جامعة الملك سعود		343 ريض (نظرية الزمر)
كلية العلوم		الفصل الدراسي الأول 1446
قسم الرياضيات	343ريض	الاختبار النهائي

السؤال الأول (2+2+ 2)

أ) أثبت أنه لأي زمرة G فان G ابدالية إذا وفقط اذا $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ لكل $a, b \in G$.

ب) لتكن G زمرة، $S = \{aba^{-1}b^{-1} : a, b \in G\}$. يعرف المبدل للمجموعة Gكالتالي: $C = span\ (S)$. أثبت أن G/C زمرة إبداليه.

ت) ليكن النظام $(G,*)$ معرف كالتالي : $G = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$ حيث $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$: أثبت أن هذا النظام تجميعي وإبدالي ثم أثبت أنه زمرة ابدالية.

السؤال الثاني (2+2)

أ) عرف الزمرة الزوجية من الدرجة $n \geq 3$ (Dihedral group of degree n) D_n ثم **أثبت أن** $\mathbf{D_n}$ **زمرة غير إبداليه.**

ب) اذا كانت G زمرة وكانت $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$ فاثبت انه اذا كان $HK \leq G$ فإن $HK \trianglelefteq G$.

السؤال الثالث (3+1 +1+1+1+1)

أ) ليكن $\varphi : G_1 \to G_2$ تشاكل. أثبت أنه اذا كانت $H \leq G_1$ فإن $\varphi(H) \leq G_2$.

ب) اثبت ان أي تشاكل زمر $\varphi : G \to G'$ بحيث ان $|G|$ اولي اما ان يكون تشاكلا تافها او داله احاديه.

ت) أثبت أن $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$ لا يمكن أن يكون صورة تشاكلية للزمرة $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$.

ث) عرف زمرة سيلو من النوع *p*.

ج) أعط مثال لزمرة G تحوي على زمرة سيلو جزئية من النوع 5.*(Sylow 5-Subgroup.)*

ح) أوجد جميع زمر سيلو الجزئية من S_3.

السؤال الرابع (2+1)

أ) أثبت أنه اذا كانت $K \triangleleft G$ فإنه يوجد تشاكل مجالة G و نواته K .

ب) اذا كانت G زمره غير ابداليه بحيث ان $|G| = pq$ حيث أن p, q عددين اوليين، فاثبت ان مركز الزمرة هو المركز التافه .

السؤال الخامس (2+1)

أ) عرف زمرة التماثلات الذاتية للزمرة G، $Aut(G)$.

ب) أثبت أن $Aut(S_3) = S_3$

سادس (2+3+1)

أ) متى نقول عن زمره G انها بسيطة.

ب) اذكر نص كلا من النظريات الاتيه:

1) مبرهنة كوشي.

2) مبرهنة لاجرانج

3) مبرهنة سيلو الأولى.

ت) برهن بالتفصيل انه لا توجد زمره بسيطة رتبتها 56.

السؤال السابع (10 درجات)

اثبت صحة او خطا كل من ما يلي:

1) اذا كانت G زمره منتهيه وكان $H \leq G$ بحيث ان H زمره وحيده من الرتبه m فان $H \trianglerighteq G$.
2) اذا كانت $(4\,,8\,,10\,) \in Z_{12} \times Z_{60} \times Z_{24}$ فان $|(4\,,8\,,10\,)| = 60$.
3) اذا كانت G زمره وكانت $H \leq G$ وكان $a \in G$ فان $aH \leq G$
4) إذا كانت G زمرة بحيث أن $|G| = n$ ، فإنه لأي عدد m يقسم n يوجد زمرة جزئية $H \leq G$ رتبتها $|H| = m$.
5) $B_n \leq S_n$, حيث B_n مجموعة التبديلات الفردية في S_n