linear programming

OPR213

طريقة السمبلكس المعدلة

Revised simplex method

(9)

2024

مثال :

لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$\begin{aligned}
&\max \quad z = x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 10 \\
&\qquad 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4 = 5 \\
&\qquad\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

أوجد جدول السمبلكس المرتبط بالحل الأساسي الممكن $\mathbf{x_B} = (x_1, x_2)$.

– الحل –

لدينا:

$$\mathbf{x_B} = (x_1, x_2) \quad , \quad \mathbf{c_B} = (1, 4)$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c_B B^{-1} A - c} = (1, 4)\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} - (1,4,7,5) = (0,0,1,-3)$$

$$\mathbf{B^{-1} A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B^{-1} b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c_B B^{-1} b} = (1, 4)\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 19$$

بالتعويض في الجدول التالي:

BV	z	$\mathbf{x}$	RHS
z	1	$\mathbf{c_B B^{-1} A - c}$	$\mathbf{c_B B^{-1} b}$
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{B^{-1} A}$	$\mathbf{B^{-1} b}$

نحصل على:

BV	z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
z	1	0	0	1	-3	19
x_1	0	1	0	0	2	3
x_2	0	0	1	2	0	4

مثال:

لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$\begin{aligned}
&\max \quad z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3\\
&\text{s.t.}\\
&\qquad 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2\\
&\qquad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 4\\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

أوجد جدول السمبلكس المرتبط بالحل الأساسي الممكن $\mathbf{x_B} = (x_1, x_5)$.

– الحل –

لدينا:

$$\mathbf{x_B} = (x_1, x_5) \qquad , \qquad \mathbf{c_B} = (3, 0)$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad , \qquad \mathbf{B^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c_B B^{-1} A - c} = (3, 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (3,2,-2,0,0) = (0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0)$$

$$\mathbf{B^{-1} A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B^{-1} b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c_B B^{-1} b} = (3, 0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 3$$

بالتعويض في الجدول التالي:

BV	z	$\mathbf{x}$	RHS
z	1	$\mathbf{c_B B^{-1} A - c}$	$\mathbf{c_B B^{-1} b}$
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{B^{-1} A}$	$\mathbf{B^{-1} b}$

نحصل على:

BV	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	3
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1
x_5	0	0	0	3	-1	1	2

<u>مثال:</u>

لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$\begin{aligned}
&\max \quad z = -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\
&\qquad 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\
&\qquad x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 \ge 0
\end{aligned}$$

أوجد جدول السمبلكس المرتبط بالحل الأساسي الممكن $\mathbf{x_B} = (x_2 , x_3)$.

– الحل –

لدينا:

$$\mathbf{x_B} = (x_2 , x_3) \quad , \quad \mathbf{c_B} = (3 , 2)$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c_B B^{-1} A - c} = (3 , 2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (-2,3,2,0,0) = (3,0,0,1,1)$$

$$\mathbf{B^{-1} A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B^{-1} b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c_B B^{-1} b} = (3 , 2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 5$$

بالتعويض في الجدول التالي:

BV	z	$\mathbf{x}$	RHS
z	1	$\mathbf{c_B B^{-1} A - c}$	$\mathbf{c_B B^{-1} b}$
$\mathbf{x_B}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{B^{-1} A}$	$\mathbf{B^{-1} b}$

نحصل على:

BV	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	3	0	0	1	1	5
x_2	0	−3	1	0	1	−1	1
x_3	0	5	0	1	−1	2	1

مثال:

لدينا جدول السمبلكس التالي:

BV	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	3
x_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	1
x_5	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	2

المتغيران x_4 , x_5 هما متغيران مكملان.

أوجد البرنامج الخطي الأصلي.

– الحل –

لدينا:

$$\mathbf{x_B} = (x_3 , x_5) \quad , \quad \mathbf{c_B} = (c_3 , c_5)$$

$$\mathbf{B^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5) = (\mathbf{B^{-1}})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{B^{-1}A}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}(\mathbf{B^{-1}b}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c_B B^{-1} N - c_N} = (c_3\,,0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - (c_1, c_2, 0) = (-\tfrac{1}{2}\,,\tfrac{5}{2}\,,\tfrac{3}{2})$$

$$\mathbf{c_B B^{-1} N - c_N} = \left(\tfrac{1}{2}c_3 - c_1\,,\tfrac{1}{2}c_3 - c_2\,\,,\tfrac{1}{2}c_3\right) = (-\tfrac{1}{2}\,,\tfrac{5}{2}\,,\tfrac{3}{2})$$

لدينا:

$$\tfrac{1}{2}c_3 = \tfrac{3}{2} \;\Rightarrow\; c_3 = 3$$

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{1}{2}c_3 - c_1 &= -\tfrac{1}{2} \\ \tfrac{1}{2}c_3 - c_2 &= \tfrac{5}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad c_1 = 2\;,\;\; c_2 = -1$$

نحصل على البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} &\max \quad z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ &\text{s.t.} \\ &\qquad x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ &\qquad x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 3 \\ &\qquad\quad x_1\,, x_2\,, x_3, x_4\,, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

مثال :

لدينا جدول السمبلكس الأمثل التالي:

BV	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	13	0	0	3	4	22
x_2	0	3	1	0	1	1	6
x_3	0	5	0	1	1	2	10

المتغيران x_4 , x_5 هما متغيران مكملان.

أوجد البرنامج الخطي الأصلي.

– الحل –

لدينا:

$$\mathbf{x_B} = (x_2 , x_3) \qquad , \qquad \mathbf{c_B} = (c_2 , c_3)$$

$$\mathbf{B^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = (\mathbf{B^{-1}})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{B^{-1}A}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}(\mathbf{B^{-1}b}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c_B B^{-1} N - c_N} = (c_2\,, c_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (c_1, 0{,}0) = (13\,, 3\,, 4)$$

$$\mathbf{c_B B^{-1} N - c_N} = (3c_2 + 5c_3 - c_1, c_2 + c_3\,, c_2 + 2c_3) = (13\,, 3\,, 4)$$

لدينا:

$$\left.\begin{aligned} c_2 + \quad c_3 &= 3 \\ c_2 + 2c_3 &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad c_2 = 2\ ,\ \ c_3 = 1$$

وأيضا:

$$3c_2 + 5c_3 - c_1 = 13$$
$$11 - c_1 = 13$$
$$c_1 = -2$$

نحصل على البرنامج الخطي التالي:

$$\max \quad z = -2x_1 + 2x_2 + x_3$$
s.t.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \quad\quad &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \quad\quad + x_5 &= 4 \\ x_1\,, x_2\,, x_3, x_4\,, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

مثال:

لدينا جدول السمبلكس الأمثل التالي:

BV	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
z	1	0	3	0	0	1	4
x_1	0	1	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
x_3	0	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

المتغيران x_4 , x_5 هما متغيران مكملان.

أوجد البرنامج الخطي الأصلي.

– الحل –

لدينا:

$$\mathbf{x_B} = (x_1 , x_3) \quad , \quad \mathbf{c_B} = (c_1 , c_3)$$

$$\mathbf{B^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) = (\mathbf{B^{-1}})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}(\mathbf{B^{-1}A}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}(\mathbf{B^{-1}b}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{c_B B^{-1} N - c_N} = (c_1\,,c_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (c_2, 0, 0) = (3\,,0\,,1)$$

$$\mathbf{c_B B^{-1} N - c_N} = \left(c_1 - c_2\,, \frac{1}{4}c_1 - \frac{1}{2}c_3\;, \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{2}c_3\right) = (3\,,0\,,1)$$

لدينا:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4}c_1 - \frac{1}{2}c_3 &= 0 \\ \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{2}c_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad c_1 = 2\;,\;\; c_3 = 1$$

وأيضا:

$$c_1 - c_2 = 3$$
$$2 - c_2 = 3$$
$$c_2 = -1$$

نحصل على البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} &\max \quad z = 2x_1 - x_2 + x_3 \\ &\text{s.t.} \\ &\qquad 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ &\qquad 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 4 \\ &\qquad\quad x_1\,, x_2\,, x_3, x_4\,, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

مثال :

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة السمبلكس المعدلة:

$$\begin{aligned} &\max \quad z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ &\text{s.t.} \\ &\qquad 2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 5 \\ &\qquad x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 2 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

– الحل –

نحول إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} &\max \quad z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\ &\text{s.t.} \\ &\qquad 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ &\qquad x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

التكرار الأول:

لدينا:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x_B} = (x_4, x_5) = (5, 2) \quad , \quad \mathbf{x_N} = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$$

$$\mathbf{c_B} = (0, 0) \quad , \quad \mathbf{c_N} = (2, -2, 3)$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

نختبر الأمثلية كما يلي:

$$\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{N}} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_{\mathbf{N}} = (0\,,0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix} - (2\,,-2\,,3\,) = (-2\,,2\,,-3\,)$$

المتغير الغير أساسي الداخل ليصبح أساسي هو x_3 .

لدينا:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix}5\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$$

نحسب اختبار النسبة الصغرى كما يلي:

$$\frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3)_i} = \left\{\frac{5}{2}\;,\frac{2}{2}\right\}$$

المتغير الأساسي الخارج ليصبح غير أساسي هو x_5 .

نحدث الحل الأساسي الممكن ومصفوفة الحل الأساسي الممكن كما يلي:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}} = (x_4\,,x_3) \quad , \quad \mathbf{x}_{\mathbf{N}} = (x_1\,,x_2,x_5)$$

$$\mathbf{c}_{\mathbf{B}} = (0\,,3) \quad , \quad \mathbf{c}_{\mathbf{N}} = (2\,,-2\;,\;0)$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

التكرار الثاني:

نختبر الأمثلية كما يلي:

$$\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{N}} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_{\mathbf{N}} = (0\,,3)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - (2\,,-2\,,0) = \left(-\frac{1}{2}\,,5\,,\frac{3}{2}\right)$$

المتغير الغير أساسي الداخل ليصبح أساسي هو x_1 .
لدينا:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

نحسب اختبار النسبة الصغرى كما يلي:

$$\frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3)_i} = \left\{\frac{3}{1}\ ,\ \frac{1}{1/2}\right\}$$

المتغير الأساسي الخارج ليصبح غير أساسي هو x_3 .

نحدث الحل الأساسي ومصفوفة الحل الأساسي كما يلي:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}} = (x_4\,,x_1) \qquad , \qquad \mathbf{x}_{\mathbf{N}} = (x_3\,,x_2,x_5)$$

$$\mathbf{c}_{\mathbf{B}} = (0\,,2) \qquad , \qquad \mathbf{c}_{\mathbf{N}} = (3\,,-2\ ,\ 0)$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad , \qquad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

التكرار الثالث:

نختبر الأمثلية كما يلي:

$$\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{N}} = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c_N} = (0\,,2)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} - (3\,,-2\,,0) = (1\,,6\,,2\,)$$

حيث أن $\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{N}} \geq 0$ ، نتوقف.

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = (0\,,2)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4$$

الحل الأمثل:

$$x_1^* = 2 \;\;,\;\; x_2^* = 0 \;\;,\;\; x_3^* = 0 \;\;,\quad x_4^* = 1 \;\;,\quad x_5^* = 0 \;\;,\qquad z^* = 4$$

مثال :

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة السمبلكس المعدلة:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 1 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ & x_1 , x_2 , x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

– الحل –

نحول إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ & x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1 , x_2 , x_3, x_4 , x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

التكرار الأول:

لدينا:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x_B} = (x_4 , x_5) = (1 , 2) \quad , \quad \mathbf{x_N} = (x_1 , x_2, x_3) = (0 , 0 , 0)$$

$$\mathbf{c_B} = (0 , 0) \quad , \quad \mathbf{c_N} = (1 , -2 \ , \ 2)$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

نختبر الأمثلية كما يلي:

$$\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{N}} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_{\mathbf{N}} = (0\,,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} - (1\,,-2\,,2\,) = (-1\,,2\,,-2\,)$$

المتغير الغير أساسي الداخل ليصبح أساسي هو x_3 .
لدينا:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

نحسب اختبار النسبة الصغرى كما يلي:

$$\frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3)_i} = \left\{ \frac{1}{2}\ ,\ - \right\}$$

المتغير الأساسي الخارج ليصبح غير أساسي هو x_4 .

نحدث الحل الأساسي الممكن ومصفوفة الحل الأساسي الممكن كما يلي:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}} = (x_3\,,x_5) \qquad , \qquad \mathbf{x}_{\mathbf{N}} = (x_1\,,x_2,x_4)$$

$$\mathbf{c}_{\mathbf{B}} = (2\,,0) \qquad , \qquad \mathbf{c}_{\mathbf{N}} = (1\,,-2\ ,\ 0)$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{a}_4,\mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad , \qquad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

التكرار الثاني:

نختبر الأمثلية كما يلي:

$$\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{N}} = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c_N} = (2\,,0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - (1\,,-2\,,0) = (-2\,,4\,,1\,)$$

المتغير الغير أساسي الداخل ليصبح أساسي هو x_1 .
لدينا:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

نحسب اختبار النسبة الصغرى كما يلي:

$$\frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1)_i} = \left\{ - \;,\; \frac{5/2}{1/2} \right\}$$

المتغير الأساسي الخارج ليصبح غير أساسي هو x_5 .

نحدث الحل الأساسي ومصفوفة الحل الأساسي كما يلي:

$$\mathbf{x_B} = (x_3\,,x_1) \qquad , \qquad \mathbf{x_N} = (x_5\,,x_2,x_4)$$

$$\mathbf{c_B} = (2\,,1) \qquad , \qquad \mathbf{c_N} = (0\,,-2\;,\;0)$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad , \qquad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

التكرار الثالث:

نختبر الأمثلية كما يلي:

$$\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{N}}=\mathbf{c}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}-\mathbf{c}_{\mathbf{N}}=(2\,,1)\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&1\\1&1&0\end{pmatrix}-(0\,,-2\,,0)=(4\,,12\,,3\,)$$

حيث أن $\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{N}}\geq 0$ ، نتوقف.

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$$

$$z=\mathbf{c}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}=(2\,,1)\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=11$$

الحل الأمثل:

$$x_1^*=5\ \ ,\ \ x_2^*=0\ \ ,\ \ x_3^*=3\ \ ,\quad x_4^*=0\ \ ,\ \ x_5^*=0\ \ ,\qquad z^*=11$$

مثال :

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي باستخدام طريقة السمبلكس المعدلة:

$$\max \quad z = -2x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

– الحل –

نحول إلى الشكل القياسي:

$$\max \quad z = -2x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \quad &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \quad + x_5 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

التكرار الأول:

لدينا:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x_B} = (x_4, x_5) = (3, 2) \quad , \quad \mathbf{x_N} = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$$

$$\mathbf{c_B} = (0, 0) \quad , \quad \mathbf{c_N} = (-2, 3, 2)$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

نختبر الأمثلية كما يلي:

$$\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{N}} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_{\mathbf{N}} = (0\,,0)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} - (-2\,,3\,,2\,) = (2\,,-3\,,-2\,)$$

المتغير الغير أساسي الداخل ليصبح أساسي هو x_2 .
لدينا:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix}3\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

نحسب اختبار النسبة الصغرى كما يلي:

$$\frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2)_i} = \left\{\frac{3}{2}\ ,\frac{2}{1}\right\}$$

المتغير الأساسي الخارج ليصبح غير أساسي هو x_4 .

نحدث الحل الأساسي الممكن ومصفوفة الحل الأساسي الممكن كما يلي:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}} = (x_2\,,x_5) \qquad , \qquad \mathbf{x}_{\mathbf{N}} = (x_1\,,x_4,x_3)$$

$$\mathbf{c}_{\mathbf{B}} = (3\,,0) \qquad , \qquad \mathbf{c}_{\mathbf{N}} = (-2\,,0\,,2)$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_5) = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix} \qquad , \qquad \mathbf{N} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-\mathbf{1}} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

التكرار الثاني:

نختبر الأمثلية كما يلي:

$$\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{N}} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_{\mathbf{N}} = (3\,,0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (-2\,,0\,,2) = \left(\tfrac{1}{2}\,,\tfrac{3}{2}\,,-\tfrac{1}{2}\right)$$

المتغير الغير أساسي الداخل ليصبح أساسي هو x_3 .
لدينا:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

نحسب اختبار النسبة الصغرى كما يلي:

$$\frac{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b})_i}{(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3)_i} = \left\{\frac{3/2}{1/2}\,,\,\frac{1/2}{1/2}\right\}$$

المتغير الأساسي الخارج ليصبح غير أساسي هو x_5 .

نحدث الحل الأساسي ومصفوفة الحل الأساسي كما يلي:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}} = (x_2\,,x_3) \qquad , \qquad \mathbf{x}_{\mathbf{N}} = (x_1\,,x_4,x_5)$$

$$\mathbf{c}_{\mathbf{B}} = (3\,,2) \qquad , \qquad \mathbf{c}_{\mathbf{N}} = (-2\,,0\,,\ 0)$$

$$\mathbf{B} = (\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad , \qquad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

التكرار الثالث:

نختبر الأمثلية كما يلي:

$$\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{N}} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} - \mathbf{c}_{\mathbf{N}} = (3\,,2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - (-2\,,0\,,0) = (3\,,1\,,1\,)$$

حيث أن $\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{N}} \geq 0$ ، نتوقف.

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$z = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = (3\,,2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

الحل الأمثل:

$$x_1^* = 0 \;\;,\;\; x_2^* = 1 \;\;,\;\; x_3^* = 1 \;\;,\;\;\; x_4^* = 0 \;\;,\;\;\; x_5^* = 0 \;\;,\;\;\;\; z^* = 5$$