تمارين -2-

أوجدي الحل الأمثل (إن وجد) بيانيا لكل من النماذج الخطية التالية:

1- Max $Z = 50X_1 + 18X_2$

Subject to

$2X_1 + X_2 \leq 100$

$X_1 + X_2 \leq 80$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

لرسم القيود نحتاج الى ايجاد نقطتين لكل قيد:

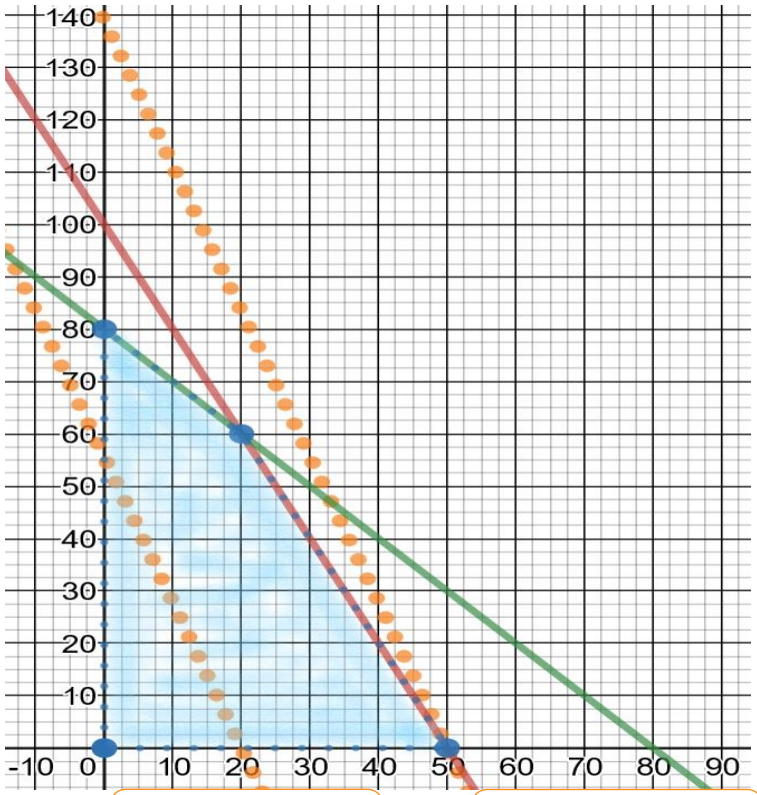
$2x_1 + x_2 = 100$

$When\ x_1 = 0\ then\ x_2 = ?$
$\Rightarrow 2(0) + x_2 = 100$
$\Rightarrow x_2 = 100$

$When\ x_2 = 0\ then\ x_1 = ?$
$\Rightarrow 2x_1 + (0) = 100$
$\Rightarrow 2x_1 = 100$
$\Rightarrow x_1 = 100/2 = 50$
(0,100) and (50,0)

$x_1 + x_2 = 80$
$When\ x_1 = 0\ then\ x_2 = ?$
$\Rightarrow (0) + x_2 = 80$
$\Rightarrow x_2 = 80$

$When\ x_2 = 0\ then\ x_1 = ?$
$\Rightarrow x_1 + (0) = 80$
$\Rightarrow x_1 = 80$
(0,80) and (80,0)



Z=1000
(20,0), (0,55.6)

Z=2500
(50,0), (0,138.9)

لتحديد اتجاه منطقة الحل لكل قيد:

القيد الاول:

نختارنقطه فوق المستقيم لتكن (40،40)

$2(40) + (40) \leq 100$

$120 \nleq 100$

نختارنقطه اسفل المستقيم لتكن (20،40)

$2(20) + (40) \leq 100$

$80 \leq 100$

القيد الثاني:

نختارنقطه فوق المستقيم لتكن (40،50)

$(40) + (50) \leq 80$

$90 \nleq 80$

نختارنقطه اسفل المستقيم لتكن (30،30)

$(30) + (30) \leq 80$

$60 \leq 80$

لرسم مستقيم دالة الهدف الذي يمر بنقطة اختياريه لتكن (20,0)

$50(20) + 18(0) = 1000$

نحتاج نقطه اخرى لنفترض $X_1 = 0$

$18(X_2) = 1000$

$X_2 = 55.6$

لايجاد النقطه الركينه من حاصل تقاطع المستقيمين:

$2x_1 + x_2 = 100$
(-)* $x_1 + x_2 = 80$
$x_1 = 20$
$x_2 = 60$

لتحديد الحل الامثل من خلال النقاط الركينه

(X_1, X_2)	Z
(0,80)	1440
(20,60)	2080
(50,0)	2500

اذا يوجد حل امثل وحيد(فريد) عند النقطة

$x_1^* = 50\ , x_2^* = 0$

https://www.desmos.com/calculator/s1p5pak3ay

2- Max $Z = 300X_1 + 400X_2$

Subject to

$5X_1 + 4X_2 \leq 200$

$3X_1 + 5X_2 \leq 150$

$5X_1 + 4X_2 \geq 100$

$8X_1 + 4X_2 \geq 80$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

لرسم القيود نحتاج الى ايجاد نقطتين لكل قيد

$5X_1 + 4X_2 = 200$ >> (0,50) and (40,0)

$3X_1 + 5X_2 = 150$ >> (0,30) and (50,0)

$5X_1 + 4X_2 = 100$ >> (0,25) and (20,0)

$8X_1 + 4X_2 = 80$ >> (0,20) and (10,0)

لتحديد اتجاه منطقة الحل لكل قيد:

القيد الاول:

نختارنقطه تحت او فوق المستقيم لتكن $(25،10)$

$$5X_1 + 4X_2 \leq 200$$
$$165 \leq 200$$

القيد الثاني:

نختارنقطه لتكن $(10،10)$

$$3X_1 + 5X_2 \leq 150$$
$$80 \leq 150$$

القيد الثالث:

نختارنقطه لتكن $(15،15)$

$$5X_1 + 4X_2 \geq 100$$
$$135 \geq 100$$

القيد الرابع:

نختارنقطه لتكن $(10,10)$

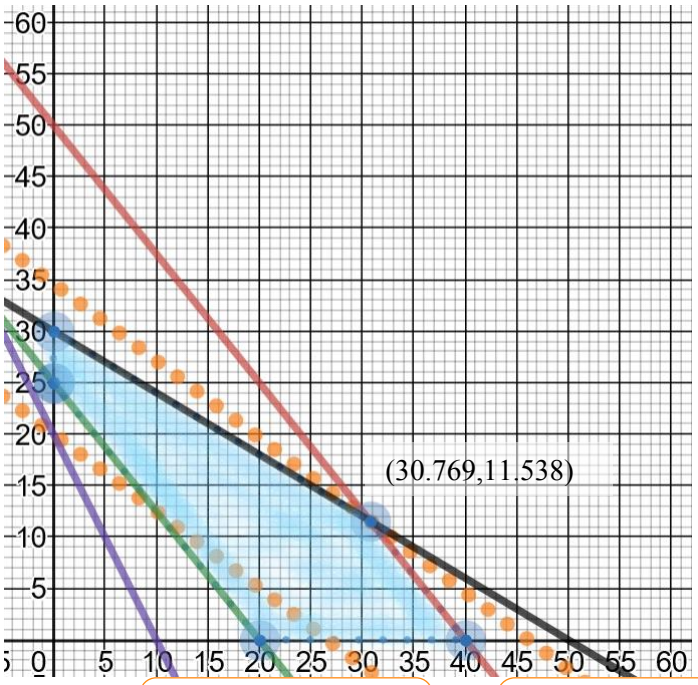
$$8X_1 + 4X_2 \geq 80$$
$$120 \geq 80$$

لرسم مستقيم دالة الهدف الذي يمر بنقطة اختياريه لتكن $(0,20)$

$$300(0) + 400(20) = 8000$$

نحتاج نقطه اخرى لنفترض $X_2 = 0$

$$300(X_1) = 8000$$
$$X_1 = 26.667$$



Z=8000
(0,20), (26.667,0)

Z=13846
(0,34.615), (46.153,0)

لايجاد النقطه الركينه من حاصل تقاطع المستقيمين الاحمر و الاسود و ذلك للحصول على نقطة الحل الامثل:

$(3)^* \; 5x_1 + 4x_2 = 200$

$(-5)^* \; 3x_1 + 5x_2 = 150$

$$(12 - 25)x_2 = 600 - 750$$
$$-13x_2 = -150$$
$$x_2 = 11.538$$
$$5x_1 + 4(11.538) = 200$$
$$x_1 = \frac{200 - 4(11.538)}{5} = 30.769$$

تحديد الحل الامثل من خلال النقاط الركينة:

(X_1, X_2)	Z
(0,25)	10000
(0,30)	12000
(30.769,11.538)	13846
(40,0)	6000
(20,0)	12000

اذا يوجد حل امثل وحيد(فريد) عند النقطة $x_1^* = 30.769 \; , \; x_2^* = 11.538$ و القيمة المثلى لدالة الهدف هي Z=13846

https://www.desmos.com/calculator/s5s19doxbt

3- Min $Z = 20X_1 + 40X_2$

Subject to

$36X_1 + 6X_2 \geq 108$

$3X_1 + 12X_2 \geq 36$

$200X_1 + 100X_2 \geq 1000$

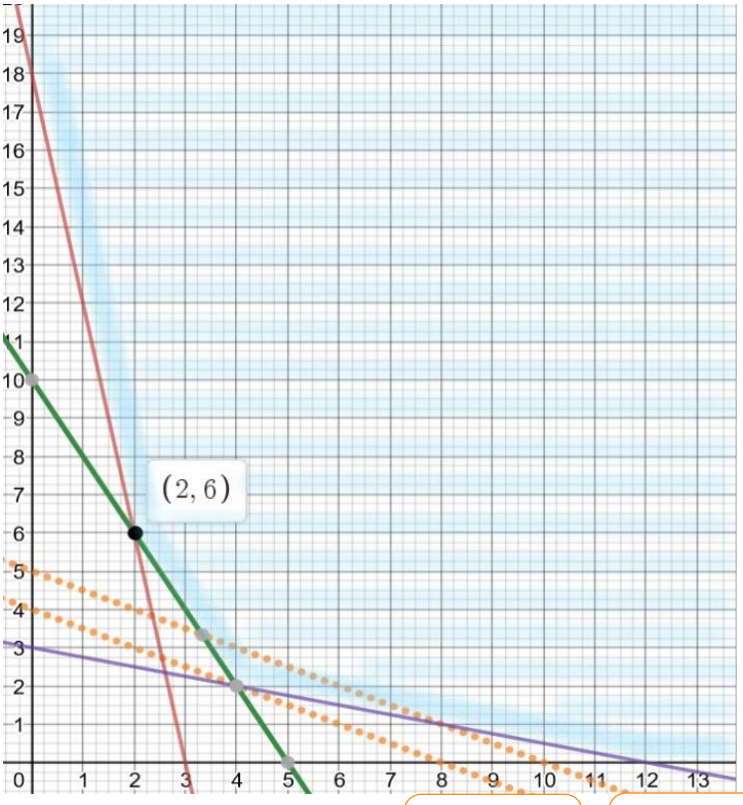
$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

الحل:

$36X_1 + 6X_2 = 108$ >> (0,18) and (3,0)

$3X_1 + 12X_2 = 36$ >> (0,3) and (12,0)

$200X_1 + 100X_2 = 1000$ >> (0,10) and (5,0)



Z=160
(8,0), (0,4)

Z=200
(0,5), (0,10)

لتحديد اتجاه منطقة الحل لكل قيد:
نختارنقطه لتكن (4،4) ونطبق على جميع القيود .

القيد الاول:

$36X_1 + 6X_2 \geq 108$
$168 \geq 108$

القيد الثاني:

$3X_1 + 12X_2 \geq 36$
$60 \geq 36$

القيد الثالث:

$200X_1 + 100X_2 \geq 1000$
$1200 \geq 1000$

لرسم مستقيم دالة الهدف الذي يمر بنقطة اختياريه لتكن (0,5)

$20X_1 + 40X_2 = 200$

نحتاج نقطه اخرى لنفترض $X_2 = 0$

$20(X_1) = 200$
$X_1 = 10$

لايجاد النقطه الركينه من حاصل تقاطع المستقيمين الاخضر و الموف و ذلك للحصول على نقطة الحل الامثل:

(200)* $3x_1 + 12x_2 = 36$
(-3)* $200x_1 + 100x_2 = 1000$

$(2400 - 300)x_2 = 7200 - 3000$
$2100x_2 = 4200$
$x_2 = 2$
$3x_1 + 12(2) = 36$
$x_1 = 4$

تحديد الحل الامثل من خلال النقاط الركينة

(X_1, X_2)	Z
(0,18)	720
(2,6)	280
(4,2)	160
(12,0)	240

اذا يوجد حل امثل وحيد(فريد) عند النقطة $x_1^* = 4, x_2^* = 2$ و القيمة المثلى لدالة الهدف هي $Z=160$

https://www.desmos.com/calculator/rpeajfihwx

4- Max $Z = -2X_1 + 6X_2$

Subject to

$X_1 + X_2 \geq 2$

$X_2 - X_1 \leq 1$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

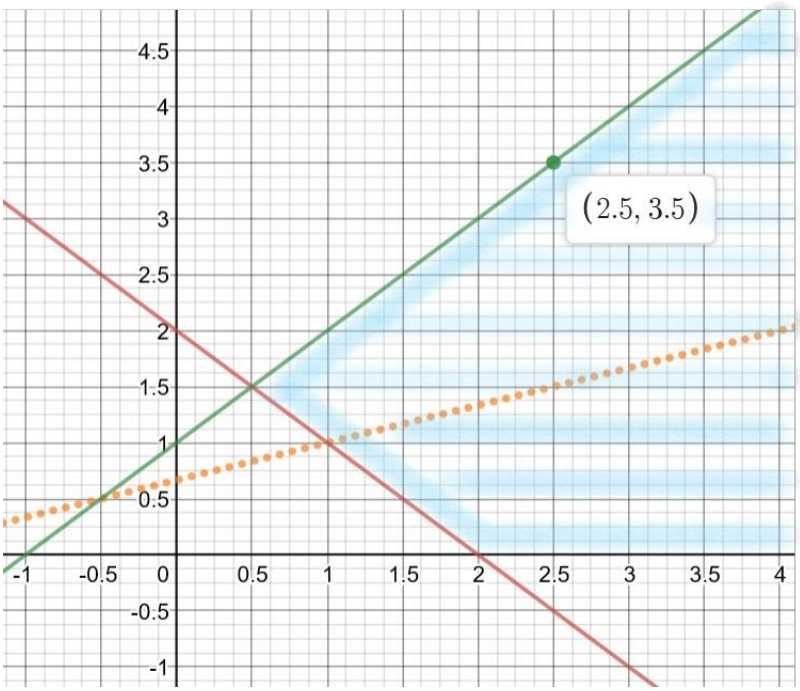
الحل:

$X_1 + X_2 = 2$ >> (0,2) and (2,0)

$X_2 - X_1 = 1$ >> (0,1) and (2.5,3.5) also (3,4)

نلاحظ ان مستقيم دالة الهدف يتزايد باستمرار ضمن فضاء الحل، اي ان $z = \infty$

بالتالي **فالحل هنا غير محدود**.



لتحديد اتجاه منطقة الحل لكل قيد:

القيد الاول:

نختارنقطه لتكن (2،2)

$$X_1 + X_2 \geq 2$$
$$4 \geq 2$$

القيد الثاني:

نختارنقطه لتكن (3،2)

$$X_2 - X_1 \leq 1$$
$$-1 \leq 1$$

نختارنقطه لتكن (1،2.5)

$$1.5 \nleq 1$$

لرسم مستقيم دالة الهدف الذي يمر بنقطة اختياريه لتكن (1,1)

$$-2X_1 + 6X_2 = 4$$

نحتاج نقطه اخرى لنفترض $X_1 = 0$

$$6(X_2) = 4$$
$$X_2 = 0.667$$

https://www.desmos.com/calculator/cx3mcyyye3

5- Max $Z = 20X_1 + 30X_2$

Subject to

$0.2X_1 + 0.3X_2 \geq 15$

$0.1X_1 + 0.1X_2 \leq 4$

$0.5X_1 + 0.15X_2 \geq 9$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

الحل:

$0.2X_1 + 0.3X_2 = 15$ >>

(0,50) and (75,0)

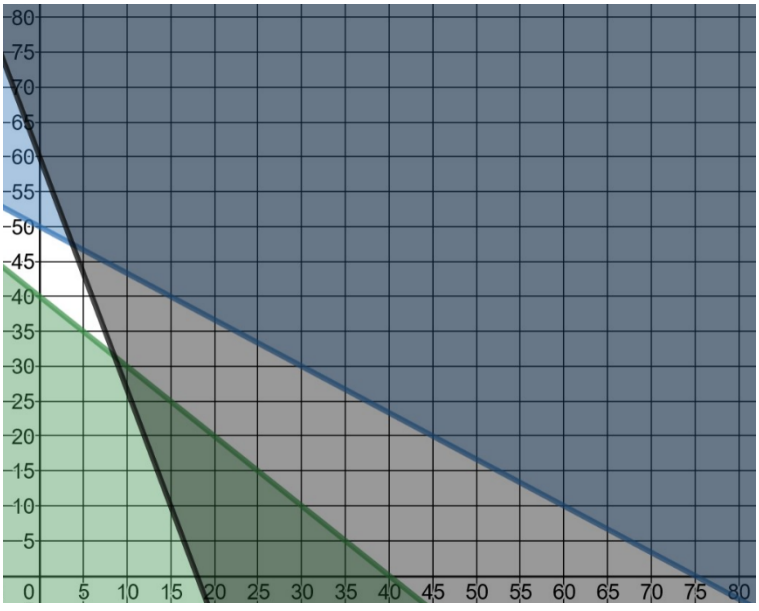
$0.1X_1 + 0.1X_2 = 4$ >>

(0,40) and (40,0)

$0.5X_1 + 0.15X_2 = 90$ >>

(0,60) and (18,0)

نلاحظ عدم وجود منطقة مشتركة تحقق جميع القيود، اذاً لا يوجد حل ممكن.



6- Max $Z = 200X_1 + 400X_2$

Subject to

(1) $X_1 + X_2 \geq 200$
(2) $X_1 + 3X_2 \geq 400$
(3) $X_1 + 2X_2 \leq 350$
(4) $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

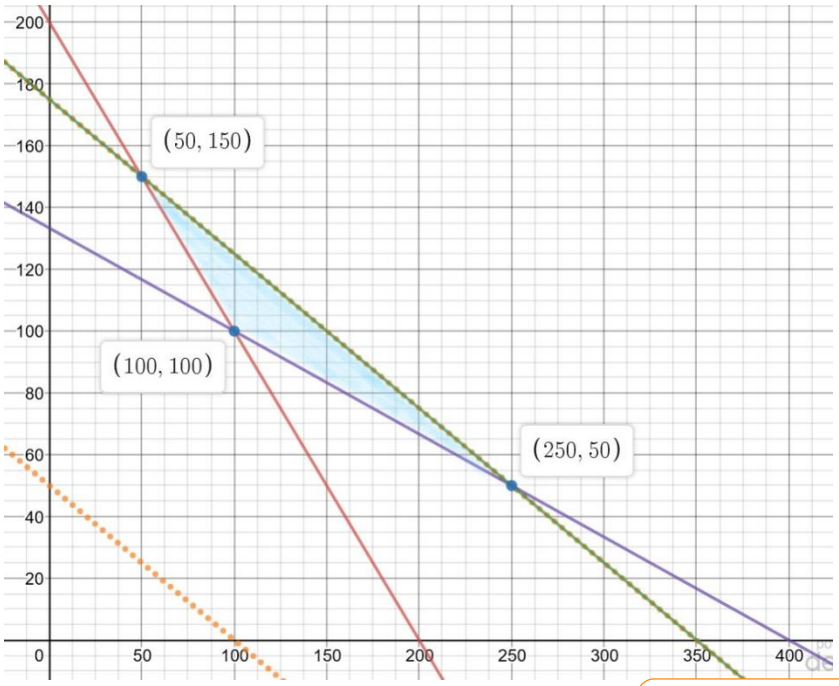
الحل:

لرسم القيود نحتاج الى ايجاد نقطتين لكل قيد

$X_1 + X_2 = 200$ >> (0,200) and (200,0)

$X_1 + 3X_2 = 400$ >> (0,133.3) and (400,0)

$X_1 + 2X_2 = 350$ >> (0,175) and (350,0)



Z=20000
(0,50), (100,0)

Z=70000
(350,0), (0,175)

لتحديد اتجاه منطقة الحل لكل قيد:

القيد الاول:

نختارنقطه لتكن (150,120)

$X_1 + X_2 \geq 200$

$270 \geq 200$

القيد الثاني:

نختارنقطه لتكن (150,100)

$X_1 + 3X_2 \geq 400$

$450 \geq 400$

القيد الثالث:

نختارنقطه لتكن (150,120)

$X_1 + 2X_2 \leq 350$

$390 \nleq 350$

لرسم مستقيم دالة الهدف الذي يمر بنقطة اختياريه لتكن (0,50)

$200X_1 + 400X_2 = 20000$

نحتاج نقطه اخرى لنفترض $X_2 = 0$

$200(X_1) = 20000$

$X_1 = 100$

نلاحظ ان مستقيم دالة الهدف يقع على مستقيم القيد الثالث (الاخضر) ، بالتي يوجد حلول مثلى (متعدده) ضمن فضاء الحل.

https://www.desmos.com/calculator/bbwpydvaxv

لايجاد النقطه الركينه من حاصل تقاطع كل مستقيمين كالتالي:

$(-)* X_1 + X_2 = 200$

$X_1 + 3X_2 = 400$

$2X_2 = 400 - 200$

$X_2 = 100, X_1 = 100$

$(-)* X_1 + X_2 = 200$

$X_1 + 2X_2 = 350$

$X_2 = 350 - 200 = 150$

$X_1 = 50$

$X_1 + 3X_2 = 400$

$(-) * \ X_1 + 2X_2 = 350$

$X_2 = 400 - 350 = 50$

$X_1 = 250$

لتحديد الحل الامثل

(X_1, X_2)	Z
(0,100)	60000
(50,150)	70000
(250,50)	70000

يوجد حلول مثلى (متعددة)

7- Max $Z = -X_1 + X_2$

Subject to

(1) $-X_1 + 4X_2 \geq 0$

(2) $X_1 \leq 4$

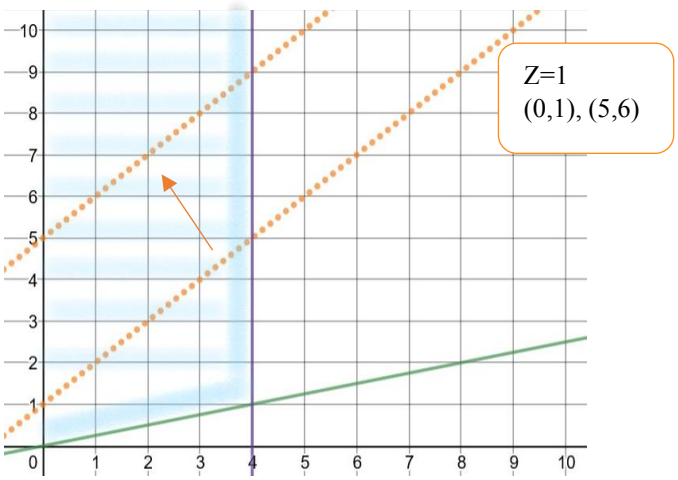
(3) $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

الحل:

لرسم القيود نحتاج الى ايجاد نقطتين لكل قيد

$-X_1 + 4X_2 = 0$ >> (0,0) and (4,1) also (8,2)

$X_1 = 4$



لتحديد اتجاه منطقة الحل لكل قيد:

القيد الاول:

نختارنقطه لتكن (3,2)

$-X_1 + 4X_2 \geq 0$

$5 \geq 0$

لرسم مستقيم دالة الهدف الذي يمر بنقطة اختياريه لتكن (0,1)

$-X_1 + X_2 = 1$

نحتاج نقطه اخرى لنفترض $X_1 = 5$

$X_2 = 6$

نلاحظ ان الحل غير محدود

H.W

أوجدي الحل الأمثل (إن وجد) بيانيا لكل من النماذج الخطية التالية:

1- Max $Z = 10X_1 + 8X_2$

Subject to

$2X_1 + X_2 \leq 40$

$2X_1 + 3X_2 \leq 80$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

2- Min $Z = 120X_1 + 100X_2$

Subject to

$10X_1 + 5X_2 \leq 80$

$6X_1 + 6X_2 \leq 66$

$4X_1 + 8X_2 \geq 24$

$5X_1 + 6X_2 \leq 90$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

3- Max $Z = 2X_1 + X_2$

Subject to:

$X_1 - X_2 \leq 10$

$2X_1 \leq 40$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

الجواب: الحل غير محدود

4- Max $Z = X_1 + X_2$

Subject to

$X_1 - X_2 + 1 \leq 0$

$-X_1 + X_2 + 1 \leq 0$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

الجواب: لايوجد حل (لا توجد منطقة تقاطع مشتركة)

5- Min $Z = 3X_1 + 2X_2$

Subject to

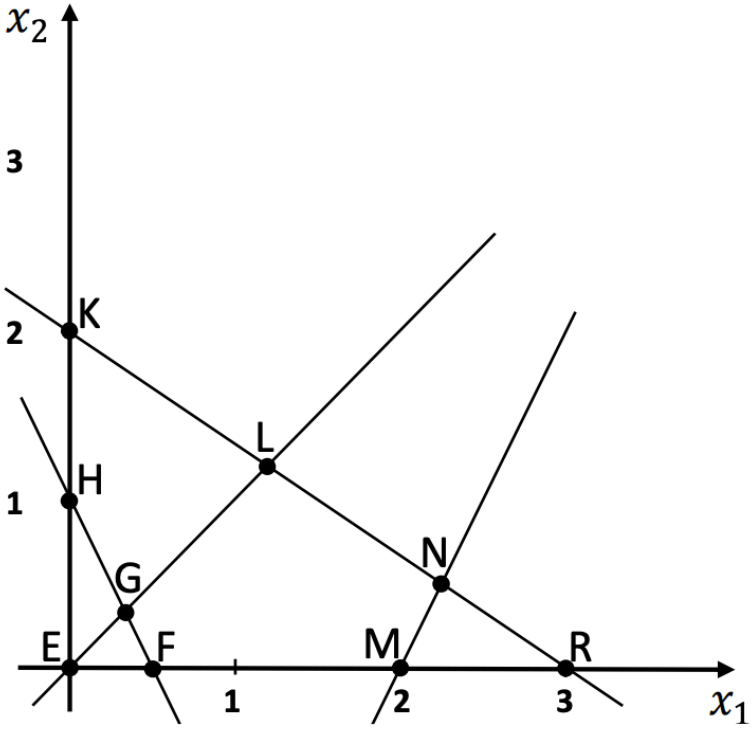
$-X_1 + X_2 \leq 2$

$3X_1 + 2X_2 \geq 12$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$

الجواب: حلول مثلى (متعددة)

سؤال من الاختبارات السابقة :



ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي :

$$\begin{aligned} \max\ z &= -x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\quad & 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ & 4x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ & 4x_1 - 2x_2 \le 8 \\ & 2x_1 - 2x_2 \le 0 \\ & x_1 \ge 0\,,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

١. ظلل منطقة الحلول الممكنة في الرسم (منطقة الحلول الممكنة هي المضلع) :

B	EGF	HKLG	A
D	MNR	FGLNM	C

٢. الحل الأمثل للبرنامج الخطي هو عند النقطة :

B	K	L	A
D	G	M	C

٣. القيمة المثلى لدالة الهدف هي :

B	0	-4	A
D	2	4	C

٤. إذا تـغيرت دالـة الـهـدف لـتصبح $\min z = -x_1 + x_2$، فإنه :

A	يوجد حلول مثلى متعددة	B	يوجد حل أمثل وحيد
C	الحل الأمثل غير محدود	D	لا يوجد حلول ممكنة