; \theta = \frac{5\pi}{3}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[(2+2\cos\theta)^2 - (3)^2\right]\,d\theta\right) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[4 + 8\cos\theta + 4\cos^2\theta - 9\right]\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[-5 + 8\cos\theta + 4\cos^2\theta\right]\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[-5 + 8\cos\theta + 4\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\right]\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[-5 + 8\cos\theta + 2 + 2\cos 2\theta\right]\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[-3 + 8\cos\theta + 2\cos 2\theta\right]\,d\theta$$

$$= \left[-3\theta + 8\sin\theta + \sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left[-3\theta + 8\sin\theta + 2\sin\theta\,\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left[-3\left(\frac{\pi}{3}\right) + 8\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] - \left[-3\,(0) + 8\sin(0) + 2\sin(0)\cos(0))\right]$$

$$= \left[-\pi + 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right] - [0+0+0]$$

$$= -\pi + \frac{8\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2}$$