Final exam MATH 201, Second semester 2024
Course Title: Differential and Integral Calculus
Date: Tuesday 20/11/1445---28/5/2024
Time: (13-16) pm, 3 Hours.

College of Science
Department of Mathematics
King Saud University

مع أطيب جائزة الفاضل

السؤال الأول (3+4):

أ) اختبر النهايتين التاليتين وأوجد قيمتهما إن وجدت:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \quad ، \quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x(y+z)}{x^2+y^2+z^2}.$$

ب) ادرس اتصال وقابلية التفاضل للدالة التالية عند النقطة $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4-2x^2y^2}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

السؤال الثاني (3+3+4):

أ) إذا كانت $z = f(x,y)$ حيث f دالة قابلة للتفاضل عند (x,y) و $x = s+t$ و $y = s-t$

برهن صحة المعادلة التالية: $\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$.

ب) أوجد القيم القصوى المحلية والنقاط السرجية إن وجدت للدالة التالية:

$$f(x,y) = y - x^2y - \frac{1}{3}y^3 + 8.$$

ج) احسب التكامل التالي: $\iiint_Q ze^{x^2+y^2}dV$ حيث Q هي المنطقة المغلقة والمحدودة بالسطحين التاليين:

$$z = 2\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{و} \quad z = 1.$$

السؤال الثالث (3+3+4):

أ) احسب حجم المجسم المحدود بالمستويات $x = 0$ ، $y = 0$ ، $z = 0$ و $3x + 2y + z = 6$.

ب) اعكس ترتيب التكامل التالي ثم احسب قيمته $\int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \sin(y^3)\, dydx$.

ج) استخدم الإحداثيات الكروية لحساب حسب التكامل التالي

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)^3 \, dz\, dy\, dx \ .$$

Final exam MATH 201, Second semester 2024
Course Title: Differential and Integral Calculus
Date: Tuesday 20/11/1445--28/5/2024
Time: (13-16) pm, 3 Hours.

College of Science
Department of Mathematics
King Saud University

السؤال الرابع (4+2+7):

أ) اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية وحدد نوعية التقارب:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{n^2+2} \text{ ، } \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+5}\right) \text{ ، } \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{2}{5^n}\right) \text{ ، } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{n3^{n+1}}.$$

ب) أوجد متسلسلة القوى في x للدالة $f(x)=\frac{1}{4+3x}$ عندما يكون $|x|<\frac{4}{3}$

ج) أوجد فترة ونصف قطر التقارب المتسلسلة التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n(x-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

مقرر (1-3) رمضان، الاختبار الثاني، الفصل الثاني عام 1440هـ

السؤال الأول:

(أ) 3

1) $0 \le \left|\frac{6x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}\right| = \left|\frac{6x^2y^2y}{(x^2+y^2)^2}\right| \le 6|y| \to 0$ ، $(x,y)\neq(0,0)$

$(x,y)\to(0,0)$ مقدار

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 6|y| = 0$ ①

حسب نظرية المحصورة لدينا

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = 0$

2) نأخذ المسار $x=y=z=t$ لدينا

$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x(y+z)}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2}{3t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

② وعلى المسار (المحور x) لدينا

$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x(y+z)}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2+0+0} = 0$

ومنه $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x(y+z)}{x^2+y^2+z^2}$ غير موجودة

(ب) 4

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4-2x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ; (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$0 \le |f(x,y)| = \left|\frac{y^2(y^2-2x^2)}{x^2+y^2}\right| \le |y^2-2x^2| \to 0$ ، $(x,y)\neq(0,0)$

$(x,y)\to(0,0)$

ومنه

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

وبالتالي f متصلة عند $(0,0)$ ①

لنبرر قابلية اشتقاق الدالة f عند $(0,0)$

① $\begin{cases} f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\frac{0}{h^2}}{h}\right) = 0 \\ f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} \\ \quad = \lim_{h\to 0} h = 0 \end{cases}$

$\Delta w = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0) = f(\Delta x, \Delta y)$

$\Delta w - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y = f(\Delta x, \Delta y)$

$$f(\Delta x,\Delta y)=\frac{(\Delta y)^4-2(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cdot\frac{\|h\|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

(2)

$$=\epsilon\|h\|$$

$$0\le|\epsilon|=\left|\frac{(\Delta y)^2\left((\Delta y)^2-2(\Delta x)^2\right)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|\le\frac{(\Delta y)^2+2(\Delta x)^2}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$\le|\Delta y|+|\Delta x|\to 0$$

عندما $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$

حيث $|\Delta x|\le\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ ، $|\Delta y|\le\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

$(\Delta x,\Delta y)\neq(0,0)$ عندما

ومنه

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\epsilon=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{(\Delta y)^4-2(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{\left((\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right)^{3/2}}=0$$

فإن الدالة f قابلة للتفاضل عند $(0,0)$

السؤال الثاني:

(10)

أ) $z=f(x,y)$ ،

3

$y=s-t$ ، $x=s+t$

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}}$$ ✓

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}}$$ ✓

ومنه ✓

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

ب) 3

$$f(x,y)=y-x^2y-\frac{1}{3}y^3+8$$

$$f_x=-2xy=0\,,\quad f_y=1-x^2-y^2=0$$

أما $x=0$ فإما $y=0$

فإذا كانت $x=0$ ، فإننا $y^2=1\Rightarrow y=\pm1$ ، فإننا نحصل على

$(0,1)$ ، $(0,-1)$ ✓ (1/2)

وأما $y=0$ ، فإننا $x^2=1$ ، فإننا نحصل على $x=\pm1$

$(1,0)$ ، $(-1,0)$ ✓ (1/2)

نشتق

$$f_{xx}=-2y\,,\quad f_{yy}=-2y\,,\quad f_{xy}=f_{yx}=-2x$$

لسنا داخل اختبار

$$g(x,y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 4y^2 - 4x^2$$ ✓

عند $(0,1)$

$$g(0,1) = 4 > 0, \quad f_{xx}(0,1) = -2 < 0$$

إذاً $f(0,1) = 1 - \frac{1}{3} + 8 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$ قيمة عظمى محلية (1/2)

عند $(0,-1)$

$$g(0,-1) = 4 > 0, \quad f_{xx}(0,-1) = 2 > 0$$

إذاً $f(0,-1) = -1 + \frac{1}{3} + 8 = 7 + \frac{1}{3} = \frac{22}{3}$ قيمة صغرى محلية (1/2)

عند $(1,0)$

$$g(1,0) = -4 < 0$$

إذاً $(1,0)$ نقطة سرج (1)

عند $(-1,0)$

$$g(-1,0) = -4 < 0$$

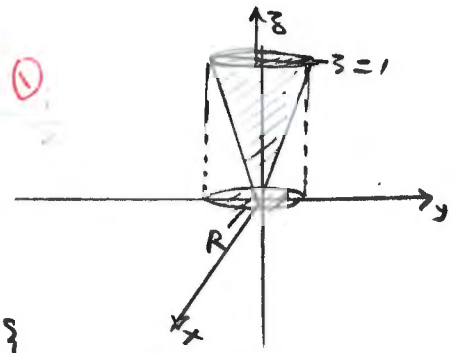
أيضاً $(-1,0)$ نقطة سرج

$$I = \iiint_Q 3e^{x^2+y^2}\,dV$$ (2) (4)

حيث Q منطقة مغلقة ومحدودة بالسطوح $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$, $z = 1$

$z = 1 = 2\sqrt{x^2+y^2}$ (1)

$\frac{1}{4} = x^2 + y^2$



لستخدم إحداثيات الأسطوانية

$$Q = \{(x,y,z) : 2\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1, \ (x,y) \in R\}, \quad R = \{(x,y) : x^2+y^2 \le \tfrac{1}{4}\}$$

$$; Q = \{(r,\theta,z) : 2r \le z \le 1, \ 0 \le r \le \tfrac{1}{2}, \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$$ (2)

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\int_{2r}^{1} 3e^{r^2} r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} r e^{r^2}\left[\frac{z^2}{2}\right]_{2r}^{1} dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} r(1-4r^2)e^{r^2}\,dr\,d\theta$$ (1) ✓

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} (1-4r^2)\, r e^{r^2}\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[(1-4r^2)\tfrac{1}{2} e^{r^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{2} e^{r^2}(-8r)\, dr \Big] d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left\{ \left[0 - \tfrac{1}{2}\right] + \int_0^{\frac{1}{2}} 4 r e^{r^2} dr \right\} d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(-\tfrac{1}{2} + 2\left[e^{r^2}\right]_0^{\frac{1}{2}}\right) d\theta = \frac{1}{2} 2\pi \left[\tfrac{-1}{2} + 2e^{1/4} - 2\right]$$

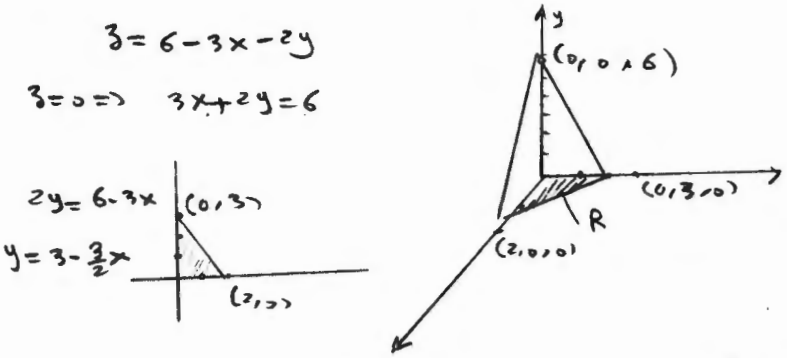
$$= \pi\left[\tfrac{-5}{2} + 2e^{1/4}\right] \approx \tfrac{\pi}{2}[-5 + 5.137]$$

$$= \tfrac{\pi}{2}[0.137]$$

---

(10) السؤال الثالث:

(P 3



$$Q = \{(x, y, z);\ 0 \le z \le 6 - 3x - 2y,\ 0 \le y \le 3 - \tfrac{3}{2}x,\ 0 \le x \le 2\}$$

(2) $$V = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \int_0^{6-3x-2y} dz\, dy\, dx = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} (6 - 3x - 2y)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^2 \left[(6-3x)y - y^2\right]_0^{3-\frac{3}{2}x} dx$$

(1) $$= \int_0^2 \left[(6-3x)\left(3 - \tfrac{3}{2}x\right) - \left(3 - \tfrac{3}{2}x\right)^2\right] dx$$

$$= \int_0^2 \left[\tfrac{1}{2}(6-3x)^2 - \tfrac{1}{4}(6-3x)^2\right] dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 (6-3x)^2 dx = \frac{1}{4}\left(\tfrac{-1}{9}\right)\left[(6-3x)^3\right]_0^2$$

$$= \tfrac{-1}{36}\left[0 - (6)^3\right] = \tfrac{+1}{36}(6)^3$$

$$= 6$$

---

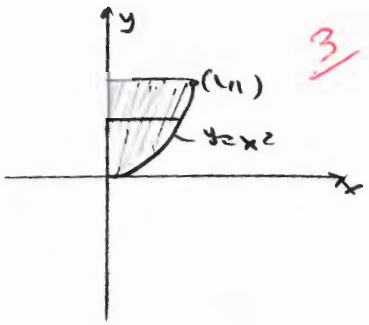
(2)

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^1 x^3 \sin(y^3)\, dy\, dx$$

$$= \iint_A x^3 \sin(y^3)\, dA,$$

$$A = \{ x^2 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le 1 \}$$

$$= \{ 0 \le x \le \sqrt{y} \quad 0 \le y \le 1 \}$$



3

② $$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x^3 \sin(y^3)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{y}} \sin(y^3)\, dy = \int_0^1 \frac{1}{4} y^2 \sin(y^3)\, dy$$

① $$= \frac{1}{12}\left[-\cos(y^3)\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{12}\left[-\cos(1)+1\right]}$$

---

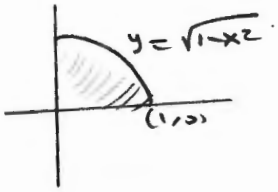
(2) 4

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2)^3\, dz\, dy\, dx$$

$$= \iiint_Q (x^2+y^2+z^2)^3\, dV$$

$$Q = \{ (x,y,z) ; \quad 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \quad 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \le x \le 1 \}$$

Q تمثل منطقة واقعة في الربع الأول، محدودة من الأعلى بالنصف العلوي لكرة الوحدة $x^2+y^2+z^2=1$



$$Q = \{ (\rho, \phi, \theta); \quad 0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \}$$ ②

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^6 \cdot \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$ ①

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^8 \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{9} \sin\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{\pi}{2}\right)\left[-\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{18}(1) = \boxed{\frac{\pi}{18}}$$ ①

السؤال الرابع: 13

أ) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^2+2}$ ، $a_n = \frac{2n+1}{n^2+2} \to 0$ عندما $n \to \infty$ 1

$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2}$ ، $f'(x) = \frac{2(x^2+2) - 2x(2x+1)}{(x^2+2)^2}$

$= \frac{4 - 2x^2 - 2x}{(x^2+2)^2} < 0$ ، إذا كان $2x(x+1) = 2x^2+2x > 4$ ، وهذا صحيح إذا كانت $x \geq 2$

$\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^2+2} = -1 + \sum_{2}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^2+2}$

متقارب — متقارب

① لذا وحسب اختبار المتسلسلة لينتج

$\sum_{1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n 2n+1}{n^2+1} \right| = \sum_{1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2} \sim \sum_{1}^{\infty} \frac{2}{n}$ ①

a_n ، b_n

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k = 1 > 0$

حسب اختبار المقارنة مع المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n (2n+1)}{n^2+2} \right|$ متباعدة

وبالتالي $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n+1}{n^2+2}$ متقارب بشرط طلاً

ب) $\sum_{1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+2}\right)$ ، $\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+2}\right) \to \ln\frac{1}{2} \neq 0$ ①

لذا المتسلسلة متباعدة

ج) $\sum_{1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{3}{n(n+1)}}_{a_n} + \underbrace{\frac{2}{5^n}}_{b_n} \right)$ ،

$\sum_{1}^{\infty} a_n \leq 3 \sum \frac{1}{n^2}$ ، $\sum_{1}^{\infty} b_n = 2 \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n$

متقارب ، $p = 2 > 1$ ① متقاربة ، هندسية

$|r| = \left|\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5} < 1$

إذاً المتسلسلة $\sum_{1}^{\infty} (a_n + b_n)$ متقاربة

د) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n\, 3^{n+1}}$ يجب تطبيق اكثر من اختبار.

$\sum_{1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{z^n}{n\, 3^{n+1}} \right| \leq \frac{1}{3} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ②

هندسية متقاربة ، إذاً المتسلسلة

$\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n\, 3^{n+1}}$ متقاربة مطلقاً

$$f(x)=\frac{1}{4+3x}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{3x}{4}\right)}$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n x^n}{4^n}\quad;\quad\left|\frac{3x}{4}\right|<1 \qquad 2$$

$$=\sum_{0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n x^n}{4^{n+1}}\quad;\quad |x|<\frac{4}{3}$$

ج) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n(x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ 4

نستخدم اختبار النسبة

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|(-1)^{n+1}|3^{n+1}|x-1|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{|(-1)^n|3^n|x-1|^n}{\sqrt{n}}}$$

$$=|x-1|\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}3=3|x-1|<1 \qquad (2)$$

$|x-1|<\frac{1}{3}$ المتسلسلة متقاربة مطلقاً لكل $x\in\mathbb{R}$ إذا تحققت

$r=\frac{1}{3}$ نصف قطر التقارب $\frac{1}{3}>|x-1|>-\frac{1}{3}$ أو $\frac{2}{3}<x<\frac{4}{3}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

$x\in\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$

عندما $x=\frac{2}{3}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ لدينا

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n\left(\frac{-1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\approx\sum\frac{1}{n^{1/2}}$$

متباعدة (مقارنة) $p=\frac{1}{2}<1$

عندما $x=\frac{4}{3}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$ لدينا:

$\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ متقاربة حسب اختبار المتناوبة

إذاً مجموعة التقارب هي $\boxed{I=\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$