111 ريض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثالث 1444 هـ
حل الاختبار النهائي
د. طارق عبدالرحمن مُحَمَّد الفاضل

الجزء الأول (7 درجات):

(1) جد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \sqrt{x+1}$ على الفترة $[-1, 8]$. [3]

الحل: باستخدام العلاقة $(b-a)f(c) = \int_a^b f(x)\,dx$

حيث $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $[a,b] = [-1,8]$

$$(8-(-1))\sqrt{c+1} = \int_{-1}^{8} \sqrt{x+1}\,dx = \int_{-1}^{8} (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$9\sqrt{c+1} = \left[\frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{8} = \left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{8} = \frac{2}{3}(8+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(-1+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$9\sqrt{c+1} = \frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}} - 0 = \frac{2}{3}(27) = 18 \implies \sqrt{c+1} = \frac{18}{9} = 2$$

$$c+1 = 4 \implies c = 4-1 = 3 \in (-1,8)$$

قيمة c المطلوبة هي 3 .

(2) جد $F'(x)$ إذا كانت $F(x) = \int_{\sqrt{2x}}^{e^{-3x}} \cos(t^2+1)\,dt$. [2]

الحل: $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{\sqrt{2x}}^{e^{-3x}} \cos(t^2+1)\,dt$

$$F'(x) = \cos\left(\left(e^{-3x}\right)^2+1\right)\ \left(e^{-3x}(-3)\right) - \cos\left(\left(\sqrt{2x}\right)^2+1\right)\ \left(\frac{1}{2\sqrt{2x}}(2)\right)$$

$$= -3\,e^{-3x}\cos\left(e^{-6x}+1\right) - \frac{\cos(2x+1)}{\sqrt{2x}}$$

(3) جد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = \tanh^{-1}\left(4^{x^2-1}\right) + \log_3|\sinh(2x)|$. [2]

الحل:

$$f'(x) = \frac{1}{1-\left(4^{x^2-1}\right)^2}\left(4^{x^2-1}\,(2x)\,\ln 4\right) + \frac{\cosh(2x)\,(2)}{\sinh(2x)}\,\frac{1}{\ln 3}$$

$$= \frac{2x\, 4^{x^2-1}\ \ln 4}{1 - 4^{2x^2-2}} + \frac{2\coth(2x)}{\ln 3}$$

الجزء الثاني (14 درجة) : أحسب التكاملات التالية :

(1) $\int \frac{2}{\sqrt{x^2-8x+25}}\, dx$. [3]

الحل : باستخدام الإكمال إلى مربع كامل

$$\int \frac{2}{\sqrt{x^2-8x+25}}\, dx = \int \frac{2}{\sqrt{(x^2-8x+16)+9}}\, dx$$

$$= 2\int \frac{1}{\sqrt{(x-4)^2+(3)^2}}\, dx = \ 2\ \sinh^{-1}\left(\frac{x-4}{3}\right) + c$$

باستخدام القانون $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2+[f(x)]^2}}\, dx = \sinh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c$ حيث $a > 0$

(2) $\int x^4\ \ln|x|\, dx$. [3]

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$u = \ln|x| \qquad dv = x^4\, dx$$
$$du = \frac{1}{x}\, dx \qquad v = \frac{x^5}{5}$$

$$\int x^4\ \ln|x|\, dx = \frac{x^5}{5}\ \ln|x| - \int \frac{x^5}{5}\,\frac{1}{x}\, dx$$

$$= \frac{x^5}{5}\ \ln|x| - \frac{1}{5}\int x^4\, dx = \frac{x^5}{5}\ \ln|x| - \frac{1}{5}\,\frac{x^5}{5} + c$$

(3) $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\, dx$. [3]

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

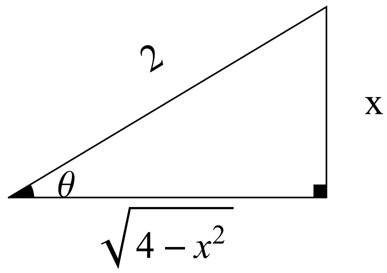
ضع $\sin\theta = \frac{x}{2} \implies x = 2\sin\theta$

$$dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2\theta} = \sqrt{4\left(1-\sin^2\theta\right)} = \sqrt{4\cos^2\theta} = 2\cos\theta$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\, dx = \int \frac{2\cos\theta}{(2\sin\theta)^2\ 2\cos\theta}\, d\theta = \int \frac{1}{4\sin^2\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\sin^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{4}\int \csc^2\theta\, d\theta = \frac{1}{4}\left(-\cot\theta\right) + c = -\frac{1}{4}\ \cot\theta + c$$



من المثلث نجد أن : $\cot\theta = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\, dx = -\frac{1}{4}\ \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + c$$

(4) $\displaystyle\int \frac{2x^2+9x-9}{x^3-9x}\, dx$. [3]

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{2x^2+9x-9}{x^3-9x} = \frac{2x^2+9x-9}{x(x^2-9)} = \frac{2x^2+9x-9}{x(x-3)(x+3)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-3} + \frac{A_3}{x+3}$$

$$\frac{2x^2+9x-9}{x^3-9x} = \frac{A_1(x-3)(x+3)}{x(x-3)(x+3)} + \frac{A_2x(x+3)}{(x-3)x(x+3)} + \frac{A_3x(x-3)}{(x+3)x(x-3)}$$

$$\begin{aligned}
2x^2+9x-9 &= A_1(x-3)(x+3) + A_2x(x+3) + A_3x(x-3) \\
&= A_1\left(x^2-9\right) + A_2x^2 + 3A_2x + A_3x^2 - 3A_3x \\
&= A_1x^2 - 9A_1 + A_2x^2 + 3A_2x + A_3x^2 - 3A_3x \\
&= \left(A_1+A_2+A_3\right)x^2 + \left(3A_2-3A_3\right)x - 9A_1
\end{aligned}$$

بمساواة معاملات كثيرتي الحدود

$$\begin{array}{lcc}
A_1+A_2+A_3 = 2 & \longrightarrow & (1) \\
3A_2-3A_3 = 9 & \longrightarrow & (2) \\
-9A_1 = -9 & \longrightarrow & (3)
\end{array}$$

من المعادلة (3) نجد أن : $A_1 = 1$

المعادلة (1) تصبح : (4) $\longrightarrow$ $A_2 + A_3 = 1$

المعادلة (2) تصبح : (5) $\longrightarrow$ $A_2 - A_2 = 3$

بجمع المعادلتين (5) , (4) نجد أن : $A_2 = 2 \implies 2A_2 = 4$

من المعادلة (4) نجد أن : $2 + A_3 = 1 \implies A_3 = -1$

$$\int \frac{2x^2+9x-9}{x^3-9x}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x-3} + \frac{-1}{x+3}\right) dx$$
$$= \int \frac{1}{x}\,dx + 2\int \frac{1}{x-3}\,dx - \int \frac{1}{x+3}\,dx$$
$$= \ln|x| + 2\ln|x-3| - \ln|x+3| + c$$

(5) $\int \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{x}}}\,dx$. [2]

الحل :

ضع $u = \sqrt{2+\sqrt{x}} \implies u^2 = 2+\sqrt{x} \implies u^2 - 2 = \sqrt{x} \implies \left(u^2-2\right)^2 = x$

$$2\left(u^2-2\right)\,2u\,du = dx \implies 4u\left(u^2-2\right)\,du = dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{x}}}\,dx = \int \frac{4u\left(u^2-2\right)\,du}{u}\,du = 4\int \left(u^2-2\right)\,du$$
$$= 4\left(\frac{u^3}{3} - 2u\right) + c = \frac{4}{3}\left(\sqrt{2+\sqrt{x}}\right)^3 - 8\sqrt{2+\sqrt{x}} + c$$

الجزء الثالث (19 درجة) :

(1) احسب $\lim_{x\to\infty} \left(x^3+1\right) e^{-x^3}$. [2]

الحل : $(\infty.0) \quad \lim_{x\to\infty} \left(x^3+1\right) e^{-x^3}$

$$\lim_{x\to\infty} \left(x^3+1\right) e^{-x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{e^{x^3}} \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

باستخدام قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^{x^3}\left(3x^2\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^3}} = 0$$

إذاً $\lim_{x\to\infty} \left(x^3+1\right) e^{-x^3} = 0$

(2) بين فيما إذا كان التكامل المعتل $\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx$ متقارباً أم متباعداً . [2]

الحل :

$$\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{t\to 1^+}\int_t^2 \frac{1}{x-1}\,dx = \lim_{t\to 1^+}\left[\ln|x-1|\right]_t^2$$

$$= \lim_{t\to 1^+}\left[\ln|2-1| - \ln|t-1|\right] = \lim_{t\to 1^+}\left[\ln(1) - \ln|t-1|\right] = 0-(-\infty) = \infty$$

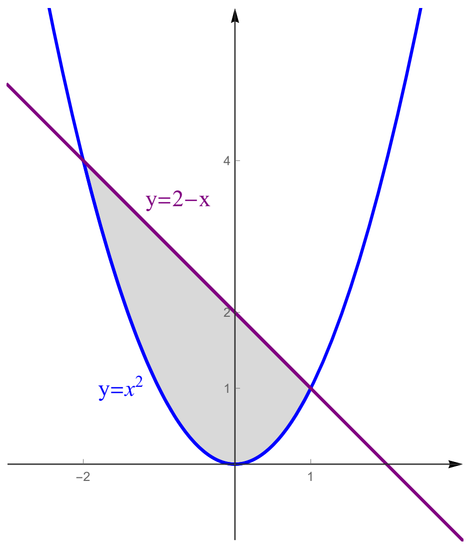
التكامل المعتل متباعد .

(3) أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = 2-x$ و $y = x^2$
وجد مساحتها . [3]

الحل :

المنحنى $y = 2-x$ يمثل خط مستقيم ميله -1 ويمر بالنقطة $(0,2)$.

المنحنى $y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0,0)$ وفتحته للأعلى .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 2-x$ و $y = x^2$:

$$x^2 = 2-x \implies x^2+x-2=0 \implies (x-1)(x+2)=0 \implies x=1\,,\; x=-2$$

$$\text{A} = \int_{-2}^{1}\left[(2-x)-(x^2)\right]\,dx = \int_{-2}^{1}\left(-x^2-x+2\right)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}$$

$$= \left(-\frac{(1)^3}{3}-\frac{(1)^2}{2}+2(1)\right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}+2(-2)\right)$$

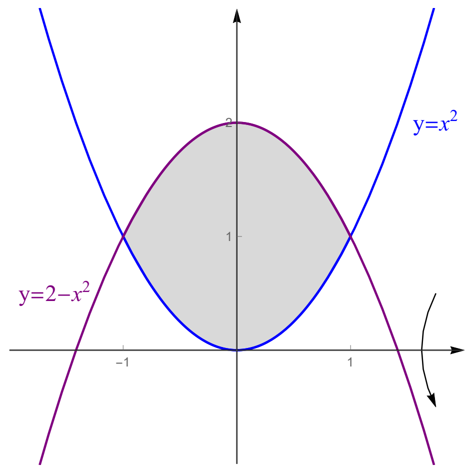
$$= -\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{8}{3}+2+4 = 8-\frac{9}{3}-\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

(4) ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = 2 - x^2$ و $y = x^2$ ، ثم جد حجم الجسم الناتج من دوران هذه المنطقة حول محور x . [3]

الحل :

$y = 2 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 2)$ وفتحته للأسفل .

$y = x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 0)$ وفتحته للأعلى .



إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = 2 - x^2$ و $y = x^2$:

$$x^2 = 2 - x^2 \implies 2x^2 - 2 = 0 \implies x^2 - 1 = 0 \implies (x-1)(x+1) = 0 \implies x = -1 \,,\; x = 1$$

باستخدام طريقة الوردات :

$$\mathrm{V} = \pi \int_{-1}^{1} \left[\left(2 - x^2\right)^2 - (x^2)^2 \right] \, dx = \pi \int_{-1}^{1} \left[\left(4 - 4x^2 + x^4\right) - x^4 \right] \, dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(4 - 4x^2\right) \, dx$$

$$= \pi \left[4x - 4 \, \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \pi \left[\left(4(1) - 4 \, \frac{(1)^3}{3} \right) - \left(4(-1) - 4 \, \frac{(-1)^3}{3} \right) \right]$$

$$= \pi \left[4 - \frac{4}{3} - \left(-4 + \frac{4}{3} \right) \right] = \pi \left(4 - \frac{4}{3} + 4 - \frac{4}{3} \right) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16\pi}{3}$$

(5) جد طول المنحنى $y = 1 + \frac{2}{3} \, x^{\frac{3}{2}}$ من $x = 0$ إلى $x = 3$. [3]

الحل :

$$y' = 0 + \frac{2}{3} \, \frac{3}{2} \, x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$\mathrm{L} = \int_{0}^{3} \sqrt{1 + \left(\sqrt{x}\right)^2} \, dx = \int_{0}^{3} \sqrt{1 + x} \, dx = \int_{0}^{3} (1 + x)^{\frac{1}{2}} \, dx = \left[\frac{2}{3} \, (1 + x)^{\frac{3}{2}} \right]_{0}^{3}$$

$$= \frac{2}{3}(1+3)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1+0)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}(8) - \frac{2}{3}(1) = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

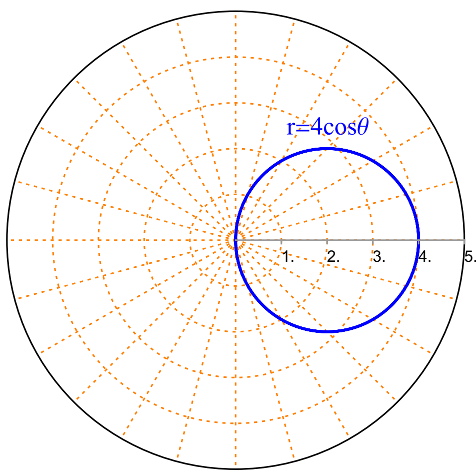
(6) حول المعادلة القطبية $r = 4\cos\theta$ إلى معادلة كارتيزية وارسمها . [2]

الحل :

$$r = 4\cos\theta \implies r^2 = 4(r\cos\theta) \implies x^2 + y^2 = 4x \implies x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$\implies \left(x^2 - 4x + 4\right) + y^2 = 4 \implies (x-2)^2 + y^2 = 2^2$$

تمثل دائرة مركزها النقطة $(2,0)$ ونصف قطرها 2 .

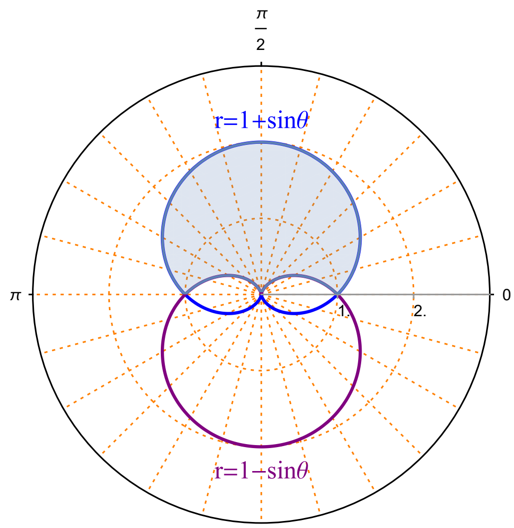


(7) ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 1 + \sin\theta$ وخارج المنحنى $r = 1 - \sin\theta$ وجد مساحتها. [4]

الحل :

المنحنى $r = 1 + \sin\theta$ يمثل منحنى قلبي رأسه إلى الأعلى ومتناظر حول الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.

المنحنى $r = 1 - \sin\theta$ يمثل منحنى قلبي رأسه إلى الأسفل ومتناظر حول الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.



نقاط تقاطع المنحنى $r=1+\sin\theta$ مع المنحنى $r=1-\sin\theta$:

$$1+\sin\theta = 1-\sin\theta \implies 2\sin\theta = 0 \implies \sin\theta = 0 \implies \theta = 0\ ,\ \theta = \pi$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول الخط $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$A = 2\left(\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(1+\sin\theta)^2 - (1-\sin\theta)^2\right]\, d\theta\right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(1+2\sin\theta+\sin^2\theta\right) - \left(1-2\sin\theta+\sin^2\theta\right)\right]\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+2\sin\theta+\sin^2\theta-1+2\sin\theta-\sin^2\theta\right)\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin\theta\, d\theta = 4\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(0)\right] = 4(0+1) = 4$$