التحليل الحقيقي

أ.د. إبراهيم العليان

جامعة الملك سعود

المحتويات

نهاية الدالة

نهاية الدالة

تعريف

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ،و كانت $c \in \widehat{D}$. فإن للدالة f نهاية عند c وقيمتها L إذا كان

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 : \\ &x \in D,\ 0 < |x - c| < \delta \qquad \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

ونكتب

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

أو

$L \longrightarrow f(x)$ عندما $c \longrightarrow x$.

أمثلة

أثبت باستخدام التعريف

1

$$\lim_{x\to 3} 4x+1 = 13$$

أمثلة

أثبت باستخدام التعريف

1.

$$\lim_{x\to 3} 4x+1=13$$

2. إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\neq 3\\ 0 & x=3\end{cases}$$

فإن

$$\lim_{x\to 3} f(x)=9$$

أمثلة

أثبت باستخدام التعريف

1.

$$\lim_{x\to 3} 4x+1 = 13$$

2. إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 3 \\ 0 & x = 3 \end{cases}$$

فإن

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 9$$

3.

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}, \qquad\qquad c > 0$$

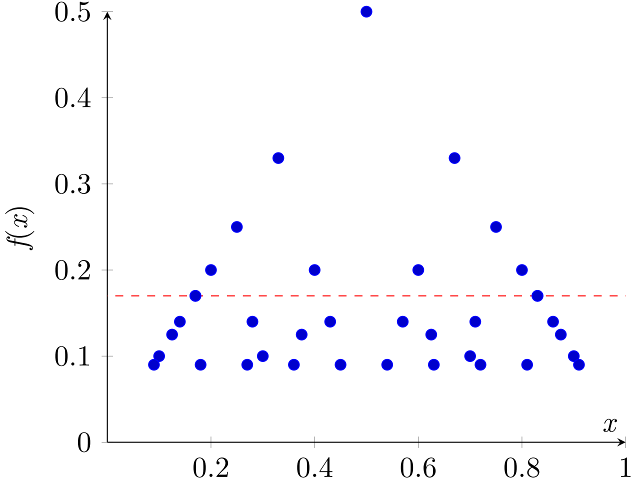
أمثلة

$$f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}^c \\ \dfrac{1}{q} & x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}, (p,q) = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0$$

أمثلة



ملاحظات

1. إذا كانت $\delta > 0$ تحقق المطلوب لجعل $|f(x) - L| < \varepsilon$ ، فإن كل $\delta' \in (0, \delta)$ تضمن تحقق ذلك.

ملاحظات

1. إذا كانت $\delta > 0$ تحقق المطلوب لجعل $|f(x) - L| < \varepsilon$ ، فإن كل $\delta' \in (0, \delta)$ تضمن تحقق ذلك.
2. لإثبات أن $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ، يكفي إثبات أن

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \; \delta > 0 : \quad x \in D, \\ 0 < |x - c| < \delta \qquad \Rightarrow |f(x) - L| < a\varepsilon$$

حيث $a > 0$ لا يعتمد على x ولا ε.

ملاحظات

1. باستخدام لغة الجوارات ، $\lim_{x\to c} f(x) = L$ تعني أنه لكل جوار V للنقطة L يوجد جوار U للنقطة c بحيث

$$x \in U \cap (D \setminus \{c\}) \Longrightarrow f(x) \in V$$

نهاية الدالة

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \\ &x \in D,\ 0 < |x - c| < \delta \qquad \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

ماذا يعني

$$\lim_{x \to c} f(x) \neq L$$

نهاية الدالة

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\ \delta > 0 : \\ &x \in D,\ 0 < |x - c| < \delta \qquad \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

ماذا يعني

$$\lim_{x\to c} f(x) \neq L$$

$$\begin{aligned} &\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall\ \delta > 0 : \\ &\exists x \in D,\ 0 < |x - c| < \delta \qquad \Rightarrow |f(x) - L| \geq \varepsilon \end{aligned}$$

مثال

أوجد

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$

المتتاليات ونهاية الدالة

المتتاليات ونهاية الدالة

نظرية

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ،و كانت $c \in \widehat{D}$. فإن التقريرين التاليين متكافآن

1. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$
2. لكل متتالية (x_n) في D تحقق $x_n \neq c$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $x_n \to c$ ، فإن المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة ونهايتها L.

نتيجة

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ،و كانت $c \in \widehat{D}$. ولنعرف

$$S := \{(x_n) \subset D : x_n \neq c, x_n \to c\}$$

1. إذا وجدت متتالية (x_n) في S بحيث $(f(x_n))$ غير متقاربة ، فإن $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ غير موجودة.
2. إذا وجدت متتاليتان (x_n) و (y_n) في S بحيث $\lim\limits_{x \to c} f(y_n) \neq \lim\limits_{x \to c} f(x_n)$ ، فإن $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ غير موجودة.

مثال

1

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

مثال

1 $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

2 $$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

مثال

1. $$\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

مثال

1.
$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$$

2.
$$\lim_{x\to c} f(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$$

نظرية

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ،و كانت $c \in \widehat{D}$. فإن التقريرين التاليين متكافآن

1. $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة.
2. لكل متتالية (x_n) في D تحقق $x_n \neq c$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $x_n \longrightarrow c$ ، فإن المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة.

نظرية

النظرية السابقة

1. $\lim_{x \to c} f(x) = L$
2. لكل متتالية (x_n) في D تحقق $x_n \neq c$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $x_n \to c$ ، فإن المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة ونهايتها L.

النظرية الحالية

1. $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة.
2. لكل متتالية (x_n) في D تحقق $x_n \neq c$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $x_n \longrightarrow c$ ، فإن المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة.

المبرهنات الأساسية

نظرية

لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ،و كانت $c \in \widehat{D}$. إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة فهي وحيدة.

f محدودة

نظرية

لتكن $\mathbb{R} \longrightarrow D : f$ ، $c \in \widehat{D}$. إذا كان للدالة f نهاية عند c فإن f محدودة في جوار c.
أي يوجد جوار U للنقطة c و $M > 0$ بحيث

$$|f(x)| \leq M \qquad \forall x \in U \cap D \backslash \{c\}$$

النهاية لا تساوي صفر

نظرية

لتكن $\mathbb{R} \longrightarrow D : f$ ، $c \in \widehat{D}$. إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = L$ حيث $L \neq 0$ ، فإنه يوجد جوار U للنقطة c و $M > 0$ بحيث

$$|f(x)| > M \qquad \forall x \in U \cap D \backslash \{c\}$$

العمليات على النهايات

نظرية

لتكن $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $c \in \widehat{D}$. إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ، $\lim_{x\to c} g(x) = K$ ، فإن

1. $\lim_{x\to c}[f(x) + g(x)] = L + K$
2. $\lim_{x\to c}[f(x) \cdot g(x)] = LK$ ، كما أن
   - $\lim_{x\to c}[f(x) - g(x)] = L - K$
   - $\lim_{x\to c} rf(x) = rL, \quad \forall r \in \mathbb{R}$
3. إذا كان $K \neq 0$ ، فإن $g(x) \neq 0$ لكل $x \neq c$ في جوار ما للنقطة c ، كما أن
   $$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$$

نظرية

نظرية

لتكن $\mathbb{R} \longrightarrow D : f, g$ ، $c \in \widehat{D}$. إذا كان لكل من f, g نهاية عند c ، وكان

$$f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in U \cap D \backslash \{c\}$$

فإن

$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x)$$

الحصر

نظرية

لتكن $f, g, h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ، $c \in \widehat{D}$. إذا كان هناك جوار U للنقطة c بحيث

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \forall x \in U \cap D \backslash \{c\}$$

وكان $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$ ، فإن $\lim_{x \to c} g(x) = L$

أمثلة

1. إذا كانت f كثيرة حدود، فإن $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ لكل $c \in \mathbb{R}$

أمثلة

1. إذا كانت f كثيرة حدود، فإن $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ لكل $c \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+2}{x+1}$

أمثلة

1. إذا كانت f كثيرة حدود، فإن $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ لكل $c \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2}{x+1}$
3. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$

أمثلة

1. إذا كانت f كثيرة حدود، فإن $f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$ لكل $c \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2}{x+1}$
3. $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-9}$
4. $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x}$

أمثلة

1. إذا كانت f كثيرة حدود، فإن $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ لكل $c \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+2}{x+1}$
3. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$
4. $\lim_{x\to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$
5. $\lim_{x\to 0} x^{3/2}, x > 0$

أمثلة

1. $\lim_{\theta \to 0} \sin \theta = 0$

أمثلة

1. $$\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$$
2. $$\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$$

أمثلة

1. $$\lim_{\theta \to 0} \sin \theta = 0$$
2. $$\lim_{\theta \to 0} \cos \theta = 1$$
3. $$\lim_{\theta \to \theta_0} \sin \theta = \sin \theta_0, \quad \lim_{\theta \to \theta_0} \cos \theta = \cos \theta_0$$

أمثلة

1. $$\lim_{\theta \to 0} \sin\theta = 0$$
2. $$\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = 1$$
3. $$\lim_{\theta \to \theta_0} \sin\theta = \sin\theta_0, \quad \lim_{\theta \to \theta_0} \cos\theta = \cos\theta_0$$
4. $$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

تمرين

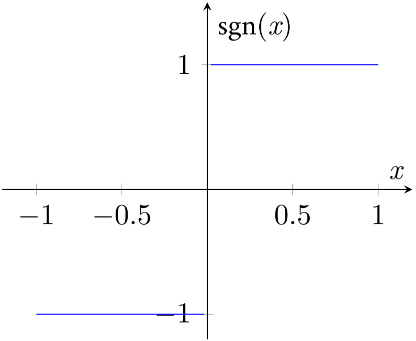
إذا كانت $f: D \to \mathbb{R}$ و $f(x) \geq 0$ لكل $x \in D$، وكانت $c \in \widehat{D}$ و $\lim_{x \to c} f(x) = L$،
فأثبت أن

$$\lim_{x \to c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$$

امتداد تعريف النهايات

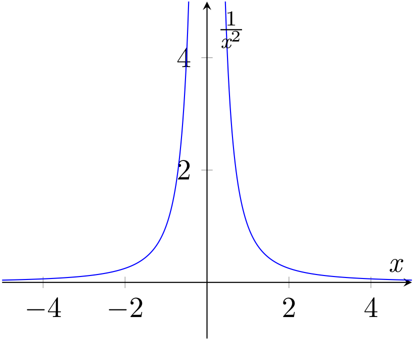
أمثلة

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$$



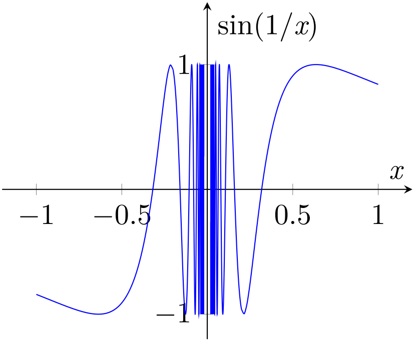
أمثلة

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$$



أمثلة

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$



النهاية اليمنى والنهاية اليسرى

تعريف

1 لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ولتكن c نقطة تراكم للمجموعة $D \cap (c, \infty)$. فإن النهاية اليمنى للدالة f عند c تساوي L إذا كان

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \quad & x \in D, \\ & 0 < x - c < \delta \qquad \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

ونكتب

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

النهاية اليمنى والنهاية اليسرى

تعريف

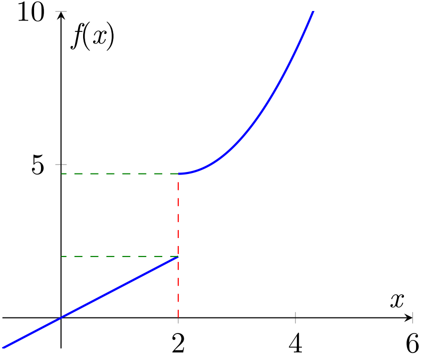
لتكن $\mathbb{R} \longrightarrow f : D$ ولتكن c نقطة تراكم للمجموعة $D \cap (-\infty, c)$. فإن النهاية اليسرى للدالة f عند c تساوي K إذا كان 1

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 : \quad & x \in D, \\ & 0 < c - x < \delta \qquad \Rightarrow |f(x) - K| < \varepsilon \end{aligned}$$

ونكتب

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = K$$

النهاية اليمنى والنهاية اليسرى



نظرية

نظرية

لتكن $\mathbb{R} \longrightarrow f : D$ ، $c \in \widehat{D}$ فإن

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

أمثلة

1

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} & x > 4 \\ 0 & x = 4 \\ 2x-4 & x < 4 \end{cases}$$

ما قيمة $\lim_{x \to 4} f(x)$ ؟

أمثلة

1

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} & x > 4 \\ 0 & x = 4 \\ 2x-4 & x < 4 \end{cases}$$

ما قيمة $\lim_{x\to 4} f(x)$ ؟

2

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

هل النهاية $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجودة؟

تعريف

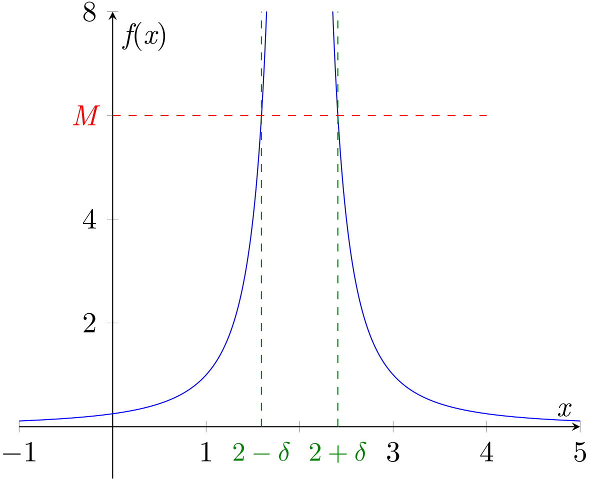
لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ و $c \in \widehat{D}$، نقول إن

1 $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ إذا كان

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists\, \delta > 0 : \quad x \in D, \quad 0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow f(x) > M$$

2 $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ إذا كان

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists\, \delta > 0 : \quad x \in D, \quad 0 < |x - c| < \delta \quad \Rightarrow f(x) < M$$


8
$f(x)$
M
4
2
x
-1
1
$2-\delta$
$2+\delta$
3
4
5

تعريف

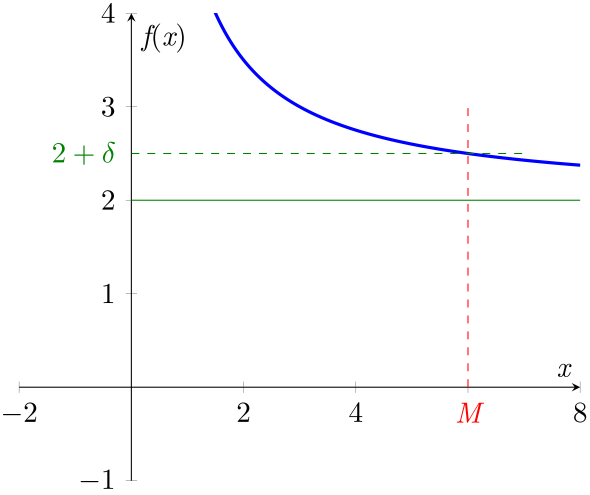
لتكن $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$

1. إذا كانت $D \supset (a, \infty)$ ، فإننا نقول إن $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\ M \in \mathbb{R} : \quad \begin{array}{ll} x \in D, & \\ x > M & \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{array}$$

2. إذا كانت $D \supset (-\infty, b)$ ، فإننا نقول إن $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\ M \in \mathbb{R} : \quad \begin{array}{ll} x \in D, & \\ x < M & \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{array}$$


4
$f(x)$
3
$2+\delta$
2
1
x
-2
2
4
M
8
-1

أمثلة

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

أمثلة

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$
2. $$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^2}$$

أمثلة

1. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$
2. $\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^2}$
3. $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$$

هل النهاية $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجودة؟