linear programming
OPR213

تحليل الحساسية جبرياً
Algebraic Sensitivity Analysis
(6)

2024

مثال :

لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ & 2x_1 - x_3 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

البرنامج تم حله بطريقة M الكبيرة ، وكان جدول السمبلكس الأمثل له كما يلي:

BV	x_1	x_2	x_3	s_2	e_3	a_1	a_3	RHS
z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	$M+\frac{1}{3}$	M	$\frac{16}{3}$
e_3	0	0	$\frac{7}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{4}{3}$	-1	$\frac{4}{3}$
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
x_1	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{5}{3}$

أ) أوجد تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف c_1 , c_2 , c_3 والطرف الأيمن للقيود الخطية b_1 , b_2 , b_3 .

ب) ما هي أسعار الظل لموارد القيود ؟

– الحل –

أ)

تحليل الحساسية لـ c_1 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3}-\frac{1}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq 4 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq \Delta \leq 4$$

وبالتالي:

$$1.5 \leq c_1 \leq 6$$

تحليل الحساسية لـ c_2 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{3}+\frac{2}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq \Delta \leq \infty$$

وبالتالي:

$$2.5 \leq c_2 \leq \infty$$

تحليل الحساسية لـ c_3 :

يجب أن يكون:

$$\frac{1}{3}-\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -\infty \leq \Delta \leq \frac{1}{3}$$

وبالتالي:

$$-\infty \leq c_3 \leq \frac{10}{3}$$

تحليل الحساسية لـ b_1 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{4}{3}+\frac{4}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -1 \\ \frac{2}{3}-\frac{1}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq 2 \\ \frac{5}{3}+\frac{2}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -\frac{5}{2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \Delta \leq 2$$

وبالتالي:

$$3 \leq b_1 \leq 6$$

تحليل الحساسية لـ b_2 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{4}{3}-\frac{2}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq 2 \\ \frac{2}{3}+\frac{2}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -1 \\ \frac{5}{3}-\frac{1}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq 5 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \Delta \leq 2$$

وبالتالي:

$$2 \leq b_2 \leq 5$$

تحليل الحساسية لـ b_3 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{4}{3}-1\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3}+0\Delta \geq 0 & & \\ \frac{5}{3}+0\Delta \geq 0 & & \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -\infty \leq \Delta \leq \frac{4}{3}$$

وبالتالي:

$$-\infty \leq b_3 \leq \frac{10}{3}$$

ب)

أسعار الظل للقيود الخطية الثلاثة على التوالي هي:

$$y_1 = \frac{1}{3} \quad , \quad y_2 = \frac{4}{3} \quad , \quad y_3 = 0$$

مثال :

لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

البرنامج تم حله بطريقة M الكبيرة ، وكان جدول السمبلكس الأمثل له كما يلي:

BV	x_1	x_2	x_3	s_2	e_3	a_1	a_3	RHS
z	$-\frac{5}{4}$	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-M-\frac{3}{4}$	$-M+\frac{1}{4}$	-1
x_2	$\frac{3}{4}$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	2
s_2	-2	0	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_3	$\frac{1}{4}$	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

أ) أوجد تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف c_1 , c_2 , c_3 والطرف الأيمن للقيود الخطية b_1 , b_2 , b_3 .

ب) ما هي أسعار الظل لموارد القيود ؟

– الحل –

أ)

تحليل الحساسية لـ c_1 :

يجب أن يكون:

$$-\frac{5}{4}-\Delta\leq 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{5}{4}\leq \Delta \leq \infty$$

وبالتالي:

$$-\frac{1}{4}\leq c_1 \leq \infty$$

تحليل الحساسية لـ c_2 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} -\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\Delta\leq 0 & \Rightarrow & \Delta\leq\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\Delta\leq 0 & \Rightarrow & \Delta\geq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -1\leq \Delta \leq \frac{5}{3}$$

وبالتالي:

$$-2 \leq c_2 \leq \frac{2}{3}$$

تحليل الحساسية لـ c_3 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} -\frac{5}{4}+\frac{1}{4}\Delta\leq 0 & \Rightarrow & \Delta\leq 5 \\ -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\Delta\leq 0 & \Rightarrow & \Delta\geq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -1\leq \Delta \leq 5$$

وبالتالي:

$$1 \leq c_3 \leq 7$$

تحليل الحساسية لـ b_1 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} 2+\frac{1}{4}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -8 \\ \frac{3}{2}+0\Delta \geq 0 & & \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq 2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -8 \leq \Delta \leq 2$$

وبالتالي:

$$-5 \leq b_1 \leq 5$$

تحليل الحساسية لـ b_2 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} 2+0\Delta \geq 0 \\ \frac{3}{2}+\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}+0\Delta \geq 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{2} \leq \Delta \leq \infty$$

وبالتالي:

$$2.5 \leq b_2 \leq \infty$$

تحليل الحساسية لـ b_3 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} 2+\frac{1}{4}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -8 \\ \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq 3 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -2 \leq \Delta \leq 3$$

وبالتالي:

$$3 \leq b_3 \leq 8$$

ب)

أسعار الظل للقيود الخطية الثلاثة على التوالي هي:

$$y_1 = -\frac{3}{4} \quad , \quad y_2 = 0 \quad , \quad y_3 = \frac{1}{4}$$

مثال :

لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ & 2x_1 - x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

البرنامج تم حله بطريقة M الكبيرة ، وكان جدول السمبلكس الأمثل له كما يلي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	s_3	a_1	a_2	RHS
z	0	0	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	M	$M+1$	5
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	2
x_2	0	1	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e_1	0	0	$-\frac{7}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$

أ) أوجد تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف c_1 , c_2 , c_3 والطرف الأيمن للقيود الخطية b_1 , b_2 , b_3 .

ب) ما هي أسعار الظل لموارد القيود ؟

– الحل –

أ)

تحليل الحساسية لـ c_1 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{5}{2}-\frac{1}{2}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq 5 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -1 \leq \Delta \leq 5$$

وبالتالي:

$$1 \leq c_1 \leq 7$$

تحليل الحساسية لـ c_2 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{5}{2}+\frac{5}{4}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -2 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -2 \leq \Delta \leq 2$$

وبالتالي:

$$0 \leq c_2 \leq 4$$

تحليل الحساسية لـ c_3 :

يجب أن يكون:

$$\frac{5}{2}-\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -\infty \leq \Delta \leq \frac{5}{2}$$

وبالتالي:

$$-\infty \leq c_3 \leq 1.5$$

تحليل الحساسية لـ b_1 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} 2+0\Delta \geq 0 \\ \frac{1}{2}+0\Delta \geq 0 \\ \frac{5}{2}-1\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \leq \frac{5}{2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -\infty \leq \Delta \leq \frac{5}{2}$$

وبالتالي:

$$-\infty \leq b_1 \leq 4.5$$

تحليل الحساسية لـ b_2 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} 2+0\Delta \geq 0 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -1 \\ \frac{5}{2}+\frac{1}{2}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -5 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \Delta \leq \infty$$

وبالتالي:

$$2 \leq b_2 \leq \infty$$

تحليل الحساسية لـ b_3 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} 2+\frac{1}{2}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -4 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \leq 2 \\ \frac{5}{2}+\frac{3}{4}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -\frac{10}{3} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -\frac{10}{3} \leq \Delta \leq 2$$

وبالتالي:

$$\frac{2}{3} \leq b_3 \leq 6$$

ب)

أسعار الظل للقيود الخطية الثلاثة على التوالي هي:

$$y_1 = 0 \quad , \quad y_2 = 1 \quad , \quad y_3 = \frac{1}{2}$$

مثال :

لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -2x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ & 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

البرنامج تم حله بطريقة M الكبيرة ، وكان جدول السمبلكس الأمثل له كما يلي:

BV	x_1	x_2	x_3	s_2	e_3	a_1	a_3	RHS
z	0	$-\frac{1}{3}$	0	-3	0	$-M+\frac{7}{3}$	$-M$	$\frac{1}{3}$
e_3	0	$\frac{4}{3}$	0	-1	1	$\frac{5}{3}$	-1	$\frac{5}{3}$
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
x_3	0	1	1	-1	0	1	0	1

أ) أوجد تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف c_1 , c_2 , c_3 والطرف الأيمن للقيود الخطية b_1 , b_2 , b_3 .

ب) ما هي أسعار الظل لموارد القيود ؟

– الحل –

أ)

تحليل الحساسية لـ c_1 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{rcl} -\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\Delta \le 0 & \Rightarrow & \Delta \ge -1 \\ -3+\Delta \le 0 & \Rightarrow & \Delta \le 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -1 \le \Delta \le 3$$

وبالتالي:

$$-3 \le c_1 \le 1$$

تحليل الحساسية لـ c_2 :

يجب أن يكون:

$$-\frac{1}{3}-\Delta \le 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3} \le \Delta \le \infty$$

وبالتالي:

$$\frac{5}{3} \le c_2 \le \infty$$

تحليل الحساسية لـ c_3 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{rcl} -\frac{1}{3}+\Delta \le 0 & \Rightarrow & \Delta \le \frac{1}{3} \\ -3-\Delta \le 0 & \Rightarrow & \Delta \ge -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad -3 \le \Delta \le \frac{1}{3}$$

وبالتالي:

$$-2 \le c_3 \le \frac{4}{3}$$

تحليل الحساسية لـ b_1 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{5}{3}+\frac{5}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -1 \\ \frac{1}{3}-\frac{2}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq \frac{1}{2} \\ 1+1\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \Delta \leq \frac{1}{2}$$

وبالتالي:

$$3 \leq b_1 \leq 4.5$$

تحليل الحساسية لـ b_2 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{5}{3}-1\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3}+1\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -\frac{1}{3} \\ 1-1\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{3} \leq \Delta \leq 1$$

وبالتالي:

$$\frac{8}{3} \leq b_2 \leq 4$$

تحليل الحساسية لـ b_3 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{5}{3}-1\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3}+0\Delta \geq 0 & & \\ 1+0\Delta \geq 0 & & \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -\infty \leq \Delta \leq \frac{5}{3}$$

وبالتالي:

$$-\infty \leq b_3 \leq \frac{11}{3}$$

ب)

أسعار الظل للقيود الخطية الثلاثة على التوالي هي:

$$y_1 = \frac{7}{3} \quad , \quad y_2 = -3 \quad , \quad y_3 = 0$$

مثال :

لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

البرنامج تم حله بطريقة M الكبيرة ، وكان جدول السمبلكس الأمثل له كما يلي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	s_3	a_1	a_2	RHS
z	0	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	M	$M-2$	$\frac{9}{2}$
x_3	0	$\frac{1}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
e_1	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{9}{2}$
x_1	1	$\frac{5}{4}$	0	0	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$

أ) أوجد تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف c_1 , c_2 , c_3 والطرف الأيمن للقيود الخطية b_1 , b_2 , b_3 .

ب) ما هي أسعار الظل لموارد القيود ؟

– الحل –

أ)

تحليل الحساسية لـ c_1 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{3}{2}+\frac{5}{4}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -\frac{6}{5} \\ \frac{5}{2}+\frac{3}{4}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -\frac{10}{3} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -\frac{6}{5} \leq \Delta \leq \infty$$

وبالتالي:

$$\frac{9}{5} \leq c_1 \leq \infty$$

تحليل الحساسية لـ c_2 :

يجب أن يكون:

$$\frac{3}{2}-\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -\infty \leq \Delta \leq \frac{3}{2}$$

وبالتالي:

$$-\infty \leq c_2 \leq 3.5$$

تحليل الحساسية لـ c_3 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{3}{2}+\frac{1}{4}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -6 \\ \frac{5}{2}-\frac{1}{4}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq 10 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -6 \leq \Delta \leq 10$$

وبالتالي:

$$-7 \leq c_3 \leq 9$$

تحليل الحساسية لـ b_1 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{4}+0\Delta \geq 0 \\ \frac{9}{2}-1\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \leq \frac{9}{2} \\ \frac{7}{4}+0\Delta \geq 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -\infty \leq \Delta \leq \frac{9}{2}$$

وبالتالي:

$$-\infty \leq b_1 \leq 6.5$$

تحليل الحساسية لـ b_2 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -\frac{3}{2} \\ \frac{9}{2}+1\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -\frac{9}{2} \\ \frac{7}{4}-\frac{1}{2}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \leq \frac{7}{2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{2} \leq \Delta \leq \frac{7}{2}$$

وبالتالي:

$$2.5 \leq b_2 \leq 7.5$$

تحليل الحساسية لـ b_3 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{4}-\frac{1}{4}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \leq 3 \\ \frac{9}{2}+\frac{1}{2}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -9 \\ \frac{7}{4}+\frac{3}{4}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -\frac{7}{3} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -\frac{7}{3} \leq \Delta \leq 3$$

وبالتالي:

$$\frac{8}{3} \leq b_3 \leq 8$$

ب)

أسعار الظل للقيود الخطية الثلاثة على التوالي هي:

$$y_1 = 0 \quad , \quad y_2 = -2 \quad , \quad y_3 = 2.5$$

مثال :

لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad z &= 2x_1 + x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} & \\ x_1 - x_2 + x_3 &\geq 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\leq 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 , x_2 , x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

البرنامج تم حله بطريقة M الكبيرة ، وكان جدول السمبلكس الأمثل له كما يلي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	s_2	a_1	a_3	RHS
z	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-M+\frac{2}{3}$	$-M+2$	8
x_3	0	0	1	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	2
x_2	0	1	0	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

أ) أوجد تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف c_1 , c_2 , c_3 والطرف الأيمن للقيود الخطية b_1 , b_2 , b_3.

ب) ما هي أسعار الظل لموارد القيود ؟

– الحل –

أ)

تحليل الحساسية لـ c_1:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{rl} -\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\Delta \le 0 & \Rightarrow \quad \Delta \ge -2 \\ -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\Delta \le 0 & \Rightarrow \quad \Delta \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow -2 \le \Delta \le 1$$

وبالتالي:

$$0 \le c_1 \le 3$$

تحليل الحساسية لـ c_2:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{rl} -\frac{2}{3}+\frac{5}{9}\Delta \le 0 & \Rightarrow \quad \Delta \le \frac{6}{5} \\ -\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\Delta \le 0 & \Rightarrow \quad \Delta \le 3 \end{array}\right\} \Rightarrow -\infty \le \Delta \le \frac{6}{5}$$

وبالتالي:

$$-\infty \le c_2 \le = \frac{11}{5} = 2.2$$

تحليل الحساسية لـ c_3:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{rl} -\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\Delta \le 0 & \Rightarrow \quad \Delta \ge -6 \\ -\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\Delta \le 0 & \Rightarrow \quad \Delta \ge -\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{3}{2} \le \Delta \le \infty$$

وبالتالي:

$$3.5 \le c_3 \le \infty$$

تحليل الحساسية لـ b_1:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{rl} \frac{2}{3}+\frac{1}{9}\Delta \ge 0 & \Rightarrow \quad \Delta \ge -6 \\ 2+\frac{1}{3}\Delta \ge 0 & \Rightarrow \quad \Delta \ge -6 \\ \frac{2}{3}-\frac{5}{9}\Delta \ge 0 & \Rightarrow \quad \Delta \le \frac{6}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow -6 \le \Delta \le \frac{6}{5}$$

وبالتالي:

$$-4 \le b_1 \le \frac{16}{5} = 3.2$$

تحليل الحساسية لـ b_2:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3}-\frac{2}{9}\Delta \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta \leq 3 \\ 2+\frac{1}{3}\Delta \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta \geq -6 \\ \frac{2}{3}+\frac{1}{9}\Delta \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta \geq -6 \end{array}\right\} \Rightarrow\; -6 \leq \Delta \leq 3$$

وبالتالي:

$$-2 \leq b_2 \leq 7$$

تحليل الحساسية لـ b_3:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\Delta \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta \geq -2 \\ 2+0\Delta \geq 0 \\ \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\Delta \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta \geq -2 \end{array}\right\} \Rightarrow\; -2 \leq \Delta \leq \infty$$

وبالتالي:

$$2 \leq b_3 \leq \infty$$

ب)

أسعار الظل للقيود الخطية الثلاثة على التوالي هي:

$$y_1 = \frac{2}{3} \quad , \quad y_2 = -\frac{1}{3}, \quad y_3 = 2$$

مثال :

لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 4x_2 - x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 - 2x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

البرنامج تم حله بطريقة M الكبيرة ، وكان جدول السمبلكس الأمثل له كما يلي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	s_3	a_1	a_2	RHS
z	0	0	$\frac{11}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$M + \frac{10}{3}$	$M - \frac{1}{3}$	$\frac{29}{3}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_1	1	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$
s_3	0	0	0	0	1	-2	0	1

أ) أوجد تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف c_1 , c_2 , c_3 والطرف الأيمن للقيود الخطية b_1 , b_2 , b_3 .

ب) ما هي أسعار الظل لموارد القيود ؟

– الحل –

أ)

تحليل الحساسية لـ c_1 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{11}{3}+\frac{4}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -\frac{11}{4} \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -\frac{11}{4} \leq \Delta \leq 1$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{4} \leq c_1 \leq 4$$

تحليل الحساسية لـ c_2 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{11}{3}-\frac{1}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq 11 \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \Delta \leq 11$$

وبالتالي:

$$3 \leq c_2 \leq 15$$

تحليل الحساسية لـ c_3 :

يجب أن يكون:

$$\frac{11}{3}-\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -\infty \leq \Delta \leq \frac{11}{3}$$

وبالتالي:

$$-\infty \leq c_3 \leq \frac{8}{3}$$

تحليل الحساسية لـ b_1 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{2}{3}+\frac{1}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -2 \\ \frac{7}{3}+\frac{2}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -\frac{7}{2} \\ 1-2\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -2 \leq \Delta \leq \frac{1}{2}$$

وبالتالي:

$$1 \leq b_1 \leq 3.5$$

تحليل الحساسية لـ b_2 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{2}{3}-\frac{1}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq 2 \\ \frac{7}{3}+\frac{1}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -7 \\ 1+0\Delta \geq 0 & & \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -7 \leq \Delta \leq 2$$

وبالتالي:

$$-6 \leq b_2 \leq 3$$

تحليل الحساسية لـ b_3 :

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{2}{3}+0\Delta \geq 0 & & \\ \frac{7}{3}+0\Delta \geq 0 & & \\ 1+1\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad -1 \leq \Delta \leq \infty$$

وبالتالي:

$$6 \leq b_3 \leq \infty$$

ب)

أسعار الظل للقيود الخطية الثلاثة على التوالي هي:

$$y_1 = \frac{10}{3} \quad , \quad y_2 = -\frac{1}{3} \quad , \quad y_3 = 0$$

مثال :

لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad z &= x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} & \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\le 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\ge 3 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

البرنامج تم حله بطريقة M الكبيرة ، وكان جدول السمبلكس الأمثل له كما يلي:

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	a_2	a_3	RHS
z	-1	0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-M+\frac{2}{3}$	$-M+\frac{2}{3}$	4
s_1	7	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{3}$	3
x_3	2	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
x_2	-2	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

أ) أوجد تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف c_1 , c_2 , c_3 والطرف الأيمن للقيود الخطية b_1 , b_2 , b_3.

ب) ما هي أسعار الظل لموارد القيود ؟

– الحل –

أ)

تحليل الحساسية لـ c_1:

يجب أن يكون:

$$-1-\Delta \le 0 \;\Rightarrow\; -1 \le \Delta \le \infty$$

وبالتالي:

$$0 \le c_1 \le \infty$$

تحليل الحساسية لـ c_2:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} -1-2\Delta \le 0 \;\Rightarrow\; \Delta \ge -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\Delta \le 0 \;\Rightarrow\; \Delta \le 2 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le \Delta \le 2$$

وبالتالي:

$$\frac{3}{2} \le c_2 \le 4$$

تحليل الحساسية لـ c_3:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} -1+2\Delta \le 0 \;\Rightarrow\; \Delta \le \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\Delta \le 0 \;\Rightarrow\; \Delta \ge -1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 \le \Delta \le \frac{1}{2}$$

وبالتالي:

$$1 \le c_3 \le \frac{5}{2}$$

تحليل الحساسية لـ b_1:

يجب أن يكون:

$$3+\Delta \ge 0 \;\Rightarrow\; -3 \le \Delta \le \infty$$

وبالتالي:

$$1 \le b_1 \le \infty$$

تحليل الحساسية لـ b_2:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} 3+\frac{4}{3}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -\frac{9}{4} \\ 1+\frac{2}{3}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -\frac{3}{2} \\ 1-\frac{1}{3}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \leq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \; -\frac{3}{2} \leq \Delta \leq 3$$

وبالتالي:

$$\frac{3}{2} \leq b_2 \leq 6$$

تحليل الحساسية لـ b_3:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} 3-\frac{5}{3}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \leq \frac{9}{5} \\ 1-\frac{1}{3}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \leq 3 \\ 1+\frac{2}{3}\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \geq -\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \; -\frac{3}{2} \leq \Delta \leq \frac{9}{5}$$

وبالتالي:

$$\frac{3}{2} \leq b_3 \leq \frac{24}{5}$$

ب)

أسعار الظل للقيود الخطية الثلاثة على التوالي هي:

$$y_1 = 0 \quad , \quad y_2 = \frac{2}{3}, \quad y_3 = \frac{2}{3}$$

مثال :

لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max \quad z &= 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ \text{s.t.} & \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\ x_1 , x_2 , x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

البرنامج تم حله بطريقة M الكبيرة ، وكان جدول السمبلكس الأمثل له كما يلي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	s_3	a_1	a_2	RHS
z	0	0	0	$\frac{1}{3}$	3	$M-\frac{1}{3}$	$M-\frac{1}{3}$	13
x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	1
x_3	0	0	1	0	1	0	-1	1
x_2	0	1	0	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1

أ) أوجد تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف c_1 , c_2 , c_3 والطرف الأيمن للقيود الخطية b_1 , b_2 , b_3.

ب) ما هي أسعار الظل لموارد القيود ؟

– الحل –

أ)

تحليل الحساسية لـ c_1:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -1 \\ 3-\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 \leq \Delta \leq 3$$

وبالتالي:

$$4 \leq c_1 \leq 8$$

تحليل الحساسية لـ c_2:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{1}{3}-\frac{2}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq \frac{1}{2} \\ 3+\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -3 \end{array}\right\} \Rightarrow -3 \leq \Delta \leq \frac{1}{2}$$

وبالتالي:

$$-1 \leq c_2 \leq \frac{5}{2} = 2.5$$

تحليل الحساسية لـ c_3:

يجب أن يكون:

$$3+\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -3 \Rightarrow -3 \leq \Delta \leq \infty$$

وبالتالي:

$$3 \leq c_3 \leq \infty$$

تحليل الحساسية لـ b_1:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{lll} 1-\frac{1}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \leq 3 \\ 1+0\Delta \geq 0 & & \\ 1+\frac{2}{3}\Delta \geq 0 & \Rightarrow & \Delta \geq -\frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq \Delta \leq 3$$

وبالتالي:

$$\frac{1}{2} \leq b_1 \leq 5$$

تحليل الحساسية لـ b_2:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} 1+\frac{5}{3}\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -\frac{3}{5} \\ 1-1\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 1 \\ 1-\frac{4}{3}\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq \frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{3}{5} \leq \Delta \leq \frac{3}{4}$$

وبالتالي:

$$3.4 \leq b_2 \leq 4.75$$

تحليل الحساسية لـ b_3:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} 1-\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \leq 1 \\ 1+\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -1 \\ 1+\Delta \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 \leq \Delta \leq 1$$

وبالتالي:

$$4 \leq b_3 \leq 6$$

ب)

أسعار الظل للقيود الخطية الثلاثة على التوالي هي:

$$y_1 = -\frac{1}{3} \quad , \quad y_2 = -\frac{1}{3}, \quad y_3 = 3$$

مثال :

لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad Z = \quad & 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 , x_2 , x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

البرنامج تم حله بطريقة M الكبيرة ، وكان جدول السمبلكس الأمثل له كما يلي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	s_2	a_1	a_3	RHS
z	-1	0	0	$-\frac{2}{3}$	0	$-M+\frac{2}{3}$	$-M+\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$
x_3	1	0	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
s_2	1	0	0	0	1	0	-1	1
x_2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$

أ) أوجد تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف c_1 , c_2 , c_3 والطرف الأيمن للقيود الخطية b_1 , b_2 , b_3.

ب) ما هي أسعار الظل لموارد القيود ؟

– الحل –

أ)

تحليل الحساسية لـ c_1:

يجب أن يكون:

$$-1-\Delta \leq 0 \;\Rightarrow\; -1 \leq \Delta \leq \infty$$

وبالتالي:

$$2 \leq c_1 \leq \infty$$

تحليل الحساسية لـ c_2:

يجب أن يكون:

$$-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\Delta \leq 0 \;\Rightarrow\; -\infty \leq \Delta \leq 2$$

وبالتالي:

$$-\infty \leq c_2 \leq 4$$

تحليل الحساسية لـ c_3:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} -1+\Delta \leq 0 \;\Rightarrow\; \Delta \leq 1 \\ -\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\Delta \leq 0 \;\Rightarrow\; \Delta \geq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1 \leq \Delta \leq 1$$

وبالتالي:

$$1 \leq c_3 \leq 3$$

تحليل الحساسية لـ b_1:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\Delta \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta \geq -\frac{1}{2} \\ 1+0\Delta \geq 0 \\ \frac{4}{3}-\frac{1}{3}\Delta \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta \leq 4 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \Delta \leq 4$$

وبالتالي:

$$\frac{3}{2} \leq b_1 \leq 6$$

تحليل الحساسية لـ b_2:

يجب أن يكون:

$$1 + \Delta \geq 0 \;\Rightarrow\; -1 \leq \Delta \leq \infty$$

وبالتالي:

$$3 \leq b_2 \leq \infty$$

تحليل الحساسية لـ b_3:

يجب أن يكون:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\Delta \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta \leq 1 \\ 1 - \Delta \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta \leq 1 \\ \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\Delta \geq 0 \;\Rightarrow\; \Delta \geq -2 \end{array}\right\} \Rightarrow\; -2 \leq \Delta \leq 1$$

وبالتالي:

$$1 \leq b_3 \leq 4$$

ب)

أسعار الظل للقيود الخطية الثلاثة على التوالي هي:

$$y_1 = \frac{2}{3} \quad , \quad y_2 = 0 \, , \quad y_3 = \frac{2}{3}$$