linear programming
OPR213

الحل الجبري للبرامج الخطية
خوارزمية السمبلكس
Simplex Algorithm

(3)

2024

مثال:

استخدم طريقة السمبلكس الجدولية لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned}
&\max \quad z = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 2 \\
&\qquad 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

– الحل –

نحول إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned}
&\max \quad z = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad x_1 + x_2 + s_1 = 2 \\
&\qquad 2x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 3 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \ge 0
\end{aligned}$$

BV	$\downarrow x_1$	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	r
z	-4	2	-3	0	0	0	
s_1	1	1	0	1	0	2	$\frac{2}{1} = 2$
$\leftarrow s_2$	2	2	1	0	1	3	$\frac{3}{2} = 1.5$

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	r
z	0	6	-1	0	2	6	
s_1	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-$
x_1	1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3/2}{1/2} = 3$

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	2	8	0	0	3	9
s_1	1	1	0	1	0	2
x_3	2	2	1	0	1	3

الحل الأمثل:

$$x_1^* = 0 \;,\; x_2^* = 0 \;,\; x_3^* = 3 \;,\; s_1^* = 2 \;,\; s_2^* = 0 \;, \qquad z^* = 9$$

وهو حل أمثل وحيد ، لأن قيم جميع المتغيرات الغير أساسية في صف دالة الهدف لا تساوي الصفر.

مثال:

استخدم طريقة السمبلكس الجدولية لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = -x_1 - x_2 + 2x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 5 \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

– الحل –

نحول إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = -x_1 - x_2 + 2x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& x_1 - 2x_2 + 2x_3 + s_1 = 5 \\
& 2x_1 + x_2 + 2x_3 + s_2 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \ge 0
\end{aligned}$$

BV	x_1 ↓	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	r
z	1	1	−2	0	0	0	
s_1	1	−2	2	1	0	5	$\frac{5}{1} = 5$
← s_2	2	1	2	0	1	4	$\frac{4}{2} = 2$

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	r
z	0	$\frac{1}{2}$	-3	0	$-\frac{1}{2}$	-2	
s_1	0	$-\frac{5}{2}$	1	1	$-\frac{1}{2}$	3	$-$
$\leftarrow x_1$	1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{2}{1/2}$

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	-1	0	-4	0	-1	-4
s_1	5	0	6	1	2	13
x_2	2	1	2	0	1	4

الحل الأمثل:

$$x_1^* = 0 \ , \ x_2^* = 4 \ , \ x_3^* = 0 \ , \ s_1^* = 13 \ , \ s_2^* = 0 \ , \quad z^* = -4$$

وهو حل أمثل وحيد ، لأن قيم جميع المتغيرات الغير أساسية في صف دالة الهدف لا تساوي الصفر.

مثال :

استخدم طريقة السمبلكس الجدولية لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\max \quad z = 4x_1 + 2x_2 - 2x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &\le 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

– الحل –

نحول إلى الشكل القياسي:

$$\max \quad z = 4x_1 + 2x_2 - 2x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + s_1 \quad &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \quad + s_2 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

BV	$\downarrow x_1$	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	r
z	-4	-2	2	0	0	0	
$\leftarrow s_1$	2	-1	2	1	0	2	$\frac{2}{2} = 1$
s_2	2	1	2	0	1	3	$\frac{3}{2} = 1.5$

BV	x_1	x_2 ↓	x_3	s_1	s_2	RHS	r
z	0	-4	6	2	0	4	
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	1	—
← s_2	0	2	0	-1	1	1	$\frac{1}{2}$

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	0	0	6	0	2	6
x_1	1	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

الحل الأمثل:

$$x_1^* = \frac{5}{4} \ , \ x_2^* = \frac{1}{2} \ , \ x_3^* = 0 \ , \ s_1^* = 0 \ , \ s_2^* = 0 \ , \quad z^* = 6$$

يوجد حلول مثلى متعددة لأن معامل المتغير الغير أساسي s_1 في صف دالة الهدف يساوي الصفر.

لإيجاد حل أمثل آخر:

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	r
z	0	0	6	0	2	6	
$\leftarrow x_1$	1	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5/4}{1/4}$
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	—

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	0	0	6	0	2	6
s_1	4	0	4	1	1	5
x_2	2	1	2	0	1	3

الحل الأمثل الآخر:

$$x_1^* = 0 \;,\; x_2^* = 3 \;,\; x_3^* = 0 \;,\; s_1^* = 5 \;,\; s_2^* = 0 \;,\quad z^* = 6$$

مثال:

استخدم طريقة السمبلكس الجدولية لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\min \quad z = -3x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &\le 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

– الحل –

نحول إلى الشكل القياسي:

$$\min \quad z = -3x_1 + 3x_2 - 2x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + s_1 \qquad &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad + s_2 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

BV	x_1 ↓	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	r
z	3	−3	2	0	0	0	
← s_1	2	−2	2	1	0	2	$\frac{2}{2} = 1$
s_2	2	2	1	0	1	3	$\frac{3}{2} = 1.5$

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	0	0	-1	$-\frac{3}{2}$	0	-3
x_1	1	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	1
s_2	0	4	-1	-1	1	1

الحل الأمثل:

$$x_1^* = 1 \;\;,\;\; x_2^* = 0 \;\;,\;\; x_3^* = 0 \;\;,\;\; s_1^* = 0 \;\;,\;\; s_2^* = 1 \;\;,\qquad z^* = -3$$

يوجد حلول مثلى متعددة لأن معامل المتغير الغير أساسي x_2 في صف دالة الهدف يساوي الصفر.

لإيجاد حل أمثل آخر:

BV	x_1	$x_2 \downarrow$	x_3	s_1	s_2	RHS	r
z	0	0	-1	$-\frac{3}{2}$	0	-3	
x_1	1	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	1	—
$\leftarrow s_2$	0	4	-1	-1	1	1	$\frac{1}{4}$

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	0	0	-1	$-\frac{3}{2}$	0	-3
x_1	1	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$
x_2	0	1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

الحل الأمثل الآخر:

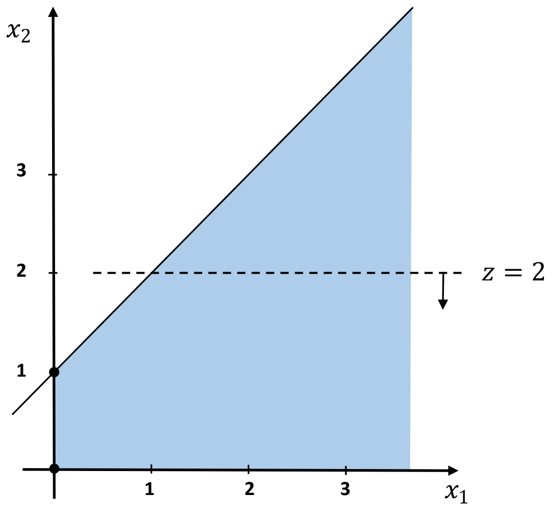
$$x_1^* = \frac{5}{4} \;\; , \;\; x_2^* = \frac{1}{4} \;\; , \;\; x_3^* = 0 \;\; , \;\; s_1^* = 0 \;\; , \;\; s_2^* = 0 \;\; , \qquad z^* = -3$$

وجود حلول مثلى متعددة

مثال:

لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & -x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



الرسم البياني فقط للتوضيح

نحول البرنامج إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & -x_1 + x_2 + s_1 = 1 \\ & x_1, x_2, s_1 \geq 0 \end{aligned}$$

جدول السمبلكس المبدئي له كما يلي:

BV	z	x_1	x_2	s_1	RHS
z	1	0	−1	0	0
s_1	0	−1	1	1	1

الحل الأمثل: $z^* = 0 \qquad x_1^* = 0, \quad x_2^* = 0, \quad s_1^* = 1,$

نلاحظ أن معامل المتغير الغير أساسي x_1 في صف دالة الهدف يساوي الصفر.
هذا يعني أنه بالإمكان أن نختاره ليصبح متغيراً أساسياً بدون أن تتغير قيمة دالة الهدف. أي أنه لدينا حل أمثل آخر.

BV	z	x_1	x_2	s_1	RHS	r
z	1	0	-1	0	0	
s_1	0	-1	1	1	1	$-$

الحل الأمثل الآخر:

$$x_1^* \geq 0, \quad x_2^* = 0, \quad s_1^* = 1, \qquad z^* = 0$$

مجموعة الحلول المثلى غير محدودة.

مثال:

استخدم طريقة السمبلكس الجدولية لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \leq 3 \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

– الحل –

نحول إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & -x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 3 \\ & 2x_1 - 2x_2 + x_3 + s_2 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

BV	x_1	x_2 ↓	x_3	s_1	s_2	RHS	r
z	−2	−3	3	0	0	0	
← s_1	−1	1	1	1	0	3	$\frac{3}{1} = 3$
s_2	2	−2	1	0	1	4	—

BV	x_1 ↓	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	r
z	−5	0	6	3	0	9	
x_2	−1	1	1	1	0	3	—
s_2	0	0	3	2	1	10	—

دالة الهدف غير محدودة ($z^* \to +\infty$) .

لا يوجد متغير أساسي سيخرج ، أي يمكن زيادة قيمة المتغير x_1 إلى ما لا نهاية وتستمر قيمة دالة الهدف في التحسن.

مثال:

استخدم طريقة السمبلكس الجدولية لحل البرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& x_1 - x_2 \le 2 \\
& -2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 3 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

– الحل –

نحول إلى الشكل القياسي:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& x_1 - x_2 + s_1 = 2 \\
& -2x_1 + 2x_2 + x_3 + s_2 = 3 \\
& x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

BV	x_1 ↓	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	r
z	4	-2	3	0	0	0	
← s_1	1	-1	0	1	0	2	$\frac{2}{1} = 2$
s_2	-2	2	1	0	1	3	–

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	r
z	0	2	3	−4	0	−8	
x_1	1	−1	0	1	0	2	–
← s_2	0	0	1	2	1	7	$\frac{7}{1}$

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	r
z	0	2	0	−10	−3	−29	
x_1	1	−1	0	1	0	2	–
x_3	0	0	1	2	1	7	–

دالة الهدف غير محدودة ($z^* \to -\infty$) .

لا يوجد متغير أساسي سيخرج ، أي يمكن زيادة قيمة المتغير x_2 إلى ما لا نهاية وتستمر قيمة دالة الهدف في التحسن.

مثال:

استخدم طريقة السمبلكس الجدولية لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\max \quad z = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 \qquad\quad &\leq 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + \quad x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

– الحل –

نحول إلى الشكل القياسي:

$$\max \quad z = 4x_1 - 2x_2 + 3x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 \qquad\quad + s_1 \qquad &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + \quad x_3 \qquad + s_2 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

BV	x_1 ↓	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	r
z	-4	2	-3	0	0	0	
← s_1	1	1	0	1	0	2	$\frac{2}{1} = 2$
s_2	2	2	1	0	1	4	$\frac{4}{2} = 2$

(كان يمكن إخراج المتغير s_2)

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	r
z	0	6	−3	4	0	8	
x_1	1	1	0	1	0	2	−
$\leftarrow s_2$	0	0	1	−2	1	0	$\frac{0}{1}=0$

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	r
z	0	6	0	−2	3	8	
$\leftarrow x_1$	1	1	0	1	0	2	$\frac{2}{1}=2$
x_3	0	0	1	−2	1	0	−

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	2	8	0	0	3	12
s_1	1	1	0	1	0	2
x_3	2	2	1	0	1	4

الحل الأمثل:

$$x_1^* = 0 \ , \ x_2^* = 0 \ , \ x_3^* = 4 \ , \ s_1^* = 2 \ , \ s_2^* = 0 \ , \qquad z^* = 12$$

المسألة غير منتظمة لوجد حل أساسي غير منتظم ، أي يوجد متغير أساسي قيمته تساوي الصفر.