linear programming
OPR213

طريقة المرحلتين
The Two-Phase Method

(5)

2024

مثال :

استخدم طريقة المرحلتين لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -2x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

– الحل –

نحول البرنامج الخطي إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -2x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 - e_1 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, e_1 \geq 0 \end{aligned}$$

المرحلة الأولى:

نضيف المتغيرات الاصطناعية للقيود التي تحتاج إليها، ثم نستخدم دالة هدف جديدة خاصة بالمرحلة الأولى كما يلي:

$$\begin{aligned} \min \quad & y = a_1 + a_2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 - e_1 + a_1 = 2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + a_2 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, e_1, a_1, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي التالي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	a_1	a_2	RHS
y	0	0	0	0	-1	-1	0
a_1	2	2	1	-1	1	0	2
a_2	2	1	1	0	0	1	3

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.
نضرب الصف الثاني والثالث بـ (1) ونجمعهما مع صف دالة الهدف:

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	a_1	a_2	RHS	r
y	4	3	2	-1	0	0	5	
$\leftarrow a_1$	2	2	1	-1	1	0	2	$\frac{2}{2}$
a_2	2	1	1	0	0	1	3	$\frac{3}{2}$

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	a_2	RHS	r
y	0	-1	0	1	0	1	
x_1	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	—
$\leftarrow a_2$	0	-1	0	1	1	1	$\frac{1}{1}$

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	RHS
y	0	0	0	0	0
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
e_1	0	-1	0	1	1

تنتهي المرحلة الأولى.
لدينا الحل الأساسي الممكن التالي:

$$x_1 = 1.5 \quad , \quad x_2 = 0 \quad , \quad x_3 = 0 \quad , \quad e_1 = 1$$

المرحلة الثانية:

نستخدم دالة الهدف الأصلية مع نظام المعادلات الممثل للحل الأساسي الممكن المتحصل علية في نهاية المرحلة الأولى. نحصل على جدول السمبلكس التالي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	RHS	r
z	2	-4	-1	0	0	
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3/2}{1/2}$
e_1	0	-1	0	1	1	$-$

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.

نضرب الصف الثاني بـ (-2) ونجمعه مع صف دالة الهدف.

BV	x_1	x_2 ↓	x_3	e_1	RHS	r
z	0	-5	-2	0	-3	
← x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3/2}{1/2}$
e_1	0	-1	0	1	1	$-$

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	RHS
z	10	0	3	0	12
x_2	2	1	1	0	3
e_1	2	0	1	1	4

الحل الأمثل هو:

$$x_1^* = 0 \quad , \quad x_2^* = 3 \quad , \quad x_3^* = 0 \quad , \quad e_1^* = 4 \quad , \quad z^* = 12$$

مثال :

استخدم طريقة المرحلتين لحل البرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

– الحل –

نحول البرنامج الخطي إلى الشكل القياسي:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 - e_2 = 2 \\
& x_1, x_2, x_3, e_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

المرحلة الأولى:

نضيف المتغيرات الاصطناعية للقيود التي تحتاج إليها، ثم نستخدم دالة هدف جديدة خاصة بالمرحلة الأولى كما يلي:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & y = a_1 + a_2 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 + a_1 = 4 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 - e_2 + a_2 = 2 \\
& x_1, x_2, x_3, e_2, a_1, a_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي التالي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	a_1	a_2	RHS
y	0	0	0	0	-1	-1	0
a_1	2	-1	1	0	1	0	4
a_2	2	2	1	-1	0	1	2

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.
نضرب الصف الثاني والثالث بـ (1) ونجمعهما مع صف دالة الهدف:

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	a_1	a_2	RHS	r
y	4	1	2	−1	0	0	6	
a_1	2	−1	1	0	1	0	4	$\frac{4}{2}$
$\leftarrow a_2$	2	2	1	−1	0	1	2	$\frac{2}{2}$

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	a_1	RHS	r
y	0	−3	0	1	0	2	
$\leftarrow a_1$	0	−3	0	1	1	2	$\frac{2}{1}$
x_1	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	—

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	RHS
y	0	0	0	0	0
e_2	0	−3	0	1	2
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2

تنتهي المرحلة الأولى.
لدينا الحل الأساسي الممكن التالي:

$$x_1 = 2 \quad , \; x_2 = 0 \quad , \; x_3 = 0 \quad , \; e_2 = 2$$

المرحلة الثانية:

نستخدم دالة الهدف الأصلية مع نظام المعادلات الممثل للحل الأساسي الممكن المتحصل علية في نهاية المرحلة الأولى. نحصل على جدول السمبلكس التالي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	RHS
z	-3	-2	-1	0	0
e_2	0	-3	0	1	2
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.

نضرب الصف الثالث بـ (3) ونجمعه مع صف دالة الهدف.

BV	x_1	x_2	x_3 ↓	e_2	RHS	r
z	0	$-\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	6	
e_2	0	-3	0	1	2	—
← x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{2}{1/2}$

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	RHS
z	-1	-3	0	0	4
e_2	0	-3	0	1	2
x_3	2	-1	1	0	4

الحل الأمثل هو:

$$x_1^* = 0 \quad , \quad x_2^* = 0 \quad , \quad x_3^* = 4 \quad , \quad e_2^* = 2 \quad , \quad z^* = 4$$

مثال :

استخدم طريقة المرحلتين لحل البرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\
&\qquad x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

– الحل –

نحول البرنامج الخطي إلى الشكل القياسي:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\
&\qquad x_1 + 2x_2 + x_3 - e_2 = 2 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, e_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

المرحلة الأولى:

نضيف المتغيرات الاصطناعية للقيود التي تحتاج إليها، ثم نستخدم دالة هدف جديدة خاصة بالمرحلة الأولى كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad y = a_1 + a_2 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad 2x_1 + 2x_2 - x_3 + a_1 = 4 \\
&\qquad x_1 + 2x_2 + x_3 - e_2 + a_2 = 2 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, e_2, a_1, a_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي التالي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	a_1	a_2	RHS
y	0	0	0	0	−1	−1	0
a_1	2	2	−1	0	1	0	4
a_2	1	2	1	−1	0	1	2

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.

نضرب الصف الثاني والثالث بـ (1) ونجمعهما مع صف دالة الهدف:

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	a_1	a_2	RHS	r
y	3	4	0	-1	0	0	6	
a_1	2	2	-1	0	1	0	4	$\frac{4}{2}$
a_2	1	2	1	-1	0	1	2	$\frac{2}{2}$

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	a_1	RHS	r
y	1	0	-2	1	0	2	
a_1	1	0	-2	1	1	2	$\frac{2}{1}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{1/2}$

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	RHS
y	0	0	0	0	0
x_1	1	0	-2	1	2
x_2	0	1	$\frac{3}{2}$	-1	0

تنتهي المرحلة الأولى.

لدينا الحل الأساسي الممكن التالي:

$$x_1 = 2 \quad , \; x_2 = 0 \quad , \; x_3 = 0 \quad , \; e_2 = 0$$

المرحلة الثانية:

نستخدم دالة الهدف الأصلية مع نظام المعادلات الممثل للحل الأساسي الممكن المتحصل علية في نهاية المرحلة الأولى. نحصل على جدول السمبلكس التالي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	RHS
z	-4	-2	-1	0	0
x_1	1	0	-2	1	2
x_2	0	1	$\frac{3}{2}$	-1	0

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.

نضرب الصف الثاني بـ (4) ونجمعه مع صف دالة الهدف.
نضرب الصف الثالث بـ (2) ونجمعه مع صف دالة الهدف.

BV	x_1	x_2	$x_3 \downarrow$	e_2	RHS	r
z	0	0	-6	2	8	
x_1	1	0	-2	1	2	$-$
$\leftarrow x_2$	0	1	$\frac{3}{2}$	-1	0	$\frac{0}{3/2}$

BV	x_1	x_2	x_3	$e_2 \downarrow$	RHS	r
z	0	4	0	-2	8	
x_1	1	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	2	$-$
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	$-$

الحل الأمثل غير محدود $(z^* \to +\infty)$.

مثال :

استخدم طريقة المرحلتين لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned}
\min\quad & z = -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.}\quad & \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2 \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

– الحل –

نحول البرنامج الخطي إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned}
\min\quad & z = -2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.}\quad & \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 - e_1 = 2 \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, e_1 \geq 0
\end{aligned}$$

المرحلة الأولى:

نضيف المتغيرات الاصطناعية للقيود التي تحتاج إليها، ثم نستخدم دالة هدف جديدة خاصة بالمرحلة الأولى كما يلي:

$$\begin{aligned}
\min\quad & y = a_1 + a_2 \\
\text{s.t.}\quad & \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 - e_1 + a_1 = 2 \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 + a_2 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, e_1, a_1, a_2 \geq 0
\end{aligned}$$

ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي التالي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	a_1	a_2	RHS
y	0	0	0	0	-1	-1	0
a_1	2	2	1	-1	1	0	2
a_2	2	-1	1	0	0	1	4

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.

نضرب الصف الثاني والثالث بـ (1) ونجمعهما مع صف دالة الهدف:

	BV	x_1	x_2	x_3	e_1	a_1	a_2	RHS	r
		↓							
	y	4	1	2	-1	0	0	6	
←	a_1	2	2	1	-1	1	0	2	$\frac{2}{2}$
	a_2	2	-1	1	0	0	1	4	$\frac{4}{2}$

	BV	x_1	x_2	x_3	e_1	a_2	RHS	r
					↓			
	y	0	-3	0	1	0	2	
	x_1	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$-$
←	a_2	0	-3	0	1	1	2	$\frac{1}{1}$

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	RHS
y	0	0	0	0	0
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
e_1	0	-3	0	1	2

تنتهي المرحلة الأولى.

لدينا الحل الأساسي الممكن التالي:

$$x_1 = 2 \quad , \; x_2 = 0 \quad , \; x_3 = 0 \quad , \; e_1 = 2$$

المرحلة الثانية:

نستخدم دالة الهدف الأصلية مع نظام المعادلات الممثل للحل الأساسي الممكن المتحصل علية في نهاية المرحلة الأولى. نحصل على جدول السمبلكس التالي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	RHS
z	2	2	-4	0	0
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
e_1	0	-3	0	1	2

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.

نضرب الصف الثاني بـ (-2) ونجمعه مع صف دالة الهدف.

BV	x_1	$\downarrow$ x_2	x_3	e_1	RHS	r
z	0	3	-5	0	-4	
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2	$-$
e_1	0	-3	0	1	2	$-$

الحل الأمثل غير محدود $(z^* \to -\infty)$.

مثال :

استخدم طريقة المرحلتين لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\max \quad z = x_1 + 4x_2 - 2x_3$$
s.t.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\geq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

– الحل –

نحول البرنامج الخطي إلى الشكل القياسي:

$$\max \quad z = x_1 + 4x_2 - 2x_3$$
s.t.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - e_1 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, e_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

المرحلة الأولى:

نضيف المتغيرات الاصطناعية للقيود التي تحتاج إليها ، ثم نستخدم دالة هدف جديدة خاصة بالمرحلة الأولى كما يلي:

$$\min \quad y = a_1 + a_2$$
s.t.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - e_1 + a_1 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + a_2 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, a_1, a_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي التالي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	a_1	a_2	RHS
y	0	0	0	0	-1	-1	0
a_1	1	2	2	-1	1	0	5
a_2	1	1	2	0	0	1	2

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.

نضرب الصف الثاني والثالث بـ (1) ونجمعهما مع صف دالة الهدف:

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	a_1	a_2	RHS	r
y	2	3	4	−1	0	0	7	
a_1	1	2	2	−1	1	0	5	$\frac{5}{2}$
← a_2	1	1	2	0	0	1	2	$\frac{2}{2}$

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	a_1	RHS	r
y	0	1	0	−1	0	3	
a_1	0	1	0	−1	1	3	$\frac{3}{1}$
← x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	1	$\frac{1}{1/2}$

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	a_1	RHS
y	−1	0	−2	−1	0	1
a_1	−1	0	−2	−1	1	1
x_2	1	1	2	0	0	2

وصلنا للحل الأمثل للبرنامج الخطي الاصطناعي في المرحلة الأولى ، وقيمة المتغير الاصطناعي a_1 أكبر من الصفر. لا يوجد حل ممكن للبرنامج الخطي الأصلي.

مثال :

استخدم طريقة المرحلتين لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad z = {} & x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

– الحل –

نحول البرنامج الخطي إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} \min \quad z = {} & x_1 - 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_1 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1 \geq 0 \end{aligned}$$

المرحلة الأولى:

نضيف المتغيرات الاصطناعية للقيود التي تحتاج إليها، ثم نستخدم دالة هدف جديدة خاصة بالمرحلة الأولى كما يلي:

$$\begin{aligned} \min \quad y = {} & a_2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 + s_1 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + a_2 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي التالي:

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	a_2	RHS
y	0	0	0	0	−1	0
s_1	1	2	2	1	0	2
a_2	1	2	1	0	1	3

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.

نضرب الصف الثالث بـ (1) ونجمعه مع صف دالة الهدف:

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	a_2	RHS	r
y	1	2	1	0	0	3	
s_1	1	2	2	1	0	2	$\frac{2}{2}$
a_2	1	2	1	0	1	3	$\frac{3}{2}$

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	a_2	RHS
y	0	0	-1	-1	0	1
x_2	$\frac{1}{2}$	1	1	$\frac{1}{2}$	0	1
a_2	0	0	-1	-1	1	1

وصلنا للحل الأمثل للبرنامج الخطي الاصطناعي في المرحلة الأولى ، وقيمة المتغير الاصطناعي a_2 أكبر من الصفر. لا يوجد حل ممكن للبرنامج الخطي الأصلي.

مثال :

استخدم طريقة المرحلتين لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

– الحل –

نحول البرنامج الخطي إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - e_2 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, e_2 \geq 0 \end{aligned}$$

المرحلة الأولى:

نضيف المتغيرات الاصطناعية للقيود التي تحتاج إليها، ثم نستخدم دالة هدف جديدة خاصة بالمرحلة الأولى كما يلي:

$$\begin{aligned} \min \quad & y = a_2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 2 \\ & 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - e_2 + a_2 = 8 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, e_2, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي التالي:

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	a_2	RHS
y	0	0	0	0	0	-1	0
s_1	2	1	1	1	0	0	2
a_2	3	4	2	0	-1	1	8

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.

نضرب الصف الثالث بـ (1) ونجمعه مع صف دالة الهدف:

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	a_2	RHS	r
y	3	4	2	0	-1	0	8	
s_1	2	1	1	1	0	0	2	$\frac{2}{1}$
a_2	3	4	2	0	-1	1	8	$\frac{8}{4}$

الأفضل هو خروج المتغير a_2 . لكن سنختار خروج المتغير s_1 لشرح الفكرة.

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	a_2	RHS
y	-5	0	-2	-4	-1	0	0
x_2	2	1	1	1	0	0	2
a_2	-5	0	-2	-4	-1	1	0

تنتهي المرحلة الأولى.

ولكن لا يزال المتغير الاصطناعي a_2 أساسي وقيمته تساوي الصفر.

نجري التحوير التالي (لدينا أكثر من خيار: x_3, s_1, e_2) :

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	a_2	RHS
y	-5	0	-2	-4	-1	0	0
x_2	2	1	1	1	0	0	2
$\leftarrow a_2$	-5	0	-2	-4	-1	1	0

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	a_2	RHS
y	0	0	0	0	0	-1	0
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	2
x_1	1	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0

لدينا الحل الأساسي الممكن التالي:

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = 2 \quad , \quad x_3 = 0\,, \quad s_1 = 0 \quad , \quad e_2 = 0$$

المرحلة الثانية:

نستخدم دالة الهدف الأصلية مع نظام المعادلات الممثل للحل الأساسي الممكن المتحصل علية في نهاية المرحلة الأولى. نحصل على جدول السمبلكس التالي:

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	RHS
z	-2	-2	-4	0	0	0
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	2
x_1	1	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.

نضرب الصف الثاني والثالث بـ (2) ونجمعهما مع صف دالة الهدف.

BV	x_1	x_2	$x_3 \downarrow$	s_1	e_2	RHS	r
z	0	0	$-\frac{14}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	4	
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	2	$\frac{2}{1/5}$
$\leftarrow x_1$	1	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{0}{2/5}$

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	e_2	RHS
z	7	0	0	6	1	4
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	0	-1	$-\frac{1}{2}$	2
x_3	$\frac{5}{2}$	0	1	2	$\frac{1}{2}$	0

الحل الأمثل هو:

$$x_1^* = 0 \quad , \quad x_2^* = 2 \quad , \quad x_3^* = 0 \quad , \quad s_1^* = 0\,, \quad e_2^* = 0 \quad , \quad z^* = 4$$

مثال :

لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

عند حل البرنامج بطريقة المرحلتين ، سيكون الحل الأمثل للمرحلة الأولى كما يلي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	a_1	a_2	RHS
y	0	0	0	0	-1	-1	0
x_1	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	0	0.5	2
e_1	0	-1	0	1	-1	1	2

أكمل المرحلة الثانية لحل المسألة.

– الحل –

المرحلة الثانية:

نحصل على جدول السمبلكس التالي:

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	RHS
z	-2	2	2	0	0
x_1	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	2
e_1	0	-1	0	1	2

نضرب الصف الثاني بـ (2) ونجمعه مع صف دالة الهدف.

BV	x_1	x_2	x_3 ↓	e_1	RHS	r
z	0	0	3	0	4	
← x_1	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{2}{1/2}$
e_1	0	-1	0	1	2	–

BV	x_1	x_2 ↓	x_3	e_1	RHS	r
z	-6	6	0	0	-8	
x_3	2	-2	1	0	4	–
e_1	0	-1	0	1	2	–

الحل الأمثل غير محدود ($z^* \rightarrow -\infty$) .