تمارين_3_

تمرين1: مصنع ينتج نوعين من المنتجات بحيث تمر على آلتين للانتاج وعدد الساعات المتاحه لكل آله يومياً هي 8 ساعات . المنتج الاول يتطلب ساعتين في الآله (1) و ساعه واحده في الآله (2) وربح الوحدة منه $30 . بينما المنتج الثاني يتطلب ساعة واحده في الآله (1) و ثلاث ساعات في الآله (2) وربح الوحدة منه $20 .
المطلوب:

1- **صياغة هذه المشكلة في صورة برنامج خطي لتعظيم أرباح المصنع و ايجاد الحل الامثل بيانياً.**
2- **اوجد تحليل الحساسيه لمعاملات داله الهدف ؟**
3- **اوجد تحليل الحساسيه للطرف الايمن للقيود الخطيه واسعار الظل ؟**

Book: Operations Research, Hamdy Taha _ page 123

الهدف: ايجاد برنامج يحقق اكبر ربح للمصنع.
لنفترض ان:
x_1: عدد الوحدات المنتجة يومياً من المنتج الاول.
x_2: عدد الوحدات المنتجة يومياً من المنتج الثاني.
البرنامج الخطي:

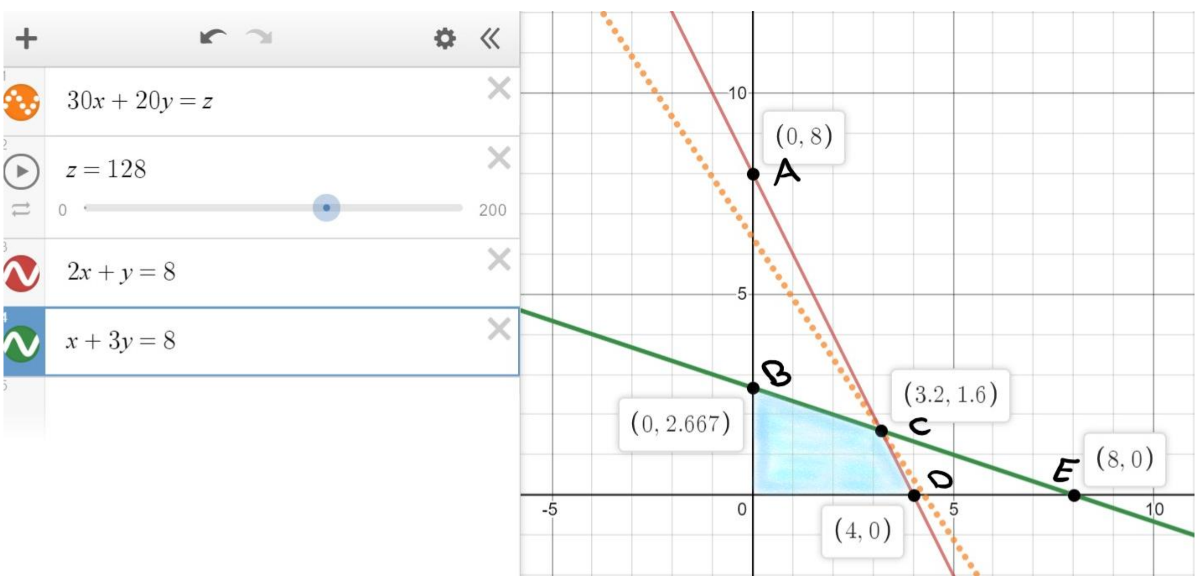
$$\boldsymbol{Max \quad Z = 30x_1 + 20x_2}$$

Constraints:

$$\boldsymbol{2x_1 + x_2 \leq 8 \qquad (\, Machine\ 1)}$$

$$\boldsymbol{x_1 + 3x_2 \leq 8 \qquad (Machine\ 2)}$$

$$\boldsymbol{x_1, x_2 \geq 0}$$



https://www.desmos.com/calculator/8m8qxodwaq

اذا يوجد حل امثل وحيد(فريد) عند النقطة (C) $x_1^* = 3.2\,,\ x_2^* = 1.6$ و القيمة المثلى لدالة الهدف هي Z=128

تحليل الحساسيه لمعاملات داله الهدف:

لا يتغير الحل الامثل اذا كان ميل دالة الهدف محصور بين ميل القيود التي تحقق الحل الامثل.

$$-2 < slope\ z < \frac{-1}{3} \quad \gg \quad -2 < \frac{-C_1}{C_2} < \frac{-1}{3} \quad \gg \quad \frac{1}{3} < \frac{C_1}{C_2} < 2$$

لتحديد مجال C_1 دون ان يتغير الحل الامثل

$$\frac{1}{3} < \frac{C_1}{20} < 2$$
$$6.67 < C_1 < 40$$

لتحديد مجال C_2 دون ان يتغير الحل الامثل

$$\frac{1}{3} < \frac{30}{C_2} < 2$$
$$\frac{1}{2} < \frac{C_2}{30} < 3$$
$$15 < C_2 < 90$$

تحليل الحساسيه للطرف الايمن للقيود الخطيه واسعار الظل

$2x_1^* + x_2^* = 8 \quad (Machine\ 1)$ قيد رابط، مورد نادر

$x_1^* + 3x_2^* = 8 \quad (Machine\ 2)$ قيد رابط، مورد نادر

قيد الاله الاولى

اقصى زيادة اقتصادية لساعات عمل الاله الاولى، نحصل عليها بإزاحة القيد إلى النقطة E: (8,0) ليصبح

$$\boldsymbol{2x_1 + x_2 \leq 16}$$

والحل الامثل الجديد سيكون : $\boldsymbol{x_1^* = 8}\ ,\ \boldsymbol{x_2^* = 0}\ ,\ \boldsymbol{z^*} = 240$

اقصى زياده اقتصاديه لزمن قيد الآله الاولى هي $\boldsymbol{16 - 8 = 8\ hr}$

سعر الظل لقيد الاله الاولى (القيمة الاقتصاديه لسعر اضافه ساعه واحده للاله الاولى) =

$$\frac{240 - 128}{8} = 14\ \$$$

قيد الاله الثانية

اقصى زيادة اقتصادية لساعات عمل الاله الثانية، نحصل عليها بإزاحة القيد إلى النقطة A: (0,8) ليصبح

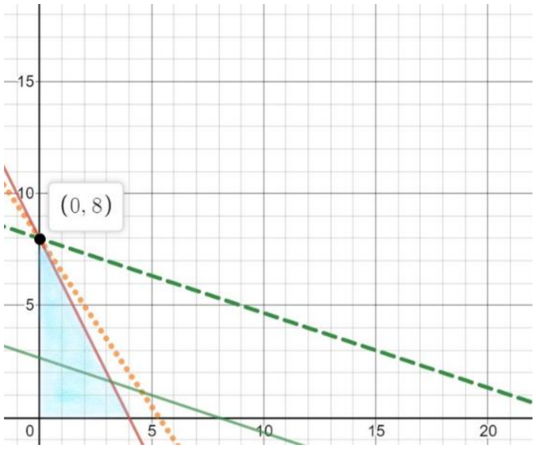
$$\boldsymbol{x_1 + 3x_2 \leq 24}$$

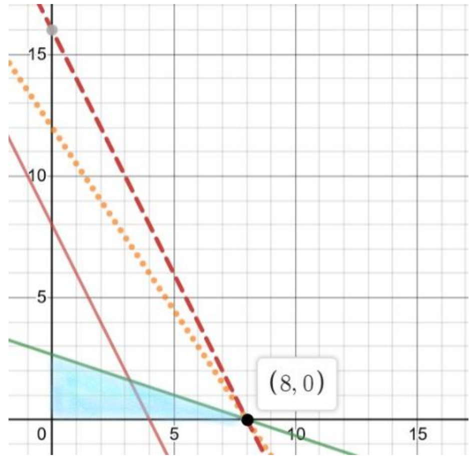
والحل الامثل الجديد سيكون : $\boldsymbol{x_1^* = 0}\ ,\ \boldsymbol{x_2^* = 8}\ ,\ \boldsymbol{z^*} = 160$

اقصى زياده اقتصاديه لزمن قيد الآله الثانية هي $\boldsymbol{24 - 8 = 16\ hr}$

سعر الظل لقيد الاله الثانية =

$$\frac{160 - 128}{16} = 2\ \$$$





تمرين2: للبرنامج الخطي التالي:

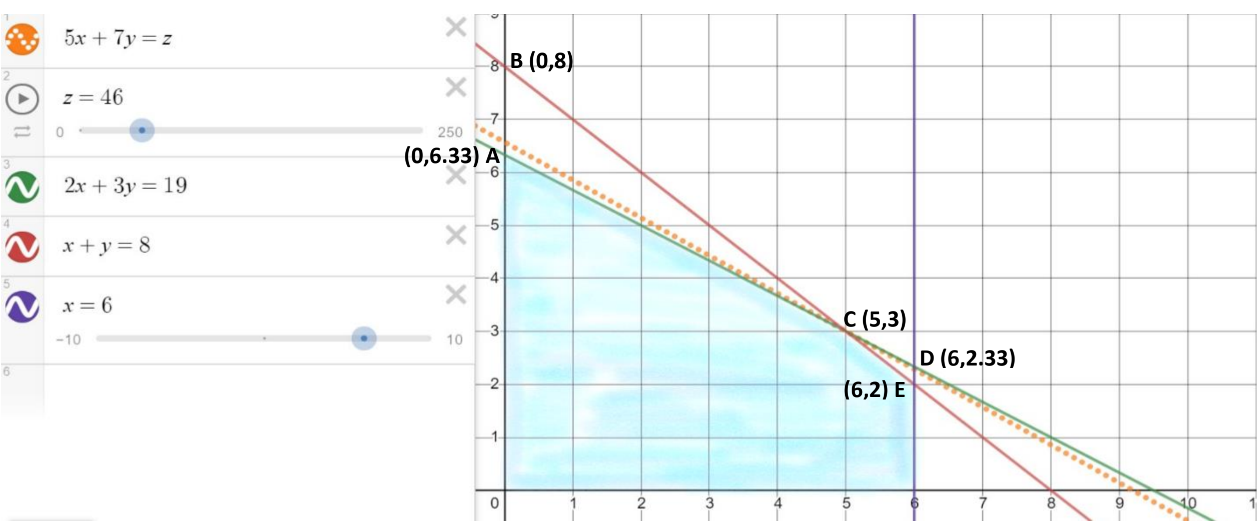
$$Max \quad Z = 5x_1 + 7x_2$$

Constraints:

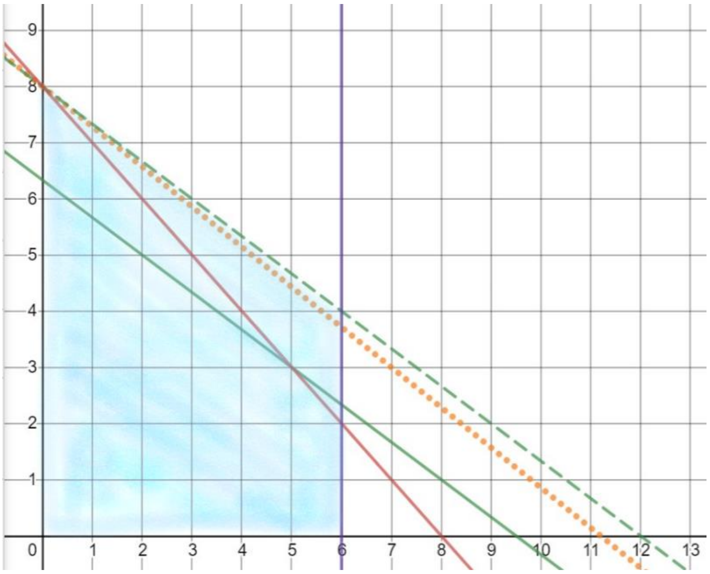
$$x_1 \le 6$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 19$$
$$x_1 + x_2 \le 8$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

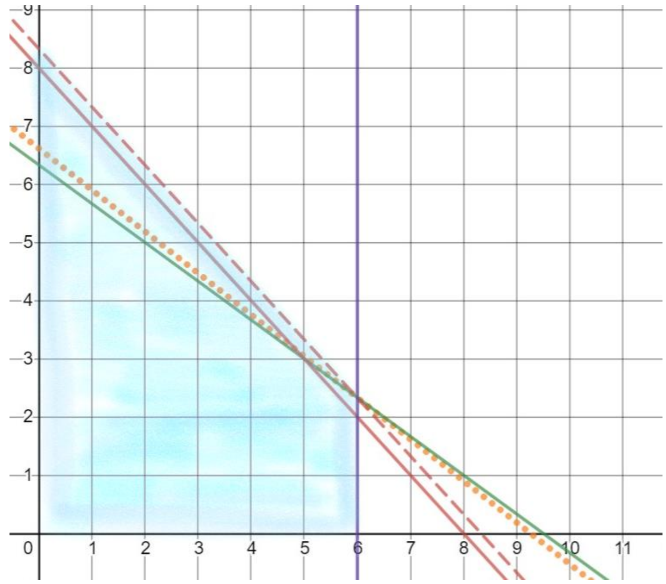
1- ايجاد الحل الامثل بيانياً.
2- اوجد تحليل الحساسيه لمعاملات داله الهدف .
3- اوجد تحليل الحساسيه للطرف الايمن للقيود الخطيه واسعار الظل .

https://www.desmos.com/calculator/zrwojljtxm



اذا يوجد حل امثل وحيد(فريد) عند النقطة (C) $x_1^* = 5$, $x_2^* = 3$ و القيمة المثلى لدالة الهدف هي Z= 46





تحليل الحساسيه لمعاملات داله الهدف

$$-1 < \frac{-C_1}{C_2} < \frac{-2}{3} \qquad \gg \frac{2}{3} < \frac{C_1}{C_2} < 1$$

لتحديد مجال C_1 دون ان يتغير الحل الامثل

$$\frac{2}{3} < \frac{C_1}{7} < 1$$

$$4.67 < C_1 < 7$$

لتحديد مجال C_2 دون ان يتغير الحل الامثل

$$\frac{2}{3} < \frac{5}{C_2} < 1$$

$$1 < \frac{C_2}{5} < \frac{3}{2}$$

$$5 < C_2 < 7.5$$

تحليل الحساسيه للطرف الايمن للقيود الخطيه واسعار الظل

قيد غيررابط، مورد متوفر $x_1^* = 5 \leq 6$

قيد رابط، مورد نادر $2x_1^* + 3x_2^* = 19$

قيد رابط، مورد نادر $x_1^* + x_2^* = 8$

القيد النادر(2):

اقصى زيادة اقتصادية نحصل عليها بإزاحة القيد (2) إلى النقطة B (0,8) ليصبح

$$2x_1 + 3x_2 \leq 24$$

والحل الامثل الجديد سيكون : $x_1^* = 0 \quad , \quad x_2^* = 8 \quad , \quad z^* = 56$

اقصى زياده اقتصاديه للقيد هي $24 - 19 = 5$

سعر الظل للقيد (2) =

$$\frac{56 - 46}{5} = 2\ \$$$

القيد النادر(3):

اقصى زيادة اقتصادية نحصل عليها بإزاحة القيد (3) إلى النقطة D (6, 2.33) ليصبح

$$x_1 + x_2 \leq 8.33$$

والحل الامثل الجديد سيكون : $x_1^* = 6 \quad , \quad x_2^* = 2.33 \quad , \quad z^* = 46.31$

اقصى زياده اقتصاديه لقيد الآله الثانية هي $8.33 - 8 = 0.33$

سعر الظل للقيد (3) =

$$\frac{46.31 - 46}{0.33} = 0.9 \ \$$$

القيد الوفير(1):

لانقاص المورد الوفير بحيث يبقى الحل الامثل دون تغيير بإزاحة القيد بإتجاه الحل الامثل حتى يصل إلى نقطة الحل الأمثل.

اي ان يصل للنقطة C (5, 3) ، ليصبح القيد $x_1 \le 5$

مقدار النقص $6 - 5 = 1$

سعر الظل للقيد (1) =

$$\frac{46 - 46}{1} = 0 \ \$$$

H.W

تمرين3: للبرنامج الخطي التالي:

1- Max $Z = 300X_1 + 400X_2$

Subject to

$5X_1 + 4X_2 \le 200$ $\quad 5X_1 + 4X_2 = 200$ >> (0,50) and (40,0)

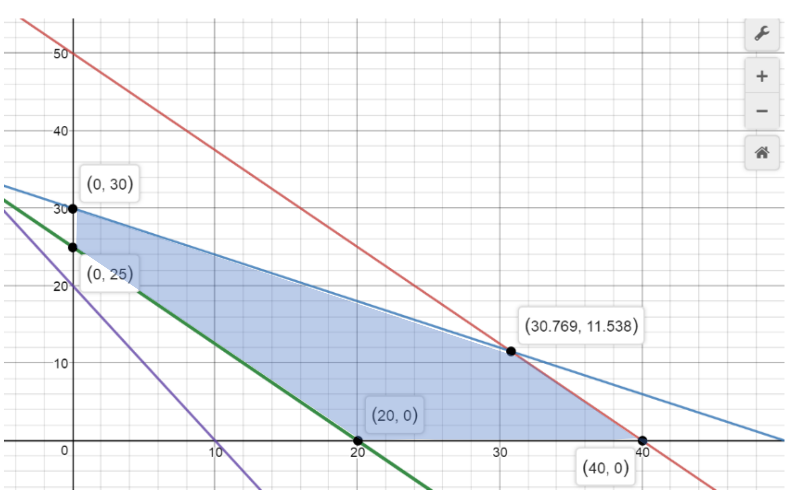
$3X_1 + 5X_2 \le 150$ $\quad$ >> (0,30) and (50,0)

$5X_1 + 4X_2 \ge 100$ $\quad$ >> (0,25) and (20,0)

$8X_1 + 4X_2 \ge 80$ $\quad$ >> (0,20) and (10,0)

$X_1 \ge 0, X_2 \ge 0$

1- **ايجاد الحل الامثل بيانياً.**
2- **اوجد تحليل الحساسيه لمعاملات داله الهدف .**
3- **اوجد تحليل الحساسيه للطرف الايمن للقيود الخطيه واسعار الظل .**
4- اذا تغيرت دالة الهدف للنموذج السابق الى $Z = 350\ X_1 + 300\ X_2$ ، فهل يبقى الحل الامثل ثابتاً او يتغير ؟؟



(X_1, X_2)	Z
(0,25)	10000
(0,30)	12000
(30.769,11.538)	13846.1
(40,0)	6000
(20,0)	12000

Exercise

1- Max $Z = 5X_1 + 4X_2$

Subject to

$6X_1 + 4X_2 \leq 24$

$X_1 + 2X_2 \leq 6$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

أ- اوجدي الصوره القياسيه للبرنامج الخطي.

ب- حددي جميع الحلول الممكنه ، وصنفيها اذا ماكان الحل ممكن او غير ممكن .

ت- اوجدي الحل الامثل من بين الحلول الممكنه.

ث- تحققي باستخدام الرسم البياني ان الحل بالفقره (ت) هو حل امثل للبرنامج الخطي.

The standard form

Max $Z = 5X_1 + 4X_2$

Subject to

$6X_1 + 4X_2 + \boldsymbol{S_1} = 24$

$X_1 + 2X_2 + \boldsymbol{S_2} = 6$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, S_1 \geq 0, S_2 \geq 0$ (S is slack variable)

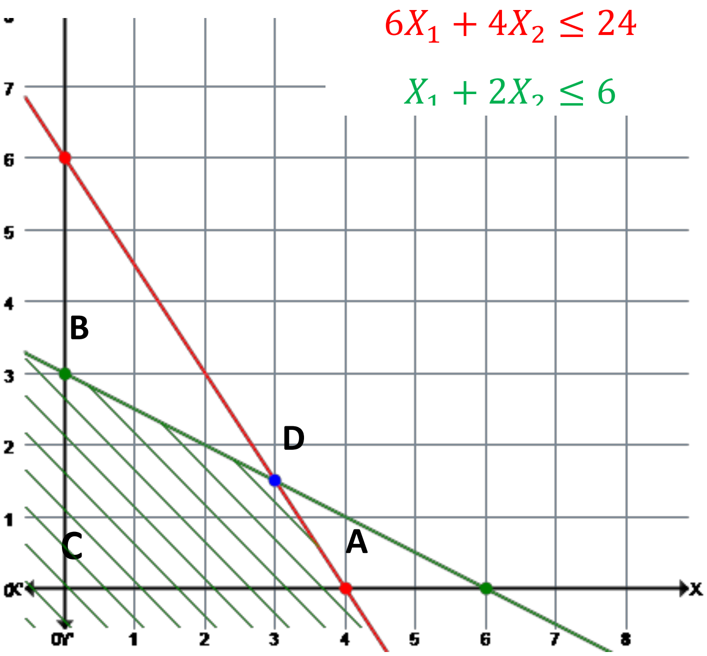
عدد المعادلات **m=2** وعدد المتغيرات **n=4**، عدد المتغيرات الغير اساسية **n-m=2** (التي تاخذ القيمه صفر) .

عدد الحلول الاساسيه

$$\binom{n}{m} = \binom{4}{2} = 6$$

ملاحظه: ليس بالضروره ان تكون جميع الحلول الاساسيه هي حلول ممكنه.

Non-basic Variables	Basic Variables	Basic Solution X_1, X_2, S_1, S_2	Feasibility Status	Extreme point	Objective Value
S_1, S_2	X_1, X_2	3 , 1.5 , 0 , 0	Feasible	D	21
S_2, X_2	X_1, S_1	6 , 0 , -12 , 0	Infeasible		-----
S_1, X_2	X_1, S_2	4, 0 , 0 , 2	Feasible	A	20
S_2, X_1	X_2, S_1	0 , 3 , 12 , 0	Feasible	B	12
S_1, X_1	X_2, S_2	0, 6 , 0 , -6	Infeasible		-----
X_1, X_2	S_1, S_2	0 , 0 , 24 , 6	Feasible	C	0



1 $S_1 = S_2 = 0$

$$6X_1 + 4X_2 = 24$$
$$-6 * \quad X_1 + 2X_2 = 6$$
$$(4-12)X_2 = 24 - 36$$
$$-8X_2 = -12$$
$$X_2 = 1.5$$
$$X_1 + 2(1.5) = 6$$
$$X_1 = 6 - 3 = 3$$
$$X_1 = 3$$

2 $S_2 = X_2 = 0$

$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 6$$
$$X_1 = 6$$
$$6X_1 + 4X_2 + S_1 = 24$$
$$6(6) + 4(0) + S_1 = 24$$
$$S_1 = 24 - 36$$
$$S_1 = -12$$

3 $S_1 = X_2 = 0$

$$6X_1 + 4X_2 + S_1 = 24$$
$$6X_1 = 24$$
$$X_1 = 4$$
$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 6$$
$$4 + 2(0) + S_2 = 6$$
$$S_2 = 2$$

4 $S_2 = X_1 = 0$

$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 6$$
$$2X_2 = 6$$
$$X_2 = 3$$
$$6X_1 + 4X_2 + S_1 = 24$$
$$4(3) + S_1 = 24$$
$$S_1 = 24 - 12$$
$$S_1 = 12$$

5 $S_1 = X_1 = 0$

$$6X_1 + 4X_2 + S_1 = 24$$
$$4X_2 = 24$$
$$X_2 = 6$$
$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 6$$
$$2(6) + S_2 = 6$$
$$S_2 = 6 - 12$$
$$S_2 = -6$$

6 $X_1 = X_2 = 0$

$$6X_1 + 4X_2 + S_1 = 24$$
$$S_1 = 24$$
$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 6$$
$$S_2 = 6$$

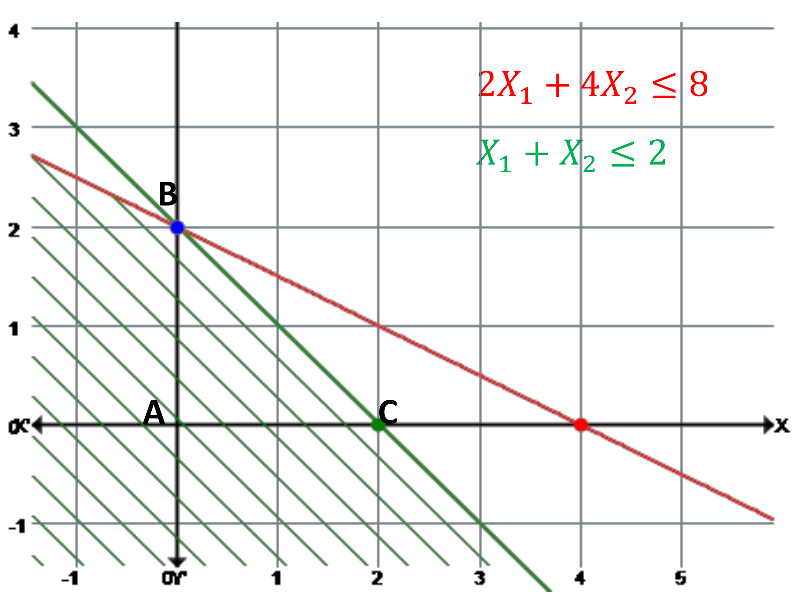
2-Max $Z = 3X_1 + 2X_2$ H.W

Subject to
$2X_1 + 4X_2 \leq 8$
$X_1 + X_2 \leq 2$
$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

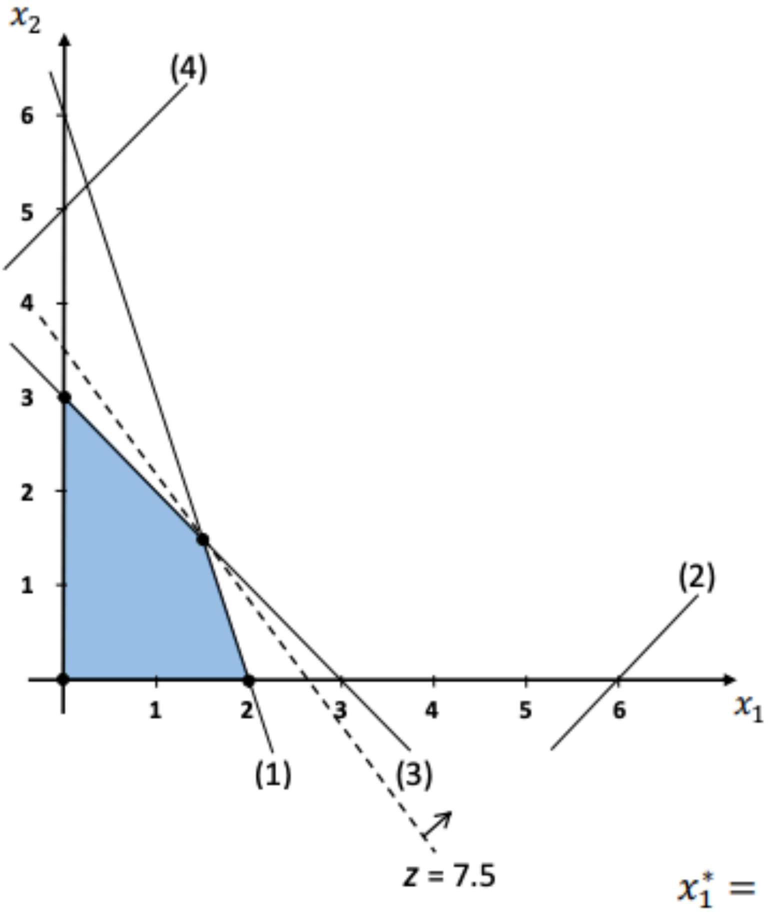
أ- اوجدي الصوره القياسيه للبرنامج الخطي.
ب- حددي جميع الحلول الممكنه ، وصنفيها اذا ماكان الحل ممكن او غير ممكن .
ت- اوجدي الحل الامثل من بين الحلول الممكنه.
ث- تحققي باستخدام الرسم البياني ان الحل بالفقره (ت) هو حل امثل للبرنامج الخطى

The standard form
Max $Z = 3X_1 + 2X_2$
Subject to
$2X_1 + 4X_2 + \boldsymbol{S_1} = 8$
$X_1 + X_2 + \boldsymbol{S_2} = 2$
$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, S_1 \geq 0, S_2 \geq 0$ (S is slack variable)
We have **m=2** constraints and **n=4** variables, thus **n-m=2** Nonbasic variables (which =0).

Nonbasic Variables	Basic Variables	Basic Solution X_1, X_2, S_1, S_2	Feasibility Status	Extreme point	Objective Value
S_1, S_2	X_1, X_2	0,2, 0, 0	Feasible	B	
S_2, X_2	X_1, S_1	2,,0 ,4, 0	Feasible	C	
S_1, X_2	X_1, S_2	4,0 ,0 , -2	Infeasible		
S_2, X_1	X_2, S_1	0, 2,0 ,0	Feasible	B	
S_1, X_1	X_2, S_2	0, 2 ,0 , 0	Feasible	B	
X_1, X_2	S_1, S_2	0, 0, 8,2	Feasible	A	



سؤال من الاختــبارات الـسابـقة :



ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\max\ z = 3x_1 + 2x_2$$

s.t.

القيد (1): $6x_1 + 2x_2 \le 12$

القيد (2): $2x_1 - 2x_2 \le 12$

القيد (3): $4x_1 + 4x_2 \le 12$

القيد (4): $-2x_1 + 2x_2 \le 10$

$x_1 \ge 0\ ,\ x_2 \ge 0$

الحل الأمثل هو: $x_1^* = 1.5\ \ ,\ \ x_2^* = 1.5\ \ ,\ \ z^* = 7.5$

١. أكبر زيـادة اقـتصاديـة يـمكن إضـافـتها لـمورد الـقيد (1) هي :

A	6	12	B
C	24	8	D

٢. سعر الـظل (الـقيمة الاقـتصاديـة للوحدة الإضـافـية) لـمورد الـقيد (1) هو :

A	0.4375	0.375	B
C	0.25	1	D

٣. أكبر زيادة اقتصادية يمكن إضافتها لمورد القيد (3) هي :

B	4	12	A
D	10	8	C

٤. سعر الظل (القيمة الاقتصادية للوحدة الإضافية) لمورد القيد (3) هو :

B	0.5	0.3125	A
D	0.125	0.375	C

٥. أكبر توفير اقتصادي يمكن إنقاصه من مورد القيد (4) هو :

B	10	0	A
D	11	9	C

٦. فترة الحساسية لمعامل المتغير x_1 في دالة الهدف هي :

B	$0.5 \leq c_1 \leq 1.5$	$1 \leq c_1 \leq 6$	A
D	$2 \leq c_1 \leq 6$	$1 \leq c_1 \leq 3$	C

٧. فترة الحساسية لمعامل المتغير x_2 في دالة الهدف هي :

B	$1 \leq c_2 \leq 3$	$1 \leq c_2 \leq 9$	A
D	$1 \leq c_2 \leq 1.5$	$0.25 \leq c_2 \leq 1$	C

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \max \quad z = \quad & x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 3x_2 + x_3 \le 5 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4 \\ & x_1 , x_2 , x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

١. **في الشكل القياسي لهذا البرنامج ، إذا كانت المتغيرات الغير أساسية هي (x_1,x_3,s_2)، فإن الحل الأساسي هو :**

A	**$(x_1,x_2,x_3,s_1,s_2) = (0,2,0,-1,0)$**	**B**	**$(x_1,x_2,x_3,s_1,s_2) = (0,2,0,1,0)$**
C	**$(x_1,x_2,x_3,s_1,s_2) = (0,-2,0,1,0)$**	**D**	**$(x_1,x_2,x_3,s_1,s_2) = (1,1,1,0,0)$**