linear programming
OPR213

النظرية الثنائية
Duality Theory
(7)

2024

<u>مثال:</u>

لدينا البرنامج الخطي الأولي التالي:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\
&\qquad -x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\
&\qquad 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 2 \\
&\qquad x_1 \text{ unrestricted} \\
&\qquad x_2 \le 0 \\
&\qquad x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

أوجد البرنامج الخطي الثنائي.

– الحل –

البرنامج الخطي الثنائي:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad w = 3y_1 + 5y_2 + 2y_3 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad y_1 - y_2 + 2y_3 = 2 \\
&\qquad 2y_1 + y_2 + 2y_3 \ge -1 \\
&\qquad -2y_1 + y_2 + 2y_3 \le 3 \\
&\qquad y_1 \text{ unrestricted} \\
&\qquad y_2 \le 0 \\
&\qquad y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

مثال:

لدينا البرنامج الخطي الأولي التالي:

$$
\begin{aligned}
&\max\ z = 3x_1 + x_2 - 2x_3\\
&\text{s.t.}\\
&\quad x_1 + 3x_2 - 2x_3 \geq 2\\
&\quad -x_1 + x_2 + x_3 = 4\\
&\quad 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 3\\
&\quad x_1 \geq 0\\
&\quad x_2 \text{ unrestricted}\\
&\quad x_3 \leq 0
\end{aligned}
$$

أوجد البرنامج الخطي الثنائي.

– الحل –

البرنامج الخطي الثنائي:

$$
\begin{aligned}
&\min\ w = 2y_1 + 4y_2 + 3y_3\\
&\text{s.t.}\\
&\quad y_1 - y_2 + 4y_3 \geq 3\\
&\quad 3y_1 + y_2 + 2y_3 = 1\\
&\quad -2y_1 + y_2 + 3y_3 \leq -2\\
&\quad y_1 \leq 0\\
&\quad y_2 \text{ unrestricted}\\
&\quad y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

مثال:

لدينا البرنامج الخطي الأولي التالي:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 2 \\
&\qquad x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\
&\qquad 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 3 \\
&\qquad\quad x_1 \geq 0 \\
&\qquad\quad x_2 \text{ unrestricted} \\
&\qquad\quad x_3 \leq 0
\end{aligned}
$$

أوجد البرنامج الخطي الثنائي.

– الحل –

البرنامج الخطي الثنائي:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad w = 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad y_1 + y_2 + 5y_3 \leq 3 \\
&\qquad 3y_1 + y_2 + 4y_3 = 1 \\
&\qquad 2y_1 - y_2 + 3y_3 \geq -2 \\
&\qquad\quad y_1 \geq 0 \\
&\qquad\quad y_2 \text{ unrestricted} \\
&\qquad\quad y_3 \leq 0
\end{aligned}
$$

<u>مثال:</u>

لدينا البرنامج الخطي الأولي التالي:

$$\begin{aligned}
&\max\ z = 5x_1 - x_2 + 3x_3 \\
&\text{s.t.} \\
&\quad x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 3 \\
&\quad -x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\
&\quad 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \\
&\quad x_1 \text{ unrestricted} \\
&\quad x_2 \leq 0 \\
&\quad x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

أوجد البرنامج الخطي الثنائي.

– الحل –

البرنامج الخطي الثنائي:

$$\begin{aligned}
&\min\ w = 3y_1 + 2y_2 + 4y_3 \\
&\text{s.t.} \\
&\quad y_1 - y_2 + 2y_3 = 5 \\
&\quad -2y_1 + y_2 + 3y_3 \leq -1 \\
&\quad 3y_1 + y_2 - 2y_3 \geq 3 \\
&\quad y_1 \geq 0 \\
&\quad y_2 \leq 0 \\
&\quad y_3 \text{ unrestricted}
\end{aligned}$$

مثال:

إذا كان لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 \geq 4 \\ & -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 4x_5 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

والبرنامج الثنائي له كما يلي:

$$\begin{aligned} \max \quad & w = 4y_1 + 4y_2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2y_1 - y_2 \leq 2 \\ & 2y_1 + 3y_2 \leq 1 \\ & 2y_1 + 5y_2 \leq 1 \\ & 3y_1 + 2y_2 \leq 3 \\ & 4y_1 + 4y_2 \leq 3 \\ & y_1 \geq 0 \;,\; y_2 \leq 0 \end{aligned}$$

لو علمنا أن الحل الأمثل للبرنامج الخطي الثنائي هو:

$$y_1^* = \frac{7}{8}$$

$$y_2^* = -\frac{1}{4}$$

$$w^* = 2.5$$

استخدم نظريات العلاقة بين البرنامجين الأولي والثنائي لمعرفة الحل الأمثل وأسعار الظل للبرنامج الخطي الأولي؟

– الحل –

نعلم أن:

$$z^* = w^* = 2.5$$

بالتعويض بقيم y_1^* و y_2^* في قيود البرنامج الثنائي سنجد أن:

$$2\left(\frac{7}{8}\right) - \ \left(-\frac{1}{4}\right) = 2$$

$$2\left(\frac{7}{8}\right) + 3\left(-\frac{1}{4}\right) = 1$$

$$2\left(\frac{7}{8}\right) + 5\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \ < 1 \quad \Rightarrow \quad s_3^* \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_3^* = 0$$

$$3\left(\frac{7}{8}\right) + 2\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{17}{8} < 3 \quad \Rightarrow \quad s_4^* \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_4^* = 0$$

$$4\left(\frac{7}{8}\right) + 4\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{2} \ < 3 \quad \Rightarrow \quad s_5^* \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_5^* = 0$$

وحيث أن $y_1^* \neq 0$ و $y_2^* \neq 0$ ، فإنه في البرنامج الخطي الأولي سيكون :

$$e_1^* = s_2^* = 0$$

إذا يصبح لدينا:

$$\begin{aligned} 2x_1^* + 2x_2^* &= 4 \\ -x_1^* + 3x_2^* &= 4 \end{aligned}$$

بحل هاتين المعادلتين، نحصل على:

$$x_1^* = \frac{1}{2}$$

$$x_2^* = \frac{3}{2}$$

أسعار الظل للقيود في البرنامج الخطي الأولي:

$$y_1^* = \frac{7}{8} \qquad , \qquad y_2^* = -\frac{1}{4}$$

مثال:

إذا كان لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 3x_1 + 2x_2 - \; x_3 + 4x_4 + 4x_5 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 4x_5 \geq 1 \\
&\qquad 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 \leq 3 \\
&\qquad\qquad x_1, x_2 \leq 0 \\
&\qquad\qquad x_3 \text{ unrestricted} \\
&\qquad\qquad x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

والبرنامج الثنائي له كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad w = \; y_1 + 3y_2 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad 4y_1 + 2y_2 \leq 3 \\
&\qquad 4y_1 + 3y_2 \leq 2 \\
&\qquad 4y_1 + 2y_2 = -1 \qquad (-4y_1 - 2y_2 = 1) \\
&\qquad 2y_1 + 4y_2 \geq 4 \\
&\qquad 4y_1 + 4y_2 \geq 4 \\
&\qquad y_1 \leq 0 \;, \;\; y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

لو علمنا أن الحل الأمثل للبرنامج الخطي الثنائي هو:

$$y_1^* = -1.5$$

$$y_2^* = 2.5$$

$$w^* = 6$$

استخدم نظريات العلاقة بين البرنامجين الأولي والثنائي لمعرفة الحل الأمثل وأسعار الظل للبرنامج الخطي الأولي؟

– الحل –

نعلم أن:

$$z^* = w^* = 6$$

بالتعويض بقيم y_1^* **و** y_2^* **في قيود البرنامج الثنائي سنجد أن:**

$$\begin{aligned}
4(-1.5) + 2(2.5) &= -1 < 3 &&\Rightarrow\ s_1^* \neq 0 &&\Rightarrow\ x_1^* = 0\\
4(-1.5) + 3(2.5) &= 1.5 < 2 &&\Rightarrow\ s_2^* \neq 0 &&\Rightarrow\ x_2^* = 0\\
-4(-1.5) - 2(2.5) &= 1 &&&&\\
2(-1.5) + 4(2.5) &= 7 > 4 &&\Rightarrow\ e_4^* \neq 0 &&\Rightarrow\ x_4^* = 0\\
4(-1.5) + 4(2.5) &= 4 &&&&
\end{aligned}$$

وحيث أن $y_1^* \neq 0$ **و** $y_2^* \neq 0$ **، فإنه في البرنامج الخطي الأولي سيكون :**

$$e_1^* = s_2^* = 0$$

إذا يصبح لدينا:

$$\begin{aligned}
4x_3^* + 4x_5^* &= 1\\
2x_3^* + 4x_5^* &= 3
\end{aligned}$$

بحل هاتين المعادلتين، نحصل على:

$$x_3^* = -1$$

$$x_5^* = 1.25$$

أسعار الظل للقيود في البرنامج الخطي الأولي:

$$y_1^* = -1.5 \quad , \quad y_2^* = 2.5$$

مثال:

إذا كان لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 4x_5 - 2x_6 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 3x_6 \le 5 \\
&\qquad -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 2x_5 + 4x_6 \ge 2 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0
\end{aligned}
$$

والبرنامج الثنائي له كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad w = 5y_1 + 2y_2 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad 4y_1 - 2y_2 \ge 4 \\
&\qquad 2y_1 + 2y_2 \ge 2 \\
&\qquad 4y_1 + 3y_2 \ge 3 \\
&\qquad 3y_1 - 2y_2 \ge 5 \\
&\qquad 4y_1 + 2y_2 \ge 4 \\
&\qquad 3y_1 + 4y_2 \ge -2 \qquad\qquad (-3y_1 - 4y_2 \le 2) \\
&\qquad y_1 \ge 0 \ , \quad y_2 \le 0
\end{aligned}
$$

لو علمنا أن الحل الأمثل للبرنامج الخطي الثنائي هو:

$$y_1^* = \frac{7}{5}$$

$$y_2^* = -\frac{2}{5}$$

$$w^* = 6.2$$

استخدم نظريات العلاقة بين البرنامجين الأولي والثنائي لمعرفة الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي؟

– الحل –

نعلم أن:

$$z^* = w^* = 6.2$$

بالتعويض بقيم y_1^* و y_2^* في قيود البرنامج الثنائي سنجد أن:

$$\begin{aligned}
4\left(\frac{7}{5}\right) - 2\left(-\frac{2}{5}\right) &= 6.4 > 4 \quad \Rightarrow \quad e_1^* \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_1^* = 0 \\
2\left(\frac{7}{5}\right) + 2\left(-\frac{2}{5}\right) &= 2 \\
4\left(\frac{7}{5}\right) + 3\left(-\frac{2}{5}\right) &= 4.4 > 3 \quad \Rightarrow \quad e_3^* \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_3^* = 0 \\
3\left(\frac{7}{5}\right) - 2\left(-\frac{2}{5}\right) &= 5 \\
4\left(\frac{7}{5}\right) + 2\left(-\frac{2}{5}\right) &= 4.8 > 4 \quad \Rightarrow \quad e_5^* \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_5^* = 0 \\
-3\left(\frac{7}{5}\right) - 4\left(-\frac{2}{5}\right) &= -2.6 < 2 \quad \Rightarrow \quad s_6^* \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_6^* = 0
\end{aligned}$$

وحيث أن $y_1^* \neq 0$ و $y_2^* \neq 0$ ، فإنه في البرنامج الخطي الأولي سيكون :

$$s_1^* = e_2^* = 0$$

إذا يصبح لدينا:

$$\begin{aligned}
2x_2^* + 3x_4^* &= 5 \\
2x_2^* - 2x_4^* &= 2
\end{aligned}$$

بحل هاتين المعادلتين، نحصل على:

$$x_2^* = \frac{8}{5}$$

$$x_4^* = \frac{3}{5}$$

مثال:

إذا كان لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 2x_6 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad 4x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 + 2x_6 \leq 4 \\
&\qquad 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 4x_6 \geq 2 \\
&\qquad\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\
&\qquad\qquad x_5 \leq 0 \\
&\qquad\qquad x_6 \text{ unrestricted}
\end{aligned}
$$

والبرنامج الثنائي له كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad w = 4y_1 + 2y_2 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad 4y_1 + 2y_2 \leq 3 \\
&\qquad y_1 - 2y_2 \leq 2 \\
&\qquad 3y_1 + 4y_2 \leq -2 \qquad\qquad (-3y_1 - 4y_2 \geq 2) \\
&\qquad 2y_1 + 4y_2 \leq 4 \\
&\qquad -2y_1 + 4y_2 \geq 4 \\
&\qquad 2y_1 + 4y_2 = 2 \\
&\qquad y_1 \leq 0 \ , \ \ y_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

لو علمنا أن الحل الأمثل للبرنامج الخطي الثنائي هو:

$$y_1^* = -4$$

$$y_2^* = 2.5$$

$$w^* = -11$$

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأولي؟

– الحل –

نعلم أن:

$$z^* = w^* = -11$$

بالتعويض بقيم y_1^* و y_2^* في قيود البرنامج الثنائي سنجد أن:

$$\begin{aligned}
4(-4) + 2(2.5) &= -11 < 3 && \Rightarrow \quad s_1^* \neq 0 && \Rightarrow \quad x_1^* = 0 \\
1(-4) - 2(2.5) &= -9 \quad < 2 && \Rightarrow \quad s_2^* \neq 0 && \Rightarrow \quad x_2^* = 0 \\
-3(-4) - 4(2.5) &= \quad 2 && && \\
2(-4) + 4(2.5) &= \quad 2 \quad < 4 && \Rightarrow \quad s_4^* \neq 0 && \Rightarrow \quad x_4^* = 0 \\
-2(-4) + 4(2.5) &= \; 18 \quad > 4 && \Rightarrow \quad e_5^* \neq 0 && \Rightarrow \quad x_5^* = 0 \\
2(-4) + 4(2.5) &= \quad 2 && &&
\end{aligned}$$

وحيث أن $y_1^* \neq 0$ و $y_2^* \neq 0$ ، فإنه في البرنامج الخطي الأولي سيكون :

$$s_1^* = e_2^* = 0$$

إذا يصبح لدينا:

$$\begin{aligned}
3x_3^* + 2x_6^* &= 4 \\
4x_3^* + 4x_6^* &= 2
\end{aligned}$$

بحل هاتين المعادلتين، نحصل على:

$$x_3^* = 3$$

$$x_6^* = -2.5$$

مثال:

لدينا البرنامج الخطي الأولي التالي:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 3x_1 + 4x_2 + h_3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\
& x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 1 \\
& 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq k_3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

البرنامج تم حله بطريقة M الكبيرة ، وكان جدول السمبلكس الأمثل له كما يلي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	s_3	a_1	a_2	RHS
z	0	0	$\frac{11}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$M+\frac{10}{3}$	$M-\frac{1}{3}$	$\frac{29}{3}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	1	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$
s_3	0	0	0	0	1	-2	0	1

أكتب البرنامج الخطي الثنائي ، ثم أوجد له كلاً من:

- الحل الأمثل
- أسعار الظل
- تحليل الحساسية لمعامل المتغير y_2 في دالة الهدف (c_2^d) .
- تحليل الحساسية للطرف الأيمن للقيد الأول (b_1^d) .

– الحل –

البرنامج الخطي الثنائي:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad w = 3y_1 + \quad y_2 + k_3 y_3 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad y_1 + \quad y_2 + \quad 2y_3 \ \geq \ 3 \\
&\qquad y_1 - 2y_2 + \quad 2y_3 \ \geq \ 4 \\
&\qquad y_1 + 2y_2 + \quad 2y_3 \ \geq \ h_3 \\
&\qquad\quad y_1 \ \text{unrestricted} \\
&\qquad\quad y_2 \leq 0 \\
&\qquad\quad y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

الحل الأمثل للبرنامج الخطي الثنائي:

$$y_1^* = \frac{10}{3} \quad , \quad y_2^* = -\frac{1}{3} \quad , \quad y_3^* = 0 \quad , \quad w^* = \frac{29}{3}$$

أسعار الظل للبرنامج الخطي الثنائي:

$$x_1^* = \frac{7}{3} \ , \ x_2^* = \frac{2}{3} \ , \ x_3^* = 0$$

تحليل الحساسية لـ c_2^d :

أولا نوجد تحليل الحساسية لـ b_2^p :

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \leq 2 \\
&\frac{7}{3} + \frac{1}{3}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -7 \\
&1 + 0\Delta \geq 0
\end{aligned}
\right\} \quad \Rightarrow \quad -7 \leq \Delta \leq 2
$$

وبالتالي:

$$-6 \ \leq \ b_2^p \leq \ 3$$

إذا تحليل الحساسية لمعامل المتغير y_2 في دالة الهدف في البرنامج الخطي الثنائي هو :

$$-6 \ \leq \ c_2^d \leq \ 3$$

تحليل الحساسية لـ b_1^d :

أولا نوجد تحليل الحساسية لـ c_1^p :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{11}{3}+\frac{4}{3}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -\frac{11}{4} \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \leq 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -\frac{11}{4} \leq \Delta \leq 1$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{4} \leq c_1^p \leq 4$$

إذا تحليل الحساسية للطرف الأيمن للقيد الخطي الأول في البرنامج الخطي الثنائي هو :

$$\frac{1}{4} \leq b_1^d \leq 4$$

مثال:

لدينا البرنامج الخطي الأولي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = h_1x_1 - x_2 + h_3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \le k_2 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge k_3 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

البرنامج تم حله بطريقة M الكبيرة ، وكان جدول السمبلكس الأمثل له كما يلي:

BV	x_1	x_2	x_3	s_2	e_3	a_1	a_3	RHS
z	$-\frac{5}{4}$	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-M-\frac{3}{4}$	$-M+\frac{1}{4}$	-1
x_2	$\frac{3}{4}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	2
s_2	-2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_3	$\frac{1}{4}$	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

أكتب البرنامج الخطي الثنائي ، ثم أوجد له كلاً من:

- الحل الأمثل
- أسعار الظل
- تحليل الحساسية لمعامل المتغير y_1 في دالة الهدف (c_1^d) .
- تحليل الحساسية للطرف الأيمن للقيد الثاني (b_2^d) .

– الحل –

البرنامج الخطي الثنائي:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad w = 3y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad y_1 - y_2 + 2y_3 \le h_1 \\
&\qquad 2y_1 + y_2 + 2y_3 \le -1 \\
&\qquad -2y_1 + y_2 + 2y_3 \le h_3 \\
&\qquad y_1 \text{ unrestricted} \\
&\qquad y_2 \le 0 \\
&\qquad y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

الحل الأمثل للبرنامج الخطي الثنائي:

$$y_1^* = -\frac{3}{4} \quad , \quad y_2^* = 0 \quad , \quad y_3^* = \frac{1}{4} \quad , \quad w^* = -1$$

أسعار الظل للبرنامج الخطي الثنائي:

$$x_1^* = 0 \ , \qquad x_2^* = 2 \ , \qquad x_3^* = 0.5$$

<u>تحليل الحساسية لـ c_1^d:</u>

أولا نوجد تحليل الحساسية لـ b_1^p:

$$
\left.
\begin{array}{lll}
2 + \frac{1}{4}\Delta \ge 0 & \Rightarrow & \Delta \ge -8 \\
\frac{3}{2} + 0\Delta \ge 0 & & \\
\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\Delta \ge 0 & \Rightarrow & \Delta \le 2
\end{array}
\right\} \Rightarrow \quad -8 \le \Delta \le 2
$$

وبالتالي:

$$-5 \le b_1^p \le 5$$

إذا تحليل الحساسية لمعامل المتغير y_1 في دالة الهدف في البرنامج الخطي الثنائي هو :

$$-5 \le c_1^d \le 5$$

تحليل الحساسية لـ b_2^d:

أولا نوجد تحليل الحساسية لـ c_2^p:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\Delta \le 0 \quad &\Rightarrow \quad \Delta \le \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\Delta \le 0 \quad &\Rightarrow \quad \Delta \ge -1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad -1 \le \Delta \le \frac{5}{3}$$

وبالتالي:

$$-2 \le c_2^p \le \frac{2}{3}$$

إذا تحليل الحساسية للطرف الأيمن للقيد الخطي الثاني في البرنامج الخطي الثنائي هو :

$$-2 \le b_2^d \le \frac{2}{3}$$

مثال:

لدينا البرنامج الخطي الأولي التالي:

$$\begin{aligned}
&\max \quad z = h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad x_1 + x_2 + 2x_3 \le k_1 \\
&\qquad 2x_1 + x_2 + 2x_3 \ge k_2 \\
&\qquad 2x_1 + x_2 + x_3 = k_3 \\
&\qquad x_1 , x_2 , x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

البرنامج تم حله بطريقة M الكبيرة ، وكان جدول السمبلكس الأمثل له كما يلي:

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	a_2	a_3	RHS
z	6	0	0	0	2	$M-2$	$M+6$	6
s_1								2
x_3								1
x_2								1

١. أوجد البرنامج الخطي الثنائي ، ثم أوجد له ما يلي :
   - الحل الأمثل
   - أسعار الظل

٢. تحليل الحساسية لـ c_1^p

٣. هل يبقى الحل أمثلا في حال تغيرت معاملات المتغير x_1 إلى :

$$x_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ \hline 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

٤. هل يبقى الحل أمثلا في حال إضافة متغير جديد x_4 ، بالمعاملات التالية :

$$x_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ \hline 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad x_4 \ge 0$$

– الحل –

البرنامج الخطي الثنائي:

$$\min \quad w = k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3$$
s.t.
$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + 2y_3 &\geq h_1 \\ y_1 + y_2 + y_3 &\geq h_2 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 &\geq h_3 \end{aligned}$$
$$y_1 \geq 0 \, , \, y_2 \leq 0 \, , \; y_3 \text{ unrestricted}$$

وله الحل الأمثل:

$$y_1^* = 0 \, , \, y_2^* = -2 \, , \, y_3^* = 6 \, , \qquad w^* = 6$$

وأسعار الظل:

$$x_1^* = 0 \, , \, x_2^* = 1 \, , \, x_3^* = 1$$

<u>تحليل الحساسية لـ c_1^p</u> :

إذا تم تغيير قيمة c_1^p ، فقط القيد الأول في البرنامج الثنائي سيتغير إلى :

$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq c_1^p$$

لا بد أن يبقى

$$1(0) + 2(-2) + 2(6) \geq c_1^p$$

أي ان

$$-\infty \leq c_1^p \leq 8$$

تغيير معاملات المتغير الغير أساسي x_1 في البرنامج الخطي:

نعلم أن البرنامج الثنائي لن يتغير باستثناء القيد الأول ، الذي سيصبح:

$$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 4$$

لأن $y_1^* = 0 \, , \, y_2^* = -2 \, , \, y_3^* = 6$ يحقق هذا القيد ، إذا الحل الأمثل الحالي للبرنامج الخطي الأولي سيبقى امثلا .

إضافة متغير جديد في البرنامج الخطي:

نعلم أن البرنامج الثنائي لن يتغير باستثناء إضافة قيد جديد :

$$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3$$

لأن $y_1^* = 0 \, , \, y_2^* = -2 \, , \, y_3^* = 6$ لا يحقق هذا القيد ، إذا الحل الأمثل الحالي للبرنامج الخطي الأولي لن يبقى امثلا .

مثال:

لدينا البرنامج الخطي الأولي التالي:

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = 2x_1 + h_2x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq k_1 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \\
& x_1 , x_2 , x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

البرنامج تم حله بطريقة M الكبيرة ، وكان جدول السمبلكس الأمثل له كما يلي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	s_3	a_1	a_2	RHS
z				0	-1	$-M$	$-M+4$	10
x_1								2
x_2								2
e_1								6

١. أوجد البرنامج الخطي الثنائي ، ثم أوجد له :
   - الحل الأمثل
   - أسعار الظل

٢. تحليل الحساسية لـ c_3^p

٣. هل يبقى الحل أمثلا في حال تغيرت معاملات المتغير x_3 إلى :

$$x_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ \hline 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

٤. هل يبقى الحل أمثلا في حال إضافة متغير جديد x_4 ، بالمعاملات التالية :

$$x_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ \hline 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad x_4 \leq 0$$

– الحل –

البرنامج الخطي الثنائي:

$$\begin{aligned}
&\max \quad w = k_1 y_1 + \ 4y_2 + \ 6y_3 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad 2y_1 + \ y_2 + \ 2y_3 \le 2 \\
&\qquad 2y_1 + \ y_2 + \ y_3 \le h_2 \\
&\qquad 2y_1 + \ y_2 + \ 2y_3 \le 4 \\
&\quad y_1 \ge 0 \ , \ y_2 \text{ unrestricted} \ , \ y_3 \le 0
\end{aligned}$$

وله الحل الأمثل:

$$y_1^* = 0 \ , \ y_2^* = 4 \ , \ y_3^* = -1 \ , \qquad w^* = 10$$

وأسعار الظل:

$$x_1^* = 2 \ , \ x_2^* = 2 \ , \ x_3^* = 0$$

تحليل الحساسية لـ c_3^p:

إذا تم تغيير قيمة c_3^p ، فقط القيد الثالث في البرنامج الثنائي سيتغير إلى:

$$2y_1 + \ y_2 + 2y_3 \le c_3^p$$

لا بد أن يبقى

$$2(0) + 1(4) + 2(-1) \le c_3^p$$

أي ان

$$2 \le c_3^p \le \infty$$

تغيير معاملات المتغير الغير أساسي x_3 في البرنامج الخطي:

نعلم أن البرنامج الثنائي لن يتغير باستثناء القيد الثالث ، الذي سيصبح:

$$1y_1 + 2y_2 + 1y_3 \leq 6$$

لأن $y_1^* = 0 \, , \, y_2^* = 4 \, , \, y_3^* = -1$ لا يحقق هذا القيد ، إذا الحل الأمثل الحالي للبرنامج الخطي الأولي لن يبقى امثلا.

إضافة متغير جديد في البرنامج الخطي:

نعلم أن البرنامج الثنائي لن يتغير باستثناء إضافة قيد جديد :

$$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 3$$

لأن $y_1^* = 0 \, , \, y_2^* = 4 \, , \, y_3^* = -1$ يحقق هذا القيد ، إذا الحل الأمثل الحالي للبرنامج الخطي الأولي سيبقى امثلا.