Exercise

تمرين : تمتلك شركه مصنعين للانتاج حيث تبلغ الطاقة الانتاجيه 100 و 110 وحدة في الاسبوع للمنتج على التوالي. و يتم شحن هذه الوحدات الى 3 مستودعات مختلفة تتطلب 80 و 70 و 60 وحدة في الاسبوع على التوالي.
الجدول التالي يوضح تكاليف النقل بين المصنع و المستودع (بالدولار) لكل وحدة .

Destination / Sources	D_1	D_2	D_3 j n	Supply
S_1	1	2	3	100
S_2	4	1	5	110
Demand	80	70	60	

A- أوجد افضل كميه للوحدات المنتجه لتامين متطلبات المستودعات بأقل التكاليف؟ (باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي)

x_{ij} : عدد الوحدات المنتجة المنقولة من المصنع i إلى المستودع j حيث $i = 1,2\ ;\ j = 1,2,3$

لدينا مسألة نقل متزنة حيث ان $\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j = 210$ $\quad m = 2, n = 3\ ;$

Answer:

$$\text{Min } Z = x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + x_{22} + 5x_{23}$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 100$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 110$$
$$x_{11} + x_{21} \ge 80$$
$$x_{12} + x_{22} \ge 70$$
$$x_{13} + x_{23} \ge 60$$
$$x_{ij} \ge 0$$

Min $Z = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$
s.t
$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i \quad i = 1,..,m$
$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j \quad j = 1,..,n$

Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply		
S_1	1 80	2 20	3	100	20	0
S_2	4	1 50	5 60	110	60	0
Demand	80	70	60			
	0	50 0	0			

عدد الخلايا المملوءه (متغيرات اساسية) بقيم غير سالبة 4 والتي تكافئ الشرط $m + n - 1 = 2 + 3 - 1 = 4$
اذا الحل يعتبر احد الحلول الاساسية الممكنة:

$$x_{11} = 80,\ x_{12} = 20,\ x_{22} = 50,\ x_{23} = 60$$
$$Z = 80 * 1 + 20 * 2 + 50 * 1 + 60 * 5 = \mathbf{470\$}$$

لاختبار امثليه الحل الاساسي باستخدام طريقة التوزيع المعدل (Modified distribution)

$$\boldsymbol{\delta_{ij}} = v_j + u_i - \boldsymbol{C_{ij}}$$

		$V_1=1$	$V_2=2$	$V_3=6$	
	Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply
$U_1=0$	S_1	1 80	- 2 20	3 + $\delta_{13}= 3$	100
$U_2=-1$	S_2	4 $\delta_{21}= -4$	+ 1 50	- 5 60	110
	Demand	80	70	60	

- Let $u_1=0$, we get
- $c_{11} = u_1 + v_1 \Rightarrow$ $v_1 = c_{11} - u_1 \Rightarrow$ $v_1 = 1 - 0 = 1$
- $c_{12} = u1 + v2 \Rightarrow$ $v2 = c12 - u1 \Rightarrow$ $v2 = 2 - 0 = 2$
- $c_{22} = u2 + v2 \Rightarrow$ $u2 = c22 - v2 \Rightarrow$ $u2 = 1 - 2 = -1$
- $c_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow$ $v_3 = c_{23} - u_2 \Rightarrow$ $v_3 = 5 + 1 = 6$

		$V_1= 1$	$V_2= -1$	$V_3= 3$	
	Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply
$U_1= 0$	S_1	1 80	2 $\delta_{12}= -3$	3 20	100
$U_2= 2$	S_2	4 $\delta_{21}= -1$	1 70	5 40	110
	Demand	80	70	60	

نلاحظ ان جميع $\delta_{ij} \le 0$ ، لذا فالحل امثل .

$$X_{11} = 80,\ \ X_{13} = 20,\ \ X_{22} = 70,\ X_{23} = 40$$

$$Z = 80 * 1 + 20 * 3 + 70 * 1 + 40 * 5 = 410\$$$

H.W

B- اعد حل المسأله بالفقره A بعد إستبدال الطاقه الانتاجيه من المنشأه الثانيه إلى 130 بدلاً من 110.

Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	1	2	3	100
S_2	4	1	5	130
Demand	80	70	60	230 / 210

Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	D_4(Dummy)	Supply
S_1	1	2	3	0	100
S_2	4	1	5	0	130
Demand	80	70	60	20	230=230

		$V_1=1$	$V_2=2$	$V_3=6$	$V_4=-1$				
	Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	D_4(Dummy)	Supply			
$U_1=0$	S_1	1 80	- 2 20	+ 3 $\delta_{13}= 3$	0 $\delta_{14}= 1$	100	20	0	
$U_2=-1$	S_2	4 $\delta_{21}= -4$	+ 1 50	- 5 60	0 20	130	80	20	0
	Demand	80	70	60	20				
		0	50	0	0				
			0						

		$V_1= 1$	$V_2= -1$	$V_3= 3$	$V_4= -2$	
	Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	D_4(Dummy)	Supply
$U_1= 0$	S_1	1 80	2 $\delta_{12}= -3$	3 20	0 $\delta_{14}=-2$	100
$U_2= 2$	S_2	4 $\delta_{21}= -1$	1 70	5 40	0 20	110
	Demand	80	70	60	20	

نلاحظ ان جميع $\delta_{ij} \leq 0$ ، لذا فالحل امثل .

$$X_{11} = 80,\ X_{13} = 20,\ X_{22} = 70,\ X_{23} = 40$$
$$Z = 80 * 1 + 20 * 3 + 70 * 1 + 40 * 5 = 410\$$$

C- اعد حل المسأله بالفقرة B بعد إستبدال طلبات المستودعات إلى 90 و 80 و 100 .

Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	1	2	3	100
S_2	4	1	5	130
Demand	90	80	100	230 / 270

لدينا مسألة نقل غير متزنة حيث ان $\sum_{i=1}^{m} S_i \neq \sum_{j=1}^{n} d_j \ggg 230 \neq 270$

نحتاج اضافه مصنع وهمي و الطاقة الإنتاجية له تساوي $S_\Delta = \sum_{j=1}^{n} d_j - \sum_{i=1}^{m} S_i$

وتكلفه النقل من Δ صفر الى المستودع j تساوي الصفر

		$V_1 = 1$	$V_2 = 2$	$V_3 = 6$			
	Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply		
$U_1 = 0$	S_1	1 90	- 2 10	+ 3 $\delta_{13} = 3$	100	10	0
$U_2 = -1$	S_2	4 $\delta_{21} = -4$	+ 1 70	- 5 60	130	60	0
$U_3 = -6$	S_3 (Dummy)	0 $\delta_{12} = -5$	0 $\delta_{12} = -4$	0 40	40	0	
	Demand	90	80	100	270 / 270		
		0	70 0	40 0			

		$V_1 = -3$	$V_2 = -4$	$V_3 = 0$	
	Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply
$U_1 = 3$	S_1	1 90	2 $\delta = -3$	3 10	100
$U_2 = 5$	S_2	4 $\delta_{21} = -2$	1 80	5 50	130
$U_3 = 0$	S_3 (Dummy)	0 $\delta_{12} = -3$	0 $\delta_{12} = -4$	0 40	40
	Demand	90	80	100	270 / 270

نلاحظ ان جميع $\delta_{ij} \leq 0$ ، لذا فالحل امثل .

تمرين : يمكن لشركة طيران داخلية شراء الوقود النفاث من محطتين، وتحتاج شركة الطيران للشهر المقبل في كل مطار من مطاراتها الثلاثة التي تخدم فيها إلى 100,000 جالون في المطار 1 ، و 180,000 جالون في المطار 2 و 350,000 جلون في المطار 3. ويمكن لكل محطة الإمداد بالوقود لكل مطار بالأسعار (سنت لكل جالون) الموضحة بالجدول التالي:

إلى / من	المطار 1	المطار 2	المطار 3
المحطة 1	92	89	90
المحطة 2	91	91	95

ومع ذلك لكل محطة طاقة انتاجية تستطيع الامداد بها خلال شهر، وهي 330,000 جالون للمحطة الاولى و 280,000 للمحطة الثانية. حدد سياسة الشراء التي ستفي بإحتياجات شركة الطيران بأقل تكلفة كلية.

الحل: باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply
S_1	92	89	90	330,000
S_2	91	91	95	280,000
Demand	100,000	180,000	350,000	610,000 / 630,000

x_{ij} : عدد الجالونات المنقولة شهرياً من المحطة i إلى المطار j . $i = 1,2$; $j = 1,2,3$

بما ان اجمالي الطلب (630,000) لا يساوي اجمالي الإمداد (610,000)، لذا نحتاج اضافة نقطة إمداد إضافية (محطة وهمية) يكون مقدار الامداد عندها 20,000 جالون وتكلفة النقل منها إلى اي مطار تساوي الصفر.

$min(S_i, d_j) = x_{ij}$

Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply	
S_1	92 100,000	89 180,000	90 50,000	330,000	230,000 50,000 0
S_2	91	91	95 280,000	280,000	0
S_3 *(dummy)*	0	0	0 20,000	20,000	0
Demand	100,000	180,000	350,000	630,000	
	0	0	300,000 20,000 0		

عدد الخلايا المملوءه (متغيرات اساسية) بقيم غير سالبة 5 والتي تكافئ الشرط $m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$

اذا الحل يعتبر احد الحلول الاساسية الممكنة:

$x_{11} = 100,000\,;\ x_{12} = 180,000\,;\ x_{13} = 50,000\,;\ x_{23} = 280,000\,;\ x_{33} = 20,000\,;$
$Z = 56,320000$ سنت

الخطوات: 1- نحسب الاوزان v_j و u_i لكل خلية اساسية حيث ان $v_j + u_i = C_{ij}$
2- نحسب $\boldsymbol{\delta_{ij} = v_i + u_j - C_{ij}}$ لكل خلية غير اساسية. فإذا كانت جميع $\delta_{ij} \le 0$ فإن الحل أمثل.
3- نكون حلقة التحوير بحيث تبدأ باكبرقيمة موجبة δ_{ij} ونوزع الاشارات + و- بالتبادل على خلايا الحلقة.
4- نحدد θ وهي أصغر قيمة ذات اشاره سالبه، بحيث تضاف للخلايا الموجبة وتطرح من الخلايا السالبة.
5- نكرر الخطوات حتى نحصل على الحل الامثل.

		V_1= 92	V_2= 89	V_3= 90	
	Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply
U_1= 0	S_1	- 92 100,000	89 180,000	+ 90 50,000	330,000
U_2= 5	S_2	+ 91 δ_{21}= 6	91 δ_{22}= 3	- 95 280,000	280,000
U_3= - 90	S_3 *(dummy)*	0 δ_{31}= 2	0 δ_{32}= -1	0 20,000	20,000
	Demand	100,000	180,000	350,000	630,000

Let $u_1 = 0$
- $c_{11} = u_1 + v_1 \Rightarrow v_1 = 92 - 0 = 92$
- $c_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow v_2 = 89 - 0 = 89$
- $c_{13} = u_1 + v_3 \Rightarrow v_3 = 90 - 0 = 90$
- $c_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow u_2 = 95 - 90 = 5$
- $c_{33} = u_3 + v_3 \Rightarrow u_3 = 0 - 90 = -90$

		V_1= - 4	V_2= -1	V_3= 0	
	Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply
U_1= 90	S_1	92 δ_{11}= - 6	- 89 180,000	+ 90 150,000	330,000
U_2= 95	S_2	91 100,000	+ 91 δ_{22}=3	- 95 180,000	280,000
U_3= 0	S_3 *(dummy)*	0 δ_{31}= -4	0 δ_{32}=-1	0 20,000	20,000
	Demand	100,000	180,000	350,000	630,000

Let $v_3 = 0$
- $c_{13} = u_1 + v_3 \Rightarrow u_1 = 90 - 0 = 90$
- $c_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow v_2 = 89 - 90 = -1$
- $c_{23} = u_2 + v_3 \Rightarrow u_2 = 95 - 0 = 95$
- $c_{21} = u_2 + v_1 \Rightarrow v_1 = 91 - 95 = -4$
- $c_{33} = u_3 + v_3 \Rightarrow u_3 = 0 - 0 = 0$

		V_1= 89	V_2= 89	V_3= 90	
	Destination / Sources	D_1	D_2	D_3	Supply
U_1= 0	S_1	92 δ_{11}= -3	89 0	90 330,000	330,000
U_2= 2	S_2	91 100,000	91 180,000	95 δ_{23}= -3	280,000
U_3= -90	S_3 *(dummy)*	0 δ_{31}= -1	0 δ_{32}= -1	0 20,000	20,000
	Demand	100,000	180,000	350,000	630,000

Let $u_1 = 0$

- $c_{12} = u_1 + v_2 \Rightarrow v_2 = 89 - 0 = 89$
- $c_{22} = u_2 + v_2 \Rightarrow u_2 = 91 - 89 = 2$
- $c_{21} = u_2 + v_1 \Rightarrow v_1 = 91 - 2 = 89$
- $c_{13} = u_1 + v_3 \Rightarrow v_3 = 90 - 0 = 90$
- $c_{33} = u_3 + v_3 \Rightarrow u_3 = 0 - 90 = -90$

بما انه يوجد خلية مملوءة بالقيمة صفر فإن الحل الاساسي الممكن منحل (degenerate).

نلاحظ ان جميع $\delta_{ij} \leq 0$ ، لذا فالحل امثل .

$$x_{13} = 330,000\ ;\ \ x_{21} = 100,000\ ;\ \ x_{22} = 180,000\ ;\ \ x_{33} = 20,000$$

$$Z = 90 \times 330000 + 91 \times 100000 + 91 \times 180000 + 0 \times 20000 = 55180000$$ سنت

H.W

1) ترغب شركة إنتاج الحديد والصلب بنقل منتجاتها من أماكن الإنتاج إلى اماكن الطلب، فإذا تقدمت اليها شركة النقل بالجدول التالي والذي يوضح تكلفة نقل الطن الواحد من مناطق الإنتاج إلى اماكن الطلب.

Destination / Sources	مكة (D_1)	أبها (D_2)	الظهران (D_3)	جيزان (D_4)	Supply
جدة (S_1)	4	5	5	7	100
الرياض (S_2)	8	4	4	8	80
تبوك (S_3)	3	6	6	10	120
Demand	80	60	100	60	

المطلوب : ماهي الكميات التي يجب نقلها من مدن الانتاج لتحقيق الكميات المطلوبة وفي نفس الوقت يحقق اقل تكاليف ممكنة؟