linear programming
OPR213

الطريقة M الكبيرة
The Big *M* Method
(4)

2024

مثال :

استخدم طريقة M الكبيرة لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

– الحل –

نحول إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 - e_2 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, e_2 \geq 0 \end{aligned}$$

البرنامج الخطي الاصطناعي هو:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - Ma_1 - Ma_2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + a_1 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 - e_2 + a_2 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, e_2, a_1, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي التالي (نستخدم $M = 100$):

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	a_1	a_2	RHS
z	-2	1	-3	0	100	100	0
a_1	2	1	2	0	1	0	3
a_2	2	1	1	-1	0	1	2

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.

نضرب الصف الثاني والثالث بـ (100−) ونجمعهما مع صف دالة الهدف:

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	a_1	a_2	RHS	r
z	-402	-199	-303	100	0	0	-500	
a_1	2	1	2	0	1	0	3	$\frac{3}{2}$
← a_2	2	1	1	-1	0	1	2	$\frac{2}{2}$

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	a_1	RHS	r
z	0	2	-102	-101	0	-98	
← a_1	0	0	1	1	1	1	$\frac{1}{1}$
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{1/2}$

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	RHS
z	0	2	0	1	4
x_3	0	0	1	1	1
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}$

الحل الأمثل هو:

$$x_1^* = 0.5 \quad , \quad x_2^* = 0 \quad , \quad x_3^* = 1 \quad , \quad e_2^* = 0 \quad , \qquad z^* = 4$$

مثال :

استخدم طريقة M الكبيرة لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

– الحل –

نحول إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 - e_1 = 2 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, e_1 \geq 0 \end{aligned}$$

البرنامج الخطي الاصطناعي هو:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + Ma_1 + Ma_2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 - e_1 + a_1 = 2 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 + a_2 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, e_1, a_1, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي التالي (نستخدم $M = 100$):

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	a_1	a_2	RHS
z	-3	-2	-1	0	-100	-100	0
a_1	2	2	1	-1	1	0	2
a_2	2	-1	1	0	0	1	4

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.

نضرب الصف الثاني والثالث بـ (100) ونجمعهما مع صف دالة الهدف:

		BV	x_1	x_2	x_3	e_1	a_1	a_2	RHS	r
	z	397	98	199	−100	0	0	600	
←	a_1	2	2	1	−1	1	0	2	$\frac{2}{2}$
	a_2	2	−1	1	0	0	1	4	$\frac{4}{2}$

	BV	x_1	x_2	x_3	e_1	a_2	RHS	r
	z	0	−299	$\frac{1}{2}$	98.5	0	203	
	x_1	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	−
←	a_2	0	−3	0	1	1	2	$\frac{2}{1}$

	BV	x_1	x_2	x_3	e_1	RHS	r
	z	0	−3.5	$\frac{1}{2}$	0	6	
←	x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{2}{1/2}$
	e_1	0	−3	0	1	2	−

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	RHS
z	-1	-3	0	0	4
x_3	2	-1	1	0	4
e_1	0	-3	0	1	2

الحل الأمثل هو:

$$x_1^* = 0 \quad , \quad x_2^* = 0 \quad , \quad x_3^* = 4 \quad , \quad e_1^* = 2 \quad , \qquad z^* = 4$$

مثال :

استخدم طريقة M الكبيرة لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3 \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

– الحل –

نحول إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 - e_1 = 3 \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, e_1 \geq 0
\end{aligned}$$

البرنامج الخطي الاصطناعي هو:

$$\begin{aligned}
\max \quad & z = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - Ma_1 - Ma_2 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 - e_1 + a_1 = 3 \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 + a_2 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, e_1, a_1, a_2 \geq 0
\end{aligned}$$

ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي التالي (نستخدم $M = 100$):

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	a_1	a_2	RHS
z	-2	-2	-3	0	100	100	0
a_1	2	1	2	-1	1	0	3
a_2	2	-1	1	0	0	1	4

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.

نضرب الصف الثاني والثالث بـ (-100) ونجمعهما مع صف دالة الهدف:

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	a_1	a_2	RHS	r
z	-402	-2	-303	100	0	0	-700	
a_1	2	1	2	-1	1	0	3	$\frac{3}{2}$
a_2	2	-1	1	0	0	1	4	$\frac{4}{2}$

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	a_2	RHS	r
z	0	199	99	-101	0	-97	
x_1	1	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$-$
a_2	0	-2	-1	1	1	1	$\frac{1}{1}$

BV	x_1	x_2	x_3	e_1	RHS	r
z	0	-3	-2	0	4	
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2	$-$
e_1	0	-2	-1	1	1	$-$

الحل الأمثل غير محدود $(z^* \to +\infty)$.

مثال :

استخدم طريقة M الكبيرة لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

– الحل –

نحول إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 - e_2 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, e_2 \geq 0 \end{aligned}$$

البرنامج الخطي الاصطناعي هو:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -2x_1 + 3x_2 + x_3 + Ma_1 + Ma_2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 + a_1 = 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 - e_2 + a_2 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, e_2, a_1, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي التالي (نستخدم $M = 100$):

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	a_1	a_2	RHS
z	2	−3	−1	0	−100	−100	0
a_1	−1	2	1	0	1	0	5
a_2	2	2	1	−1	0	1	3

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.

نضرب الصف الثاني والثالث بـ (100) ونجمعهما مع صف دالة الهدف:

BV	x_1	x_2 ↓	x_3	e_2	a_1	a_2	RHS	r
z	102	397	199	−100	0	0	800	
a_1	−1	2	1	0	1	0	5	$\frac{5}{2}$
← a_2	2	2	1	−1	0	1	3	$\frac{3}{2}$

BV	x_1	x_2	x_3	e_2 ↓	a_1	RHS	r
z	−295	0	$\frac{1}{2}$	98.5	0	204.5	
← a_1	−3	0	0	1	1	2	$\frac{2}{1}$
x_2	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	−

BV	x_1 ↓	x_2	x_3	e_2	RHS	r
z	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	7.5	
e_2	−3	0	0	1	2	−
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	2.5	−

الحل الأمثل غير محدود ($z^* \to -\infty$) .

مثال :

استخدم طريقة M الكبيرة لحل البرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

– الحل –

نحول إلى الشكل القياسي:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 2 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, s_1 \geq 0
\end{aligned}
$$

البرنامج الخطي الاصطناعي هو:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 3x_1 - x_2 + 2x_3 - Ma_2 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_1 = 2 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + a_2 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, s_1, a_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي التالي (نستخدم $M = 100$):

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	a_2	RHS
z	-3	1	-2	0	100	0
s_1	2	1	2	1	0	2
a_2	1	1	2	0	1	4

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.

نضرب الصف الثالث بـ (-100) ونجمعه مع صف دالة الهدف:

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	a_2	RHS	r
z	-103	-99	-202	0	0	-400	
← s_1	2	1	2	1	0	2	$\frac{2}{2}$
a_2	1	1	2	0	1	4	$\frac{4}{2}$

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	a_2	RHS
z	99	2	0	101	0	-198
x_3	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	1
a_2	-1	0	0	-1	1	2

وصلنا للحل الأمثل للبرنامج الخطي الاصطناعي ، وقيمة المتغير الاصطناعي a_2 أكبر من الصفر. لا يوجد حل ممكن للبرنامج الخطي الأصلي.

مثال :

استخدم طريقة M الكبيرة لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

– الحل –

نحول إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 - e_2 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, e_2 \geq 0 \end{aligned}$$

البرنامج الخطي الاصطناعي هو:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 + 4x_2 - 2x_3 + Ma_1 + Ma_2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + a_1 = 2 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 - e_2 + a_2 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3, e_2, a_1, a_2 \geq 0 \end{aligned}$$

ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي التالي (نستخدم $M = 100$):

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	a_1	a_2	RHS
z	-1	-4	2	0	-100	-100	0
a_1	1	2	1	0	1	0	2
a_2	1	2	2	-1	0	1	5

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.

نضرب الصف الثاني والثالث بـ (100) ونجمعهما مع صف دالة الهدف:

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	a_1	a_2	RHS	r
z	199	396	302	−100	0	0	700	
← a_1	1	2	1	0	1	0	2	$\frac{2}{2}$
a_2	1	2	2	−1	0	1	5	$\frac{5}{2}$

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	a_2	RHS	r
z	1	0	104	−100	0	304	
← x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{1/2}$
a_2	0	0	1	−1	1	3	$\frac{3}{1}$

BV	x_1	x_2	x_3	e_2	a_2	RHS
z	−103	−208	0	−100	0	96
x_3	1	2	1	0	0	2
a_2	−1	−2	0	−1	1	1

وصلنا للحل الأمثل للبرنامج الخطي الاصطناعي ، وقيمة المتغير الاصطناعي a_2 أكبر من الصفر. لا يوجد حل ممكن للبرنامج الخطي الأصلي.

مثال :

استخدم طريقة M الكبيرة لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & -x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

– الحل –

نحول إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & -x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, s_2 \ge 0 \end{aligned}$$

البرنامج الخطي الاصطناعي هو:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - Ma_1 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & -x_1 - x_2 + x_3 + a_1 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, s_2, a_1 \ge 0 \end{aligned}$$

ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي التالي (نستخدم $M = 100$):

BV	x_1	x_2	x_3	s_2	a_1	RHS
z	-2	2	-2	0	100	0
a_1	-1	-1	1	0	1	2
s_2	-1	2	1	1	0	1

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.

نضرب الصف الثاني بـ (-100) ونجمعه مع صف دالة الهدف:

BV	x_1	x_2	x_3 ↓	s_2	a_1	RHS	r
z	98	102	-102	0	0	-200	
a_1	-1	-1	1	0	1	2	$\frac{2}{1}$
← s_2	-1	2	1	1	0	1	$\frac{1}{1}$

BV	x_1 ↓	x_2	x_3	s_2	a_1	RHS	r
z	-4	306	0	102	0	-98	
a_1	0	-3	0	-1	1	1	–
x_3	-1	2	1	1	0	1	–

البرنامج الخطي الاصطناعي غير محدود.
لا يوجد حل ممكن للبرنامج الخطي الأصلي.

مثال :

استخدم طريقة M الكبيرة لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + x_2 = 3 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

– الحل –

نحول إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + x_2 = 3 \\ & 2x_1 + 2x_2 + s_2 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

البرنامج الخطي الاصطناعي هو:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -2x_1 + x_2 - 3x_3 + Ma_1 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 2x_1 + x_2 + a_1 = 3 \\ & 2x_1 + 2x_2 + s_2 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, s_2, a_1 \geq 0 \end{aligned}$$

ونحصل على جدول السمبلكس المبدئي التالي (نستخدم $M = 100$):

BV	x_1	x_2	x_3	s_2	a_1	RHS
z	2	−1	3	0	−100	0
a_1	2	1	0	0	1	3
s_2	2	2	0	1	0	2

أولا يجب أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف مساوية للصفر.

نضرب الصف الثاني بـ (100) ونجمعه مع صف دالة الهدف:

BV	x_1	x_2	x_3	s_2	a_1	RHS	r
z	202	99	3	0	0	300	
a_1	2	1	0	0	1	3	$\frac{3}{2}$
s_2	2	2	0	1	0	2	$\frac{2}{2}$

BV	x_1	x_2	x_3	s_2	a_1	RHS	r
z	0	-103	3	-101	0	98	
a_1	0	-1	0	-1	1	1	—
x_1	1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	1	—

البرنامج الخطي الاصطناعي غير محدود.
لا يوجد حل ممكن للبرنامج الخطي الأصلي.