OR 100 — بحث ١٠٠

Operations Research : مقدمة في بحوث العمليات

* بحوث العمليات هي فرع من الرياضيات يختص بتطبيم العلوم والأساليب العلمية لحل مشكلات اتخاذ القرار للوصول إلى أفضل حل (الحل الأمثل) optimum solution.

Optimization الأمثلية — طرق البحث عن الحل الأمثل

← البرمجة الرياضية: Mathematical programming

① البرمجة الخطية: Linear programming

مكونات النموذج (البرنامج) الرياضي:

١- متغيرات القرار Decision variables — عددها n

٢- دالة الهدف Objective function

٣- القيود Constraints — عددها m

+ شرط عدم السالبية متغيرات القرار ≥ صفر

← الحل الممكن feasible solution
أي نقطة تنتمي لمنطقة الحلول الممكنة (تقاطع القيود)

الشكل العام للنموذج الخطي:

$$\min / \max \quad Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

subject to

$$\begin{aligned}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n &\leq b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n &\leq b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n &\leq b_m
\end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 \quad , \; i = 1, 2, \cdots, n$$

Model building بناء النماذج

١- تحديد متغيرات القرار (القيم المطلوب ايجاد قيم لها)

٢- تحديد دالة الهدف max / min

٣- تحديد الشروط (القيود):

$\geq$	$\leq$	$=$
الطلب على منتج	الموارد المتوفرة:	بالضبط
(على الأقل)	(على الأكثر)	بالتحديد
(الحد الأدنى)	(الحد الأقصى)	
(ليس أقل من)	(ليس أكثر من)	

أمثلة: مثال ١:

إدارة التسويق بإحدى الشركات لديها الخيار ما بين الإعلان من خلال مجلات من طراز الكلاسيكية ويشاهدها بالمتوسط ٤ مليون شخص لكل إعلان أسبوعيا أو من خلال مجلة الأسبوعية ويطلع عليها بالمتوسط ٢ مليون شخص.

فإذا كانت تكلفة الإعلان الكلاسيكي ٧٥٠٠ ريال بينما تكلفة الإعلان بالمجلة ٤٠٠٠ ريال، وكانت ميزانية الإعلانات خلال العام التي تضعها الشركة ٢٠٠٠٠٠ ريال، والشركة ترغب بالوصول إلى إعلان بالمجلة على الأقل بكم الإعلان يجب وضعه من كل من الكلاسيكي والمجلة خلال العام للحصول على أكبر عدد من المشاهدين.

← متغيرات القرار:

x عدد الإعلانات بالكلاسيكي خلال العام

y " " " المجلة " "

← دالة الهدف: أكبر عدد من المشاهدين (مليون شخص)

$$\max Z = 4x + 2y$$

← القيود: الميزانية

$$7500x + 4000y \leq 200000$$

الإعلانات بالمجلة

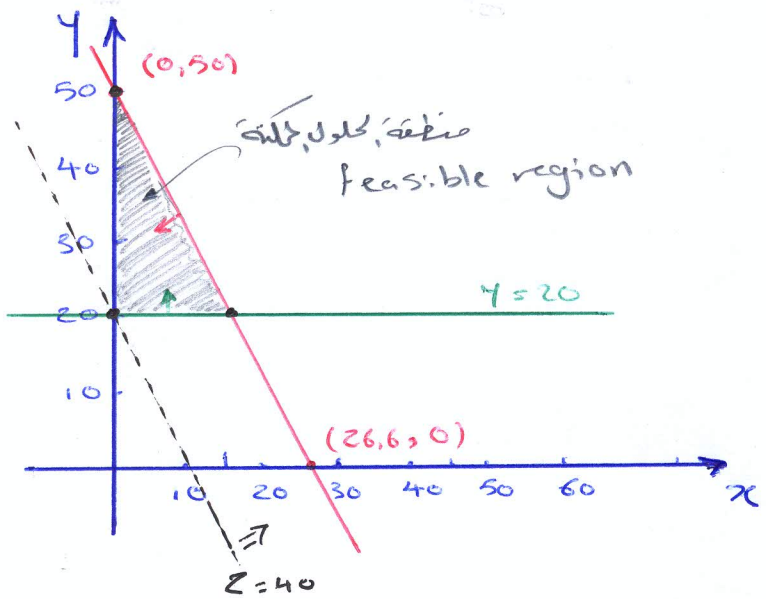
$$y \geq 20$$

المثال البياني: $\max Z = 4x + 2y$

subject to

$$75x + 40y \leq 2000 \quad (1)$$

$$y \geq 20 \quad (2)$$



الحل البياني:

(1) $75x + 40y = 2000$

$x = 0 \Rightarrow y\text{-int} = 50$

$y = 0 \Rightarrow x\text{-int} = \frac{80}{3} = 26.6$

(2) $y = 20$

حل المعادلتين (1) و (2)

$y = 20 \Rightarrow 75x + 40(20) = 2000$

$75x = 1200 \Rightarrow x = 16$

نقاط الركن: Extreme points

$(0, 20) \Rightarrow Z = 40$

$(0, 50) \Rightarrow Z = 100$

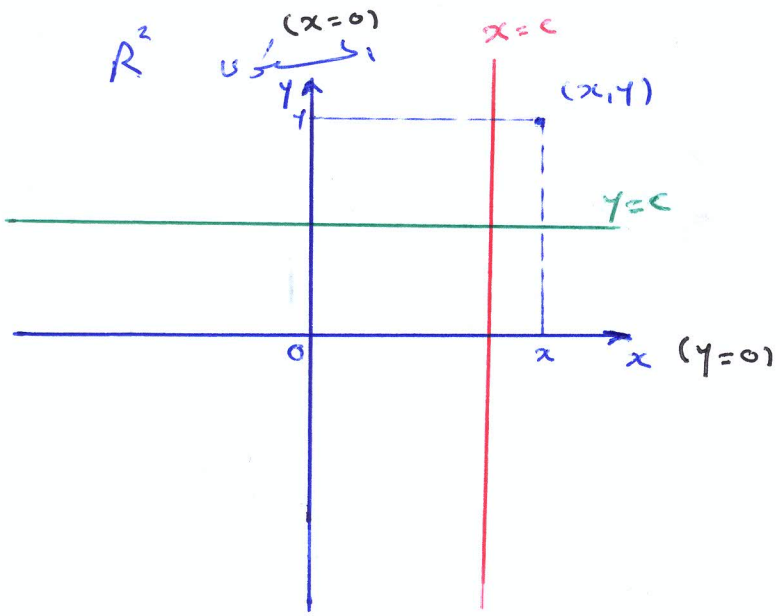
$(16, 20) \Rightarrow \boxed{Z = 104}$

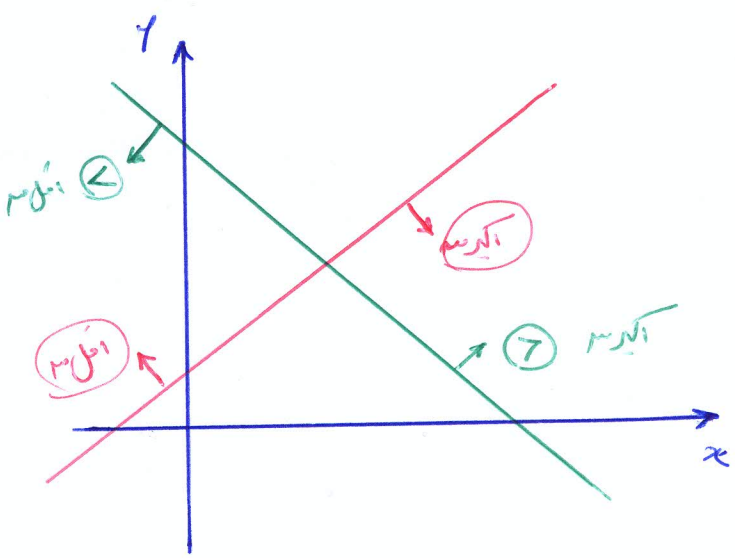
الحل الأمثل:

$Z = 101 \Leftarrow x = 16, y = 20$

---

* الحالة العامة:





مثال 2:

تقوم شركة دهنية بتصنيع نوعين من الزيوت، الزيتان I و II يستعمل لصناعة هذين النوعين مادتين أساسيتين A و B. الحد الأقصى المتوافر من المادة A هو 12 طن يوميا بينما الحد الأقصى المتوافر من المادة B 16 طن يوميا. الحاجة اليومية بالطن من الزيت الخام واللازمة لانتاج طن واحد من كلا النوعين I و II بالإضافة إلى الربح المتوقع ملخصة كما بالجدول:

المواد \ الزيوت	I	II	
A	2	4	12
B	4	2	16
الربح	1200 SR	800 SR	

وقد تبين من الدراسة التي أجراها قسم التسويق أنه الطلب على النوع I لا يتجاوز مجال من الأحوال 3 أطنان من الطلب على النوع II وأنه الطلب على النوع II لا يتجاوز 2 طن يوميا.

كم طن يوميا يجب أن تنتجها الشركة من كلا النوعين لتكون أرباحها أكبر ما يمكن

← متغيرات القرار:

x_1 عدد الأطنان المنتجة يوميا من النوع I

x_2 II ~ ~ ~ ~ ~ ~

← دالة الهدف: الأرباح

$Z = 1200 x_1 + 800 x_2$

← القيود:

$2x_1 + 4x_2 \leq 12$ - الحد الأقصى المتوفر من المادة A

$4x_1 + 2x_2 \leq 16$ - الحد الأقصى المتوفر من المادة B

$x_1 \leq 3 + x_2$ - الطلب على النوع I لا يتجاوز 3 أطنان من الطلب على النوع II

$x_2 \leq 2$ - الطلب على النوع II

التوزيع الرياضي :

$$\max \quad Z = 1200\,x_1 + 800\,x_2$$

subject to

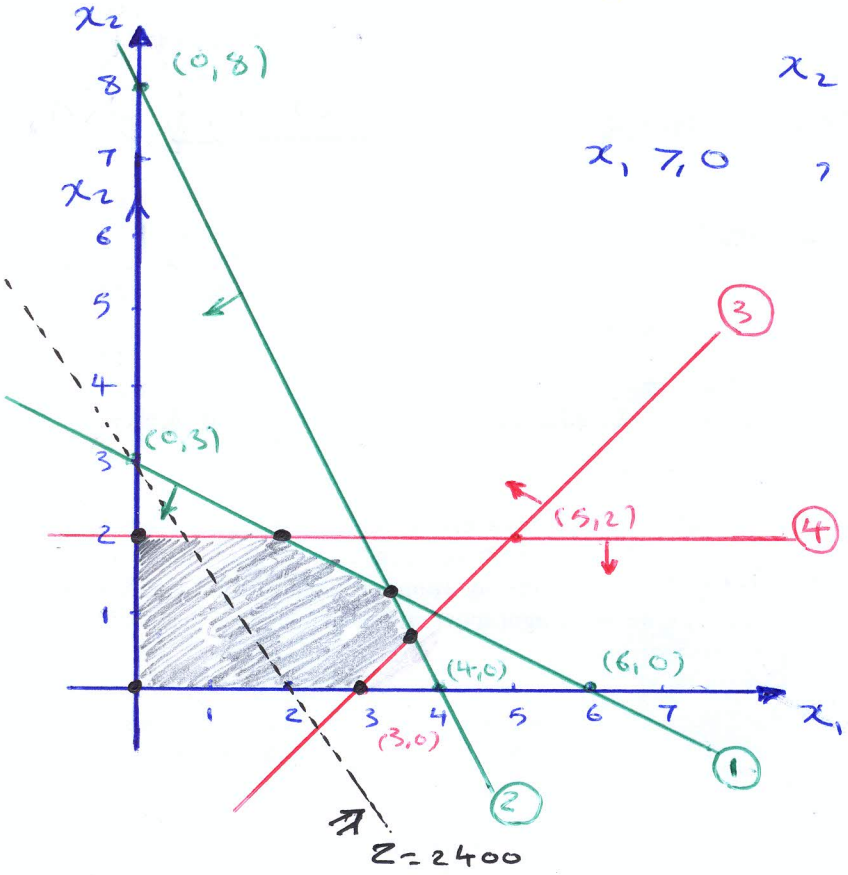
$$2x_1 + 4x_2 \leq 12 \quad (1)$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 16 \quad (2)$$

$$x_1 - x_2 \leq 3 \quad (3)$$

$$x_2 \leq 2 \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0 \;,\; x_2 \geq 0$$



الحل البياني :

① $2x_1 + 4x_2 = 12$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 3$

$x_2 = 0 \quad x_1 = 6$

② $4x_1 + 2x_2 = 16$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 8$

$x_2 = 0 \quad x_1 = 4$

③ $x_1 - x_2 = 3$

$x_1 = 0 \quad x_2 = -3$??

$x_1 = 5 \quad x_2 = 2$

$x_2 = 0 \quad x_1 = 3$

نقاط الزوايا :

$(0,0) \longrightarrow Z = 0$

$(0,2) \longrightarrow Z = 1600$

$(2,2) \longrightarrow Z = 4000 \leftarrow$

تقاطع ① و ④

$x_2 = 2$

$2x_1 + 4(2) = 12$

$2x_1 = 4 \quad x_1 = 2$

$\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right) \longrightarrow Z = 5066.6 \leftarrow$

الحل الأمثل

تقاطع ① و ②

$2x_1 + 4x_2 = 12$

$4x_1 + 2x_2 = 16$

بضرب ① * 2 والطرح :

$4x_1 + 8x_2 = 24$

$-4x_1 + 2x_2 = 16$

$6x_2 = 8 \quad x_2 = \frac{4}{3}$

بالتعويض في ① $x_1 = \frac{10}{3}$

$\left(\frac{11}{3}, \frac{2}{3}\right) \longrightarrow Z = 4933.3 \leftarrow$

تقاطع ② و ③

$4x_1 + 2x_2 = 16$

$x_1 - x_2 = 3 \quad * 2$

$6x_1 = 22 \quad x_1 = \frac{11}{3}$

بالتعويض في ③ $x_2 = \frac{2}{3}$

$(3,0) \longrightarrow Z = 3600$

كما يلي

المطلوب تكوين النموذج الرياضي فقط :

(١) أحد مصانع تغذية يقوم بتحديد وجبة تكون من نوعين الغذاء P و S
كل أوقية من P تحتوي على ٢ وحدة دهون و ١ وحدة واحدة كربوهيدرات
و ٤ وحدة بروتين - كل أوقية من S تحتوي على ٣ وحدة دهون و ٣ وحدة
كربوهيدرات و ٣ وحدة بروتين - تحتاج الوجبة على الأقل ١٨ وحدة
دهون و ١٢ وحدة كربوهيدرات و ٢٤ وحدة بروتين .
فإذا كانت تكلفة P = ٥٠ هللة / أوقية و تكلفة S = ٥٥ هللة / أوقية
من أي نوعين من الغذاء P و S تكون وجبة لتكون بأقل تكلفة .

(٢) مصنع صغير يستخدم عمال محترفين وعمال مبتدئين
لتصنيع سلعة ذات جودة عالية وسلعة عادية
تصنيع القطعة الواحدة من السلعة الممتازة يتطلب ٢ ساعة من العامل المحترف
و ٤ ساعات من العامل المبتدئ - تصنيع القطعة الواحدة من السلعة العادية
يتطلب ساعة عمل واحدة من العامل المحترف و ٣ ساعات من العامل المبتدئ
علماً أن المصنع لا يعمل العامل الواحد أكثر من ٨ ساعات يومياً .
مع العلم بأن الربح الصافي للقطعة الواحدة من السلعة الممتازة 200 ريال
ومن السلعة العادية 150 ريال .

* انواع الحلول باستخدام الرسم البياني :

① حل وحيد
② حدود لانهائي من الحلول
③ حل غير محدود
④ لا يوجد حل ممكن

تمارين

استخدم طريقة الرسم لحل كل مسألة :

(1) max $Z = 3x_1 + 4x_2$

subject to

$$x_1 - x_2 \leq -1$$
$$-x_1 + x_2 \leq 0$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

---

(2) max $Z = 8x_1 + x_2$

subject to

$$8x_1 + x_2 \leq 8$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$3x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 6x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

---

(3) max $Z = 4x_1 + 5x_2$

subject to

$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 1$$
$$4x_1 - x_2 \geq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$