جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الإختبار النهائي 481 ريض الفصل الثاني 1445 هـ ثلاث ساعات

السؤال 1 :

لتكن $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ الدالة المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{if } 1 \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{if } x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

ولتكن الدالة $g(x) = f(x) + \sin(\frac{\pi}{2}x)$ لكل $x \in [0,1]$.

1. احسب $U(g)$ و $L(g)$.
2. هل الدالة g قابلة لتكامل ريمان؟
3. هل الدالة g قابلة لتكامل ليباق؟

السؤال 2 :

ادرس تقارب التكاملات المعتلة التالية

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx$

السؤال 3 :

لتكن متالية الدوال $(f_n)_n$ المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n + x^2}$ لكل $n \in \mathbb{N}$

1. اثبت المتباينة $\displaystyle\left| \sum_{k=n}^{m} \frac{(-1)^k}{k + x^2} \right| \leq \frac{1}{n + x^2}$ لكل $n \in \mathbb{N}$ و $x \in \mathbb{R}$
2. استنتج ما يلي:

(ا) المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$.

(ب) الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$، حيث $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

(ج) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

السؤال 4 :

لتكن متالية الدوال $(f_n)_n$ المعرفة على $[0,\infty)$ بما يلي: $f_n(x) = \dfrac{n^2 x}{1+n^2x^3}$ لكل $n \in \mathbb{N}$

1. اثبت أن المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة وأوجد نهايتها
2. أثبت أن المتتالية $(f_n)_n$ متقاربة بانتظام على $[1,\infty)$ ولكن ليست متقاربة بانتظام على الفترة $[0,1]$
3. اعط مبرهنة التقارب المطرد
4. أوجد $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \dfrac{n^2x}{1+n^2x^3} dx$

السؤال 5 :

1. اعط تعريف المجموعات القابلة للقياس بالنسبة للقياس الخارجي للباق m^*.
2. اثبت أنه إذا كان $m^*(E) = 0$، فإن E قابلة للقياس.
3. اثبت أن $m^*(E) = 0$ لكل مجموعة قابلة للعد E في $\mathbb{R}$.
4. استنتج أن $[0,1]$ غير قابل للعد.