مقرر 322 بحث

تمارين #8

(الفصل الرابع 4.6.1-4.5)

سؤال #1: في ن.ن.م لدينا البيانات التالية :

دالة الكثافة الاحتمالية للطلب خلال الوقت المتقدم هي
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{50}, & 0 < x \leq 50 \\ 0, & \text{عدا ذلك} \end{cases}$$

كذلك فإن:

D=10000 وحدة في السنة، h=2 دولار للوحدة في السنة، g=3 دولار للوحدة في السنة، K=20 دولار لكل طلبية. أوجد القيم المثلى من الطلبية ونقطة إعادة الطلب.

الحل:

$$\bar{S} = \int_0^\infty E\{S(X)\} = \int_R^\infty (x-R)f(x)dx = \int_R^{50} \frac{1}{50}(x-R)dx = \frac{R^2}{100} - R + 25$$

$$\boxed{E(x) = \int_0^{50} x\frac{1}{50}dx = 25}$$

$$\int_R^\infty f(x)dx = \frac{hy}{gD}$$

$$\Longrightarrow \int_R^{50} \frac{1}{50}dx = \frac{hy}{gD} \Rightarrow R = \frac{-50\,hy}{gD} + 50$$

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{2D[k+g.E(x)]}{h}} = \sqrt{\frac{2\times 10000(20+3\times 25)}{2}} = 974.679$$

$$\tilde{y} = \frac{gD}{h} = \frac{3\times 10000}{2} = 15000$$

بما أن $\tilde{y} > \hat{y}$ فيوجد حل أمثل وحيد نستطيع الحصول عليه كالتالي:

$$y = y_1 = \sqrt{\frac{2DK}{h}} = \sqrt{\frac{2\times 10000\times 20}{2}} = 447.214$$

$$R_1 = \frac{-50\times 2\times 447.214}{3\times 10000} + 50 = 48.509$$

$$\bar{S}_1 = \frac{48.509^2}{100} - 48.509 + 25 = 0.022$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{2D(k+g.\bar{S})}{h}} = \sqrt{\frac{2\times 10000(20+3\times 0.022)}{2}} = 447.951$$

$$R_2 = \frac{-50 \times 2 \times 447.951}{3 \times 10000} + 50 = 48.507$$

$$\bar{S}_2 = \frac{48.507^2}{100} - 48.507 + 25 = 0.020$$

$$y_3 = \sqrt{\frac{2 \times 10000(20 + 3 \times 0.020)}{2}} = 447.884$$

$$R_3 = \frac{-50 \times 2 \times 447.884}{3 \times 10000} + 50 = 48.507$$

يمكننا التوقف الآن بما أن $R_2 \approx R_3$ ، والقيم المثلى لـ y و R هما :

$y^* = y_3 = 447.884$ وحدة ، و $R^* = R_3 = 48.507$ وحدة.

و أقل تكلفة مقابل ذلك هي:

$$TCU(y^*, R^*) = \frac{Dk}{y} + h\left[\frac{y}{2} + R - E(x)\right] + g\bar{S}\frac{D}{y} = 942.916$$

سؤال 2#: أوجد القيم المثلى لكل من الطلبية ونقطة إعادة الطلب في ن.م.م بالبيانات نفسها الواردة في تمرين 1 إلا أن الطلب يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 100 وحدة في الشهر وانحراف معياري يساوي 2 وحدة في الشهر

K=20 g=3 h=2 D=10000

K	g	h	D
20	3	2	10000

الحل:

الطلب يتبع التوزيع الطبيعي $x \sim N(100,2)$ شهريا

$$\mu_y = 12 * 100 = 1200, \qquad \sigma_y^2 = 4 * 12 = 48, \qquad \sigma_y = \sqrt{48}$$

$$x = \mu + \sigma \cdot z \Rightarrow z = \frac{x - \mu}{\sigma}, \qquad z_R = \frac{R - \mu}{\sigma} \Rightarrow \mu - R = -z_R \cdot \sigma$$

$$\bar{S} = \int_R^\infty (x - R) f(x) dx = \int_{z_R}^\infty (\mu + \sigma z - R)\phi(z)\sigma dz \qquad Note: dx = \sigma \cdot dz$$

$$= \sigma(\mu - R)\int_{z_R}^\infty \phi(z)dz + \sigma^2 \int_{z_R}^\infty z\phi(z)dz$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\int_z^{\infty} \phi(t)dt = 1 - \Phi(z) \\ \int_z^{\infty} t.\phi(t)dt = \phi(z)\end{array}}$$

$$= \sigma(\mu - R)(1 - \Phi(z_R)) + \sigma^2\phi(z_R) \;=\; \sigma(-z_R \cdot \sigma)(1 - \Phi(z_R)) + \sigma^2\phi(z_R)$$

$$= -z_R\sigma^2(1 - \Phi(z_R)) + \sigma^2\phi(z_R) = \sigma^2(\phi(z_R) - \; z_R(1 - \Phi(z_R))$$

$$= 2^2\left(\phi\left(\frac{R-1200}{\sqrt{48}}\right) - \left(\frac{R-1200}{\sqrt{48}}\right)\left(1 - \Phi\left(\frac{R-1200}{\sqrt{48}}\right)\right)\right)$$

$$\int_R^{\infty} f(x)dx = \frac{hy}{gD} \Longrightarrow 1 - \; \Phi(z_R) = \frac{hy}{gD} \;\Longrightarrow \Phi\left(\frac{R-1200}{\sqrt{48}}\right) = 1 - \frac{hy}{gD} \;\Longrightarrow\; R$$

$$= \left(\sqrt{48} \times \Phi^{-1}\left(1 - \frac{hy}{gD}\right)\right) + 1200$$

$$\hat{y} = \sqrt{\frac{2D[k + g.E(x)]}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 10000(20 + 3 \times 1200)}{2}} = 6016.644$$

$$\tilde{y} = \frac{gD}{h} = \frac{3 \times 10000}{2} = 15000$$

بما أن $\tilde{y} > \hat{y}$ فيوجد حل أمثل وحيد نستطيع الحصول عليه كالتالي:

$$y \;=\; y_1 = \sqrt{\frac{2DK}{h}} = \sqrt{\frac{2 \times 10000 \times 20}{2}} = 447.214$$

$$R_1 = \left(\sqrt{48} \times \Phi^{-1}\left(1 - \frac{hy}{gD}\right)\right) + 1200$$

$$= \left(\sqrt{48} \times \Phi^{-1}\left(1 - \frac{2 \times 447.214}{3 \times 10000}\right)\right) + 1200$$

$$= \left(\sqrt{48} \times \Phi^{-1}(0.970)\right) + 1200 = \left(\sqrt{48} \times 1.88\right) + 1200$$

$$= 1213.025$$

$$\bar{S}_1 = 48\left(\phi\left(\frac{1213.025-1200}{\sqrt{48}}\right) - \left(\frac{1213.025-1200}{\sqrt{48}}\right)\left(1-\Phi\left(\frac{1213.025-1200}{\sqrt{48}}\right)\right)\right)$$

$$= 48\big(\phi(1.88) - (1.88)(1-\Phi(1.88)\big)$$

$$= 48(0.068 - (1.88)(1-0.970)) = 0.5568$$

$$y_2 = \sqrt{\frac{2D(k+g.\bar{S})}{h}} = \sqrt{\frac{2\times 10000(20+3\times 0.5568)}{2}} = 465.515$$

$$R_2 = \left(\sqrt{48}\times\Phi^{-1}\left(1-\frac{2\times 465.515}{3\times 10000}\right)\right) + 1200 = \left(\sqrt{48}\times\Phi^{-1}(0.969)\right) + 1200$$

$$= \left(\sqrt{48}\times 1.866\right) + 1200 = 1212.928$$

$$\frac{1212.928\text{-}1200}{\sqrt{48}} = 1.866$$

$$\bar{S}_2 = 48\big(\phi(1.866) - (1.866)(1-\Phi(1.866)\big) = 48(0.070 - (1.866)(1-0.969))$$

$$= 0.5834$$

$$y_3 = \sqrt{\frac{2D(k+g.\bar{S})}{h}} = \sqrt{\frac{2\times 10000(20+3\times 0.5834)}{2}} = 466.371$$

$$R_2 = \left(\sqrt{48}\times\Phi^{-1}\left(1-\frac{2\times 466.371}{3\times 10000}\right)\right) + 1200 = \left(\sqrt{48}\times\Phi^{-1}(0.969)\right) + 1200$$

$$= \left(\sqrt{48}\times 1.866\right) + 1200 = 1212.928$$

يمكننا التوقف الآن بما أن $R_2 \approx R_3$ ، والقيم المثلى ل y و R هما :
$y^* = y_3 = 466.371$ وحدة ، و $R^* = R_3 = 1212.928$ وحدة.
وأقل تكلفة مقابل ذلك هي:

$$TCU(y^*,R^*) = \frac{Dk}{y} + h\left[\frac{y}{2} + R - E(x)\right] + g\bar{S}\frac{D}{y}$$
$$= \frac{10000 \times 20}{466.371} + 2 \times \left[\frac{466.371}{2} + 1212.928 - 1200\right]$$
$$+ 3 \times 0.5834 \times \frac{10000}{466.371} = 958.598$$

سؤال 3#: في دراسة حديثة أجريت على سلعة موسمية وجد أن تكلفة شراء الوحدة تقدر ب 80 دولار وتباع بـ 120 دولار، أما في حالة عدم بيع هذه السلعة فيمكن إعادتها إلى المورد واسترداد 20 دولار لكل وحدة معادة. كذلك فقد وجد أن التوزيع الاحتمالي لاستهلاك هذه السلعة معطى كما في الجدول التالي:

عدد الوحدات	1	2	3	4	5	6	7	8
الاحتمال	0.05	0.10	0.15	0.20	0.20	0.15	0.1	0.05

1) ماهي الكمية المثلى الواجب شراؤها لهذا الموسم والتي تحقق أكبر ربح ممكن وماهي القيمة المتوقعة لهذا الربح بافتراض أنه يمكن إهمال تكلفة الطلبية.

2) أعد فقرة (1) بأخذ $\vartheta = 40$ و $\vartheta = 5$ لكل وحدة معادة.

الحل:

$$C = 80, S = 120, \vartheta = 20$$

لحل المسألة نستخدم قانون نموذج فترة واحدة مع عدم السماح بالعجز وإهمال تكلفة الطلبية لدالة طلب ذات توزيع منفصل

بإيجاد التوزيع المجمع F(D) :

عدد الوحدات	1	2	3	4	5	6	7	8
الاحتمال	0.05	0.15	0.3	0.5	0.7	0.85	0.85	1

القيمة المثلى q^* يجب أن تحقق $F(q^*-1) \leq \frac{S-C}{S-\vartheta} \leq F(q^*)$

1) تعويضًا من القيم في السؤال:

$$\frac{S - C}{S - \vartheta} = \frac{120-80}{120-20} = 0.4$$
$$F(3) \leq 0.4 \leq F(4)$$

لذا فإن الكمية المثلى الواجب شراؤها $q^* = 4$

ولحساب الربح:

$$E\{P(q)\} = \sum_{D=q+1}^{\infty}[q(S - C)]f(D) + \sum_{D=0}^{q}[DS + \vartheta(q-D) - Cq]f(D)$$

$$E\{P(q^*)\} = \sum_{D=5}^{8}[4(120 - 80)]f(D) + \sum_{D=0}^{q}[120D + 20(4-D) - 320]f(D)$$

$$= \sum_{D=5}^{8} 160\, f(D) + \sum_{D=0}^{4} 100\, D\, f(D) - \sum_{D=0}^{4} 240\, f(D) = 110$$

(2

- $\vartheta = 40$

$$\frac{S - C}{S - \vartheta} = \frac{120 - 80}{120 - 40} = 0.5$$

$$F(3) \le 0.5 \le F(4)$$

لذا فإن الكمية المثلى الواجب شراؤها $q^* = 4$

والربح المتوقع

$$= \sum_{D=5}^{8}[4(120 - 80)]f(D) + \sum_{D=0}^{q}[120D + 40(4-D) - 320]f(D)$$

$$= \sum_{D=5}^{8} 160\, f(D) + \sum_{D=0}^{4} 80\, D\, f(D) - \sum_{D=0}^{4} 160\, f(D) = 120$$

- $\vartheta = 5$

$$\frac{S - C}{S - \vartheta} = \frac{120 - 80}{120 - 5} = 0.3478$$

$$F(3) \le 0.3478 \le F(4)$$

لذا فإن الكمية المثلى الواجب شراؤها $q^* = 4$

والربح المتوقع

$$= \sum_{D=5}^{8}[4(120 - 80)]f(D) + \sum_{D=0}^{q}[120D + 5(4-D) - 320]f(D)$$

$$= \sum_{D=5}^{8} 160\, f(D) + \sum_{D=0}^{4} 115\, D\, f(D) - \sum_{D=0}^{4} 315\, f(D) = 95$$

سؤال 4#: وجد أن الطلب على سلعة موسمية يتبع التوزيع المنتظم فوق الفترة [3000،7000] يمكن شراء القيمة الوحدة بقيمة 50 دولار وبيعها بقيمة 90 دولار ولكن المورد لا يقبل رد أي وحدة غير مباعة مما يؤدي عندئذ إلى خسارة كاملة لقيمتها.

والمطلوب:

(أ) ما هو عدد الوحدات الواجب شراؤها من هذه السلعة وما هو الربح المتوقع عندئذ.

(ب) أعد السؤال السابق (أ) بافتراض أن الطلب على السلعة يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 5000 وحدة وانحراف معياري 2000 وحدة. (أوجدي فقط الكمية المثلى للطلب)

الحل:

$$C = 50, \qquad S = 90, \qquad \vartheta = 0$$

لحل المسألة نستخدم قانون نموذج فترة واحدة مع عدم السماح بالعجز وإهمال تكلفة الطلبية لدالة طلب ذات توزيع متصل

لإيجاد الكمية المثلى q^* يجب أن تحقق المعادلة:

$$F(q^*) = Pr(D \le q^*) = \frac{S - C}{S - \vartheta} = \frac{90 - 50}{90 - 0} = 0.4444$$

أ) دالة الكثافة الاحتمالية والتوزيع التراكمي للتوزيع المنتظم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

إذًا في حالة x يتبع التوزيع المنتظم *[3000,7000]*:

$$f_D(x) = \begin{cases} \frac{1}{4000} & 3000 \le x \le 7000 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F_D(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x - 3000}{4000} & 3000 \le x \le 7000 \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$F(q^*) = \frac{q^* - 3000}{4000} = 0.4444 \Longrightarrow q^* = 0.4444(4000) + 3000 \cong 4778$$

إذا الكمية المثلى للطلب هي تقريبًا 4778 وحدة

ولحساب الربح المتوقع لهذه الكمية :

$$E\{P(q^*)\} = \int_{q^*}^{\infty} [q^*(S - C)]\, f_D(x)dx + \int_0^{q^*} [\, x\, S + \vartheta(q^* - x) - Cq^*]\, f_D(x)dx$$

$$E\{P(q^*)\} = \int_{4778}^{7000} [4778(90-50)]\, \frac{1}{4000}\, dx$$
$$+ \int_{3000}^{4778} [90x + 0(4778-x) - 50(4778)]\, \frac{1}{4000}\, dx$$
$$= \frac{4778 \times 40}{4000} \int_{4778}^{7000} dx + \frac{90}{4000} \int_{3000}^{4778} x\, dx - \frac{50 \times 4778}{4000} \int_{3000}^{4778} dx$$
$$47.78(7000-4778) + 0.0225\left(\frac{4778^2 - 3000^2}{2}\right) - 59.725(4778-3000)$$
$$= 155555.555$$

ب)

$$F(q^*) = P(D \le q^*) = 0.4444 \Longrightarrow P\left(\frac{D-5000}{2000} \le \frac{q^* - 5000}{2000}\right) = 0.4444$$
$$\Longrightarrow P\left(Z \le \frac{q^* - 5000}{2000}\right) = 0.4444 \Longrightarrow \frac{q^* - 5000}{2000} = \Phi^{-1}(0.444) = -0.14$$
$$\Longrightarrow q^* = -0.14 \times 2000 + 5000 = 4720$$

سؤال #5: وجد أن الطلب على سلعة موسمية يتبع التوزيع المنتظم في الفترة [100 , 500] . فما هو عدد الوحدات الواجب شراؤها من هذه السلعة بحيث يتحقق أكبر ربح موسمي من هذه السلعة وماهي القيمة المتوقعة لهذا الربح إذا كان C=60 ريال، S=80 ريال، $\vartheta = 10$ ريال.

الحل:

لحل المسألة نستخدم قانون نموذج فترة واحدة مع عدم السماح بالعجز وإهمال تكلفة الطلبية لدالة طلب ذات توزيع متصل

لإيجاد الكمية المثلى q^* يجب أن تحقق المعادلة:

$$F(q^*) = Pr(D \le q^*) = \frac{S - C}{S - \vartheta} = \frac{80 - 60}{80 - 10} = 0.285$$

إذاً في حالة x يتبع التوزيع المنتظم *[100,500]*:

$$f_D(x) = \begin{cases} \frac{1}{400} & 100 \le x \le 500 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$F_D(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x - 100}{400} & 100 \le x \le 500 \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$$F(q^*) = \frac{q^* - 100}{400} = 0.285 \Longrightarrow q^* = 0.285(400) + 100 \cong 214$$

إذا الكمية المثلى للطلب هي تقريبًا *214* وحدة

ولحساب الربح المتوقع لهذه الكمية :

$$E\{P(\ q\ )\} = \int_{q^*}^{\infty} [q^*(S\ -\ C)]\ f_D(x)dx + \int_0^{q^*} [\ x\ S + \vartheta(q^* - x) - Cq^*]\ f_D(x)dx$$

$$E\{P(\ q^*)\} = \int_{214}^{500} [214(80 - 60)]\ \frac{1}{400}\ dx$$

$$+ \int_{100}^{214} [80x + 10(214 - x) - 60(214)] \frac{1}{400} dx$$

$$\frac{4280}{400}\int_{214}^{500} dx + \frac{70}{400}\int_{100}^{214} x\ dx - \frac{10700}{400}\int_{100}^{214} dx$$

$$10.7(500 - 214) + 0.175\left(\frac{214^2 - 100^2}{2}\right) - 26.75(214 - 100) = 3142.85$$