

تمارين -2-

أوجد الحل الأمثل (إن وجد) بيانيا لكل من النماذج الخطية التالية:

1- $\text{Max } Z = 50X_1 + 18X_2$

Subject to

$2X_1 + X_2 \leq 100$

$X_1 + X_2 \leq 80$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

لرسم القيود نحتاج الى ايجاد نقطتين لكل قيد:

$2x_1 + x_2 = 100$

When $x_1 = 0$ then $x_2 = ?$

$\Rightarrow 2(0) + x_2 = 100$

$\Rightarrow x_2 = 100$

When $x_2 = 0$ then $x_1 = ?$

$\Rightarrow 2x_1 + (0) = 100$

$\Rightarrow 2x_1 = 100$

$\Rightarrow x_1 = 100/2 = 50$

$(0,100)$ and $(50,0)$

$x_1 + x_2 = 80$

When $x_1 = 0$ then $x_2 = ?$

$\Rightarrow (0) + x_2 = 80$

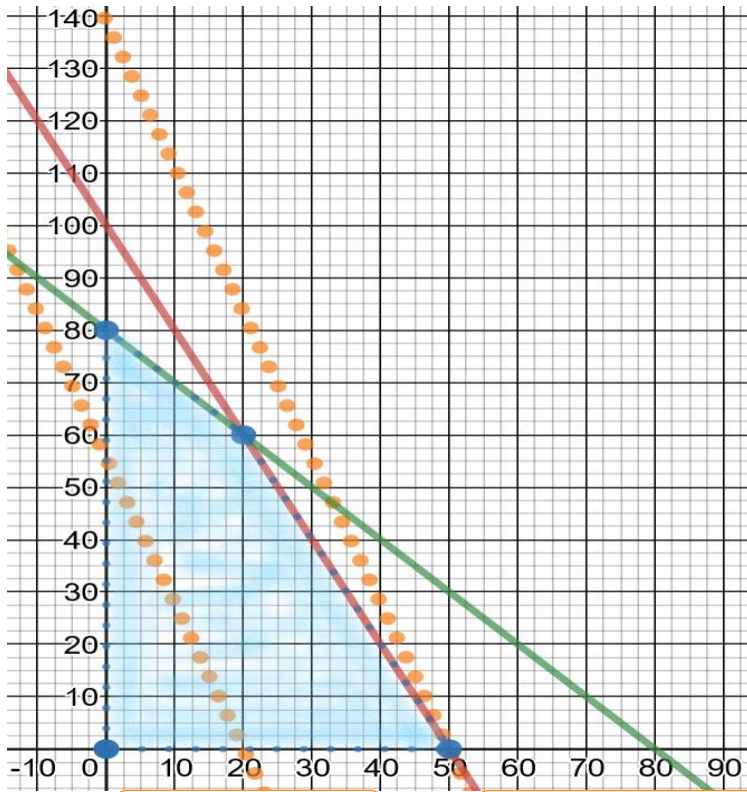
$\Rightarrow x_2 = 80$

When $x_2 = 0$ then $x_1 = ?$

$\Rightarrow x_1 + (0) = 80$

$\Rightarrow x_1 = 80$

$(0,80)$ and $(80,0)$



$Z=1000$
 $(20,0), (0,55.6)$

$Z=2500$
 $(50,0), (0,138.9)$

لتحديد اتجاه منطقة الحل لكل قيد:

القيد الاول:

نختار نقطه فوق المستقيم لتكن $(40,40)$

$2(40) + (40) \leq 100$

$120 \not\leq 100$

نختار نقطه اسفل المستقيم لتكن $(20,40)$

$2(20) + (40) \leq 100$

$80 \leq 100$

القيد الثاني:

نختار نقطه فوق المستقيم لتكن $(40,50)$

$(40) + (50) \leq 80$

$90 \not\leq 80$

نختار نقطه اسفل المستقيم لتكن $(30,30)$

$(30) + (30) \leq 80$

$60 \leq 80$

لرسم مستقيم دالة الهدف الذي يمر

بنقطة اختياريه لتكن $(20,0)$

$50(20) + 18(0) = 1000$

نحتاج نقطه اخرى لنفترض $X_1 = 0$

$18(X_2) = 1000$

$X_2 = 55.6$

لايجاد النقطة الركيهه من حاصل تقاطع المستقيمين:

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 &= 100 \\ (-)* x_1 + x_2 &= 80 \\ \hline x_1 &= 20 \\ x_2 &= 60\end{aligned}$$

لتحديد الحل الامثل من خلال النقاط الركيهه

(X_1, X_2)	Z
(0,80)	1440
(20,60)	2080
(50,0)	2500

اذا يوجد حل امثل وحيد(فريد) عند النقطة

$$x_1^* = 50, x_2^* = 0$$

<https://www.desmos.com/calculator/s1p5pak3ay>

$$2- \text{Max } Z = 300X_1 + 400X_2$$

Subject to

$$5X_1 + 4X_2 \leq 200$$

$$3X_1 + 5X_2 \leq 150$$

$$5X_1 + 4X_2 \geq 100$$

$$8X_1 + 4X_2 \geq 80$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

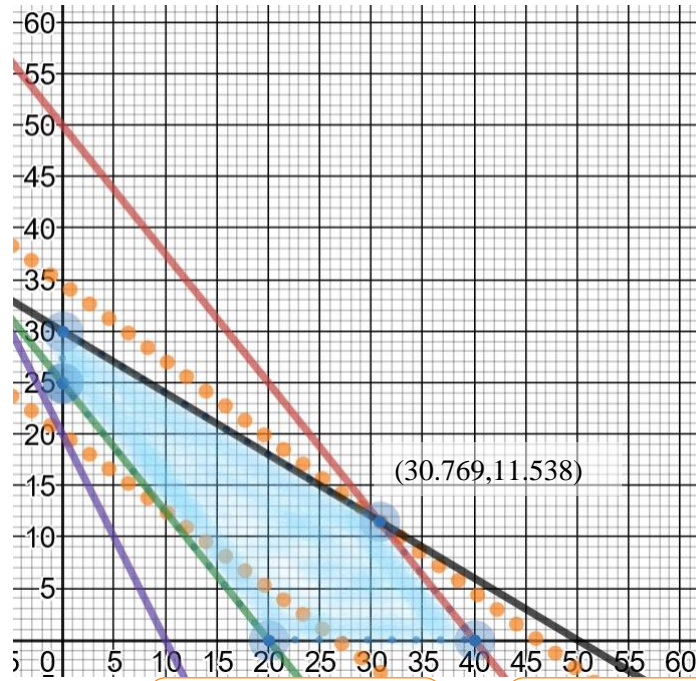
لرسم القيود نحتاج الى ايجاد نقطتين لكل قيد

$$5X_1 + 4X_2 = 200 \gg (0,50) \text{ and } (40,0)$$

$$3X_1 + 5X_2 = 150 \gg (0,30) \text{ and } (50,0)$$

$$5X_1 + 4X_2 = 100 \gg (0,25) \text{ and } (20,0)$$

$$8X_1 + 4X_2 = 80 \gg (0,20) \text{ and } (10,0)$$



$$Z=8000$$

$$(0,20), (26.667,0)$$

$$Z=13846$$

$$(0,34.615), (46.153,0)$$

لتحديد اتجاه منطقة الحل لكل قيد:

القيد الاول:

نختار نقطه تحت او فوق المستقيم لتكن

(25,10)

$$5X_1 + 4X_2 \leq 200$$

$$165 \leq 200$$

القيد الثاني:

نختار نقطه لتكن (10,10)

$$3X_1 + 5X_2 \leq 150$$

$$80 \leq 150$$

القيد الثالث:

نختار نقطه لتكن (15,15)

$$5X_1 + 4X_2 \geq 100$$

$$135 \geq 100$$

القيد الرابع:

نختار نقطه لتكن (10,10)

$$8X_1 + 4X_2 \geq 80$$

$$120 \geq 80$$

لرسم مستقيم دالة الهدف الذي يمر

بنقطة اختياريه لتكن (0,20)

$$300(0) + 400(20) = 8000$$

نحتاج نقطه اخرى لنفترض $X_2 = 0$

$$300(X_1) = 8000$$

$$X_1 = 26.667$$

لايجاد النقطه الركيه من حاصل تقاطع المستقيمين الاحمر و الاسود و ذلك للحصول على نقطة الحل الامثل:

$$(3)* 5x_1 + 4x_2 = 200$$

$$(-5)* 3x_1 + 5x_2 = 150$$

$$(12 - 25)x_2 = 600 - 750$$

$$-13x_2 = -150$$

$$x_2 = 11.538$$

$$5x_1 + 4(11.538) = 200$$

$$x_1 = \frac{200 - 4(11.538)}{5} = 30.769$$

تحديد الحل الامثل من خلال النقاط الركيه:

(X_1, X_2)	Z
(0,25)	10000
(0,30)	12000
(30.769, 11.538)	13846
(40,0)	6000
(20,0)	12000

اذا يوجد حل امثل وحيد(فريد) عند النقطة $x_1^* = 30.769$, $x_2^* = 11.538$ و القيمة المثلى لدالة الهدف هي

$$Z=13846$$

<https://www.desmos.com/calculator/s5s19doxht>

$$3- \text{Min } Z = 20X_1 + 40X_2$$

Subject to

$$36X_1 + 6X_2 \geq 108$$

$$3X_1 + 12X_2 \geq 36$$

$$200X_1 + 100X_2 \geq 1000$$

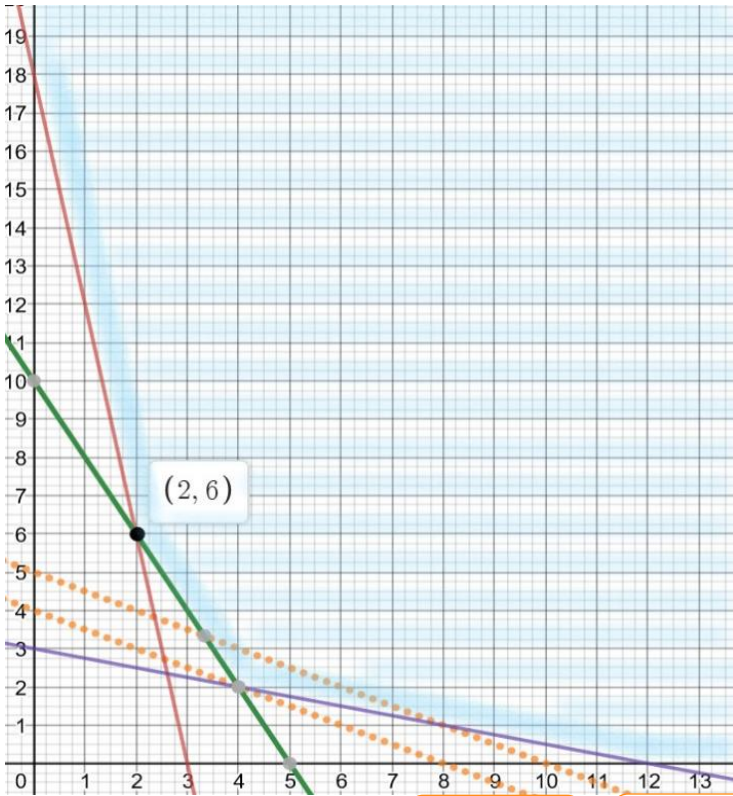
$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

الحل:

$$36X_1 + 6X_2 = 108 \gg (0,18) \text{ and } (3,0)$$

$$3X_1 + 12X_2 = 36 \gg (0,3) \text{ and } (12,0)$$

$$200X_1 + 100X_2 = 1000 \gg (0,10) \text{ and } (5,0)$$



$$Z=160 \\ (8,0), (0,4)$$

$$Z=200 \\ (0,5), (5,0)$$

لتحديد اتجاه منطقة الحل لكل قيد:
نختار نقطة لتكن (4,4) ونطبق على
جميع القيود .
القيد الاول:

$$36X_1 + 6X_2 \geq 108 \\ 168 \geq 108$$

القيد الثاني:

$$3X_1 + 12X_2 \geq 36 \\ 60 \geq 36$$

القيد الثالث:

$$200X_1 + 100X_2 \geq 1000 \\ 1200 \geq 1000$$

لرسم مستقيم دالة الهدف الذي يمر
بنقطة اختيارية لتكن (0,5)

$$20X_1 + 40X_2 = 200$$

نحتاج نقطة اخرى لنفترض $X_2 = 0$

$$20(X_1) = 200$$

$$X_1 = 10$$

لايجاد النقطة الركيبه من حاصل تقاطع المستقيمين الاخضر و الموف و ذلك للحصول على نقطة الحل الامثل:

$$(200)* 3x_1 + 12x_2 = 36$$

$$(-3)* 200x_1 + 100x_2 = 1000$$

$$(2400 - 300)x_2 = 7200 - 3000$$

$$2100x_2 = 4200$$

$$x_2 = 2$$

$$3x_1 + 12(2) = 36$$

$$x_1 = 4$$

تحديد الحل الامثل من خلال النقاط الركيبة

(X_1, X_2)	Z
(0,18)	720
(2,6)	280
(4,2)	160
(12,0)	240

اذا يوجد حل امثل وحيد(فريد) عند النقطة $x_1^* = 4, x_2^* = 2$ و القيمة المثلى لدالة الهدف هي $Z=160$

<https://www.desmos.com/calculator/rpeajfihwx>

$$4- \text{Max } Z = -2X_1 + 6X_2$$

Subject to

$$X_1 + X_2 \geq 2$$

$$X_2 - X_1 \leq 1$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

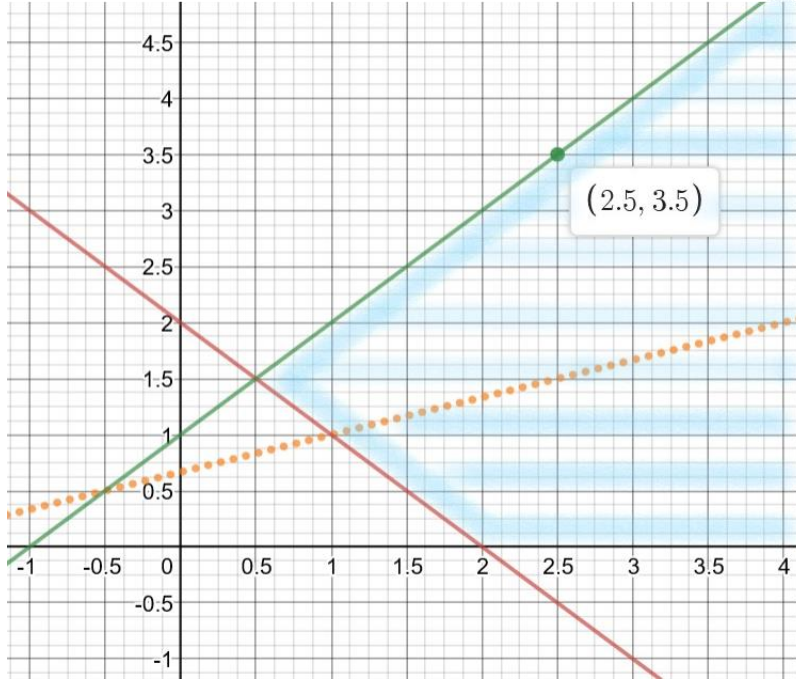
الحل:

$$X_1 + X_2 = 2 \gg (0,2) \text{ and } (2,0)$$

$$X_2 - X_1 = 1 \gg (0,1) \text{ and } (2.5,3.5) \text{ also } (3,4)$$

نلاحظ ان مستقيم دالة الهدف يتزايد باستمرار ضمن فضاء الحل، اي ان $z = \infty$

بالتالي فالحل هنا غير محدود.



لتحديد اتجاه منطقة الحل لكل قيد:

القيد الاول:

نختار نقطه لتكن (2,2)

$$X_1 + X_2 \geq 2$$

$$4 \geq 2$$

القيد الثاني:

نختار نقطه لتكن (3,2)

$$X_2 - X_1 \leq 1$$

$$-1 \leq 1$$

نختار نقطه لتكن (1,2.5)

$$1.5 \leq 1$$

لرسم مستقيم دالة الهدف الذي يمر

بنقطة اختياريه لتكن (1,1)

$$-2X_1 + 6X_2 = 4$$

نحتاج نقطه اخرى لنفترض $X_1 = 0$

$$6(X_2) = 4$$

$$X_2 = 0.667$$

<https://www.desmos.com/calculator/cx3mcyye3>

$$5- \text{Max } Z = 20X_1 + 30X_2$$

Subject to

$$0.2X_1 + 0.3X_2 \geq 15$$

$$0.1X_1 + 0.1X_2 \leq 4$$

$$0.5X_1 + 0.15X_2 \geq 9$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

$$0.2X_1 + 0.3X_2 = 15 \gg$$

$$(0,50) \text{ and } (75,0)$$

$$0.1X_1 + 0.1X_2 = 4 \gg$$

$$(0,40) \text{ and } (40,0)$$

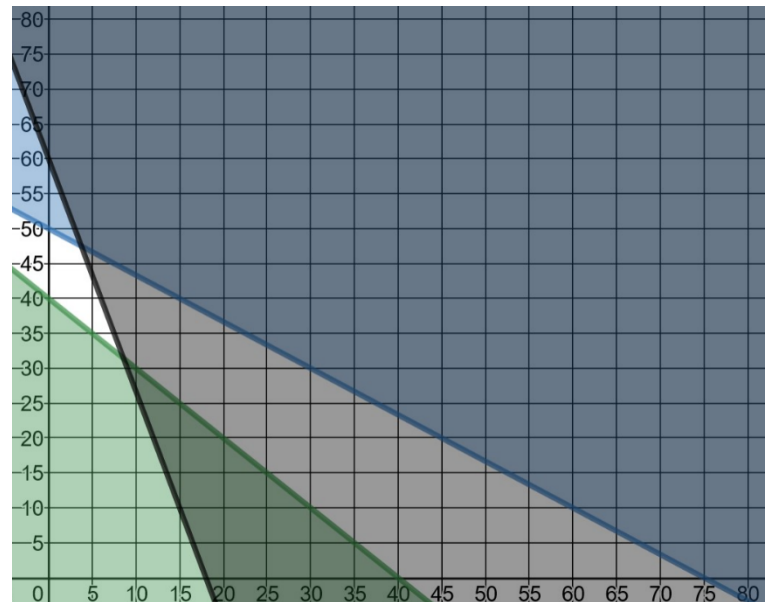
$$0.5X_1 + 0.15X_2 = 90 \gg$$

$$(0,60) \text{ and } (18,0)$$

نلاحظ عدم وجود منطقة مشتركة تحقق جميع

القيد، اذاً لا يوجد حل ممكن.

الحل:



$$6- \text{Max } Z = 200X_1 + 400X_2$$

Subject to

- (1) $X_1 + X_2 \geq 200$
- (2) $X_1 + 3X_2 \geq 400$
- (3) $X_1 + 2X_2 \leq 350$
- (4) $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

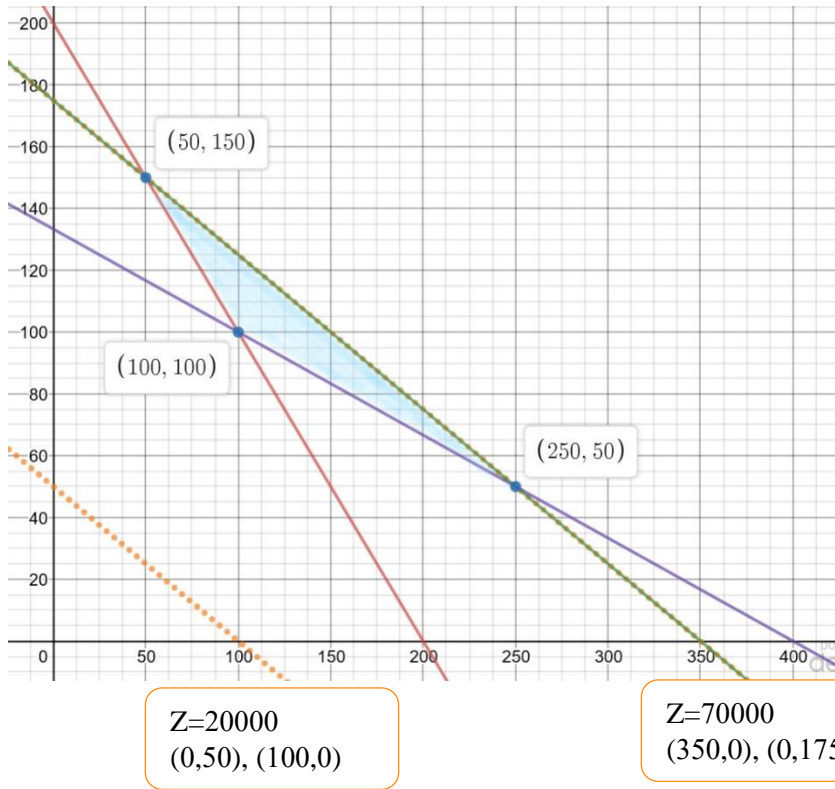
الحل:

لرسم القيود نحتاج الى ايجاد نقطتين لكل قيد

$$X_1 + X_2 = 200 \gg (0,200) \text{ and } (200,0)$$

$$X_1 + 3X_2 = 400 \gg (0,133.3) \text{ and } (400,0)$$

$$X_1 + 2X_2 = 350 \gg (0,175) \text{ and } (350,0)$$



لتحديد اتجاه منطقة الحل لكل قيد:
 القيد الاول:
 نختار نقطه لتكن (150,120)
 $X_1 + X_2 \geq 200$
 $270 \geq 200$
 القيد الثاني:
 نختار نقطه لتكن (150,100)
 $X_1 + 3X_2 \geq 400$
 $450 \geq 400$
 القيد الثالث:
 نختار نقطه لتكن (150,120)
 $X_1 + 2X_2 \leq 350$
 $390 \not\leq 350$
 لرسم مستقيم دالة الهدف الذي يمر
 بنقطة اختياريه لتكن (0,50)
 $200X_1 + 400X_2 = 20000$
 نحتاج نقطه اخرى لنفترض $X_2 = 0$
 $200(X_1) = 20000$
 $X_1 = 100$

نلاحظ ان مستقيم دالة الهدف يقع على مستقيم القيد الثالث (الاخضر) ، بالتالي يوجد حلول مثلى (متعدده) ضمن فضاء الحل.

<https://www.desmos.com/calculator/bbwpydvaxv>

لايجاد النقطة الركيهه من حاصل تقاطع كل مستقيمين كالتالي:

$$\begin{array}{r} (-)* X_1 + X_2 = 200 \\ \underline{X_1 + 2X_2 = 350} \\ X_2 = 350 - 200 = 150 \\ X_1 = 50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} X_1 + 3X_2 = 400 \\ \underline{(-)* X_1 + 2X_2 = 350} \\ X_2 = 400 - 350 = 50 \\ X_1 = 250 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (-)* X_1 + X_2 = 200 \\ \underline{X_1 + 3X_2 = 400} \\ 2X_2 = 400 - 200 \\ X_2 = 100, X_1 = 100 \end{array}$$

لتحديد الحل الامثل

(X_1, X_2)	Z
(0,100)	60000
(50,150)	70000
(250,50)	70000

يوجد حلول مثلى (متعددة)

$$7- \text{Max } Z = -X_1 + X_2$$

Subject to

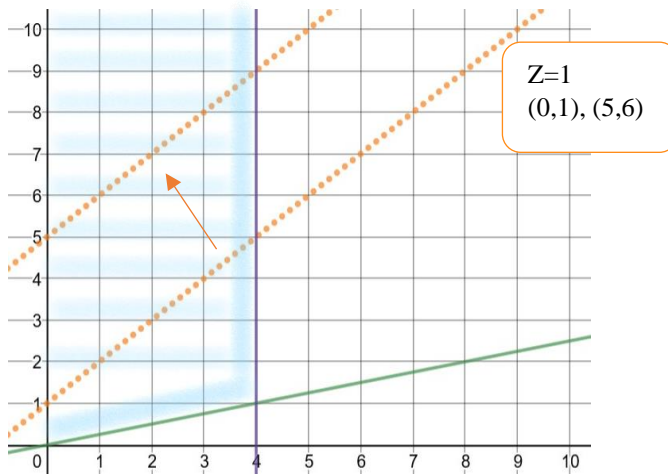
- (1) $-X_1 + 4X_2 \geq 0$
- (2) $X_1 \leq 4$
- (3) $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

الحل:

لرسم القيود نحتاج الى ايجاد نقطتين لكل قيد

$$-X_1 + 4X_2 = 0 \gg (0,0) \text{ and } (4,1) \text{ also } (8,2)$$

$$X_1 = 4$$



لتحديد اتجاه منطقة الحل لكل قيد:

القيد الاول:

نختار نقطه لتكن (3,2)

$$\begin{array}{l} -X_1 + 4X_2 \geq 0 \\ 5 \geq 0 \end{array}$$

لرسم مستقيم دالة الهدف الذي يمر بنقطة

اختياريه لتكن (0,1)

$$\begin{array}{l} -X_1 + X_2 = 1 \\ \text{نحتاج نقطه اخرى لنفترض } X_1 = 5 \\ X_2 = 6 \end{array}$$

نلاحظ ان الحل غير محدود

H.W

أوجد الحل الأمثل (إن وجد) بيانيا لكل من النماذج الخطية التالية:

$$1- \text{Max } Z = 10X_1 + 8X_2$$

Subject to

$$2X_1 + X_2 \leq 40$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 80$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

$$2- \text{Min } Z = 120X_1 + 100X_2$$

Subject to

$$10X_1 + 5X_2 \leq 80$$

$$6X_1 + 6X_2 \leq 66$$

$$4X_1 + 8X_2 \geq 24$$

$$5X_1 + 6X_2 \leq 90$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

$$3- \text{Max } Z = 2X_1 + X_2$$

Subject to:

$$X_1 - X_2 \leq 10$$

$$2X_1 \leq 40$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

الجواب: الحل غير محدود

$$4- \text{Max } Z = X_1 + X_2$$

Subject to

$$X_1 - X_2 + 1 \leq 0$$

$$-X_1 + X_2 + 1 \leq 0$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

الجواب: لا يوجد حل (لا توجد منطقة تقاطع مشتركة)

$$5- \text{Min } Z = 3X_1 + 2X_2$$

Subject to

$$-X_1 + X_2 \leq 2$$

$$3X_1 + 2X_2 \geq 12$$

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

الجواب: حلول مثلى (متعددة)