تمارين #1 : صياغة البرنامج الخطي

1.1 مصنع ينتج نوعين من المنتجات ولديه قسمين إنتاجيين والطاقة المتاحة لكل قسم في الأسبوع هي 26 ساعة للقسم الأول، 30 ساعة للقسم الثاني ويحتاج المنتج الأول الى 2 ساعة من القسم الأول ، 5 ساعات من القسم الثاني وربح الوحدة منه 40$.
كما يحتاج المنتج الثاني الى 4 ساعات من القسم الأول ، 3 ساعات من القسم الثاني وربح الوحدة منه 60$.

المطلوب صياغة هذه المشكلة في صورة برنامج خطي لتعظيم أرباح المصنع

الحل :

المنتج	الأقسام الانتاجية		ربح الوحدة
	الأول	الثاني	
المنتج الأول	2	5	40$
المنتج الثاني	4	3	60$
الساعات المتاحة في كل قسم إنتاجي	26	30	

- **متغيرات القرار :**
x_1 : عدد الوحدات المنتجة اسبوعياً من المنتج الأول
x_2 : عدد الوحدات المنتجة اسبوعياً من المنتج الثاني

- **الهدف :** إيجاد برنامج يحقق اكبر ربح للمصنع .

- **البرنامج الخطي:**

$$\max z = 40x_1 + 60x_2$$

- **القيود :**

$$2x_1 + 4x_2 \leq 26$$
$$5x_1 + 3x_2 \leq 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1.2 إحدى شركات تصنيع السيارات قررت إنتاج ثلاث أنواع من السيارات للسنه القادمة، سيارة A (صغيرة الحجم) و سيارة B (متوسطة الحجم) و سيارة C (كبيرة الحجم) . إنتاج كل نوع من هذه السيارات الثلاث يتطلب كميات مختلفة من الحديد و ساعات الإنتاج وتعطي ربح مختلف، كما يبين الجدول التالي:

نوع السيارة	كمية الحديد (طن/سيارة)	ساعات الإنتاج (ساعة/سيارة)	الربح من بيع السيارة (ريال/سيارة)
سيارة A	1	100	10000
سيارة B	2	125	15000
سيارة C	3	150	20000

- يتوفر لدى الشركة للسنة الإنتاجية القادمة 90000 طن حديد و 100000 ساعة إنتاج.
- الشركة تريد أن يكون مجموع إنتاجها من جميع أنواع السيارات الثلاث على الأقل 50000 سيارة
- أن يكون إنتاجها من السيارات من النوع A على الأقل ضعف إنتاجها من كلا النوعين B و C.
- ألاّ يزيد إنتاجها من السيارات من النوع B عن إنتاجها من النوع C بأكثر من 7500 سيارة.

صغ البرنامج الرياضي الخطي لهذه المسألة.

الحل :

- **متغيرات القرار :**

x_1 : عدد السيارات المنتجة للسنه القادمة من النوع A.

x_2 : عدد السيارات المنتجة للسنه القادمة من النوع B.

x_3 : عدد السيارات المنتجة للسنه القادمة من النوع C.

- **دالة الهدف : (الهدف :** إيجاد برنامج يحقق اكبر ربح للشركة)

$$\max z = 10000\,x_1 + 15000\,x_2 + 20000\,x_3$$

- **النموذج الرياضي :**

$$\max z = 10000x_1 + 15000x_2 + 20000x_3$$

Constraints(القيود):

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 90000$$

$$100x_1 + 125\,x_2 + 150x_3 \leq 100000$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 50000$$

$$x_1 - 2x_2 - 2x_3 \geq 0$$

$$x_2 - x_3 \leq 7500$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1.3 مصنع يقوم بإنتاج نوعين من الأجهزة الكهربائية ولديه ثلاثة أقسام إنتاجية والطاقة الإنتاجية لكل قسم هي 36، 60 60 على الترتيب ويحتاج المنتج الأول إلى 0.3 ساعة، 1 ساعة، 1.2 ساعة من الأقسام الإنتاجية على الترتيب.
أما المنتج الثاني فيحتاج إلى 0.6 ساعة، 0.8 ساعة، 0.4 ساعة من الأقسام الإنتاجية على الترتيب.وإذا علمت أن ربح الوحدة من المنتج الأول 20$ ومن المنتج الثاني هي 50$.

المطلوب صياغة هذه المشكلة في صورة برنامج خطي لتعظيم أرباح المصنع

الحل :

المنتج	الأقسام الانتاجية			ربح الوحدة
	الأول	الثاني	الثالث	
المنتج الأول	0.3	1	1.2	20$
المنتج الثاني	0.6	0.8	0.4	50$
الساعات المتاحة في كل قسم إنتاجي	36	60	60	

- **متغيرات القرار :**

x_1 : عدد الوحدات المنتجة من المنتج الأول.

x_2 : عدد الوحدات المنتجة من المنتج الثاني.

- **دالة الهدف : (الهدف :** إيجاد برنامج يحقق اكبر ربح للمصنع)

$$\max z = 20x_1 + 50x_2$$

- **البرنامج الخطي :**

$$\max z = 20x_1 + 50x_2$$

Constraints (القيود) :

$$0.3x_1 + 0.6x_2 \leq 36$$
$$x_1 + 0.8x_2 \leq 60$$
$$1.2x_1 + 0.4x_2 \leq 60$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1.4 شركة تصنيع وطنية تنتج لعبة للأطفال ، هذه الشركة لديها مصنعان (مصنع A ومصنع B) لإنتاج هذه اللعبة.

- المصنع A يمكن أن ينتج بحد أقصى 400 لعبة.
- المصنع B يمكن أن ينتج بحد أقصى 350 لعبة.
- الشركة لديها ثلاث معارض تسويق لبيع هذه اللعبة.
- الطلب المتوقع على اللعبة في المعرض الأول هو 150 لعبة.
- الطلب المتوقع على اللعبة في المعرض الثاني هو 200 لعبة.
- الطلب المتوقع على اللعبة في المعرض الثالث هو 350 لعبة.
- الشركة تستطيع أن تبيع هذه اللعبة في المعرض الأول بسعر 12 ريال.
- الشركة تستطيع أن تبيع هذه اللعبة في المعرض الثاني بسعر 14 ريال.
- الشركة تستطيع أن تبيع هذه اللعبة في المعرض الثالث بسعر 15 ريال.

تكلفة إنتاج و شحن اللعبة الواحدة من المصانع لمعارض التسويق هي كما يلي:

	مصنع التسويق الأول	مصنع التسويق الثاني	مصنع التسويق الثالث
المصنع A	**8**	**6**	**12**
المصنع B	**7**	**9**	**11**

<u>الشركة تريد أن تحدد أفضل خيارات تصنيع و تزويد المعارض بهذه اللعبة.</u>

الحل :

x_{ij} : عدد اللعب المصنعة في المصنع i والمرسلة للبيع في معرض التسويق j

i : 1 , 2 (تمثلان المصنعين A و B)

j : 1 , 2 , 3 (تمثلان معرض التسويق الأول ، الثاني و الثالث)

$$Max\ z = 4x_{11} + 8x_{12} + 3x_{13} + 5x_{21} + 5x_{22} + 4x_{23}$$

s.t

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 400$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 350$$
$$x_{11} + x_{21} \geq 150$$
$$x_{12} + x_{22} \geq 200$$
$$x_{13} + x_{23} \geq 350$$
$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1,2 \quad ; j=1,2,3$$

الحل الأمثل لهذه المسألة هو:

$$x_{11}^* = 0, x_{12}^* = 250, x_{13}^* = 150, x_{21}^* = 150, x_{22}^* = 0, x_{23}^* = 200,$$
$$z^* = 4000$$

لو استبدلنا قيود الطلب (الثلاث قيود الأخيرة) بعلاقة "=" ، سيصبح الحل الأمثل:

$$x_{11}^* = 0, x_{12}^* = 200, x_{13}^* = 150, x_{21}^* = 150, x_{22}^* = 0, x_{23}^* = 200,$$
$$z^* = 3600$$

1.5 أحد التجار يقوم بشراء السيارات المستعملة من الكويت (1) ، قطر (2) والإمارات (3) ومن ثم يقوم ببيعها في السعودية.
هذا التاجر قرر القيام برحلة تجارية في تلك البلدان الثلاثة، ولديه المعلومات التالية حول توفر السيارات المستعملة في تلك الدول والربح المتحصل من بيعها:

	عدد السيارات المستعملة التي يتم شراؤها في اليوم الواحد	صافي الربح من بيع كل مجموعة من السيارات التي يتم شراؤها في اليوم الواحد
(1) الكويت	**20**	**40000**
(2) قطر	**10**	**30000**
(3) الإمارات	**15**	**60000**

التاجر من خبرته في السوق وضع عددًا من القيود:

- أن تكون المدة التي يقضيها في الرحلة تساوي 100 يوم
- أن يشتري على الأقل 1000 سيارة مستعملة خلال هذه الرحلة التجارية.
- ألاّ يزيد عدد السيارات التي يشتريها من الإمارات عن مجموع السيارات التي يشتريها من كلا من الكويت و قطر.
- أن يقضي على الأقل نصف مدة الرحلة في كلاً من الإمارات و قطر.

الحل :

- **متغيرات القرار :**

x_i : عدد الأيام التي يقضيها التاجر في كل بلد i = { 1 : الكويت، 2 : قطر، 3 : الإمارات }

- **دالة الهدف : (الهدف :** إيجاد برنامج يحقق اكبر ربح للتاجر)

$$\max z = 40000x_1 + 30000x_2 + 60000x_3$$

- **البرنامج الخطي :**

$$\max z = 40000x_1 + 30000x_2 + 60000x_3$$

Constraints (القيود) :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$
$$20x_1 + 10x_2 + 15x_3 \geq 1000$$
$$20x_1 + 10x_2 - 15x_3 \geq 0$$
$$x_2 + x_3 \geq 50$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1.6 تفكر إحدى الشركات الصناعية الكيمائية في تسويق منتجها الجديد الذي يتمثل في خلطة وزنها 500 كيلوجرام وتقتضي شروط الجودة :

- ألا تتضمن الخلطة ما يزيد عن 400 كيلوجرام من العنصر الأول .
- أن تتضمن هذه الخلطة على الأقل 200 كيلوجرام من العنصر الثاني .

فإذا علمت أن تكلفة الكيلو جرام من العنصر الأول 5$ ومن العنصر الثاني 8$

المطلوب: صياغة هذه المشكلة في صورة برنامج خطي لتخفيض التكاليف

الحل :

- **متغيرات القرار :**

x_1 : كمية المادة المضافة بالكيلوجرام من العنصر الأول الى خلطة المنتج الجديد.

x_2 : كمية المادة المضافة بالكيلوجرام من العنصر الثاني الى خلطة المنتج الجديد.

- **دالة الهدف : (الهدف :** إيجاد برنامج يخفض تكاليف الشركة)

$$\min z = 5x_1 + 8x_2$$

- **البرنامج الخطي :**

$$\min z = 5x_1 + 8x_2$$

Constraints (القيود) :

$$x_1 \leq 400$$

$$x_2 \geq 200$$

$$x_1 + x_2 = 500$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

1.7 خالد يريد شراء تمر أو تفاح ، ولديه البيانات التالية:

	محتويات الكيلو الواحد من وحدات الفيتامين (وحده/كيلو)		تكلفة الكيلو (ريال/كيلو)
	فيتامين A	فيتامين B	
تمر	3	1	7
تفاح	1	1	1

خالد يحتاج يومياً على الأقل 12 وحدة من فيتامين A و على الأقل 6 وحدات من فيتامين B.

صغ برنامج رياضي خطي يساعد خالد في الحصول على المتطلبات الغذائية له بأقل تكلفة ممكنة

الحل :

" مثال بسيط لتوضيح فكرة لماذا نستخدم في بعض القيود العلاقة " ≥ " بدلاً من "=".

نعرف المتغيرات التالية:

x_1 : كمية التمر (بالكيلو) الذي سيشتريه خالد يومياً

x_2 : كمية التفاح (بالكيلو) الذي سيشتريه خالد يومياً

$$\text{Min } z = 7x_1 + x_2$$
$$\text{S.t.}$$
$$3x_1 + x_2 \geq 12$$
$$x_1 + x_2 \geq 6$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

الحل الأمثل لهذه المسألة هو:

$$x_1^* = 0 \ , \ x_2^* = 12 \ , \ z^* = 12$$

سيستهلك كمية إضافية من فيتامين B.

لا حظ لو كانت المسألة كما يلي :

يجب أن يستهلك تماماً 12 وحدة من فيتامين A و 6 وحدات من فيتامين B:

فبالتالي البرنامج الخطي سيكون :

$$\text{Min } z = 7x_1 + x_2$$
$$\text{S.t.}$$
$$3x_1 + x_2 = 12$$
$$x_1 + x_2 = 6$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

الحل الأمثل لهذه المسألة هو:

$$x_1^* = 3 \ , \ x_2^* = 3 \ , \ z^* = 24$$

سيستهلك نفس الكميات المطلوبة من فيتامين A و B ، ولكن سيخسر مالاً أكثر !

1.8 شركة سامسونج ستنتج السنة القادمة ثلاثة أنواع فقط من أجهزة الجوالات: S1,S2,S3.

ليكن :

x_1: عدد الجوالات المنتجة السنة القادمة من النوع **S1**

x_2: عدد الجوالات المنتجة السنة القادمة من النوع **S2**

x_3: عدد الجوالات المنتجة السنة القادمة من النوع **S3**

افترض لديك القيوم التالية على الإنتاج للسنة القادمة:

- يجب أن تكون نسبة إنتاج النوع **S1** لا تتجاوز 50% من إنتاج الشركة.
- يجب ألا يتجاوز إنتاج الشركة من النوع **S1** ضعف إنتاجها من النوع **S2**.
- يجب ألا يقل عدد مايتم إنتاجه من النوع **S3** عن 25% من إنتاج الشركة.

- يجب أن يكون الإنتاج من النوعين **S1**,**S2** على الأقل 75% من إنتاج الشركة.
- لكل جهاز يتم إنتاجه من النوع **S2** يجب إنتاج على الأقل جهازين من النوع **S3**.
- نسبة إنتاج النوع **S1** للنوع **S2** هي جهاز واحد **S1** على الأكثر لكل ثلاثة أجهزة **S2**.

أكتب هذه القيود بشكل رياضي.

الحل :

1. $\frac{x_1}{x_1+x_2+x_3} \leq 0.50$
2. $x_1 \leq 2x_2$
3. $\frac{x_3}{x_1+x_2+x_3} \geq 0.25$
4. $\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2+x_3} \geq 0.75$ ⟵

القيد بهذا الشكل غير خطي ،
لكن يمكن إعادة كتابته بشكل خطي :

$x_1 + x_2 \geq 0.75(x_1 + x_2 + x_3)$

أو

$0.25x_1 + 0.25x_2 - 0.75x_3 \geq 0$

5. $x_3 \geq 2x_2$ أو $\frac{x_3}{x_2} \geq \frac{2}{1}$
6. $3x_1 \leq x_2$ أو $\frac{x_1}{x_2} \leq \frac{1}{3}$

سؤال من الاختبارات السابقة :

إحدى الشركات لديها مصنعين لإنتاج الحديد والنحاس. كل مصنع يختلف في تكلفة إنتاج الطن الواحد و كذلك في الوقت المطلوب لإنتاج الطن الواحد ، كما يبين الجدول التالي :

	الحديد		النحاس	
	تكلفة الإنتاج (ريال/طن)	وقت الإنتاج (دقيقة / طن)	تكلفة الإنتاج (ريال/طن)	وقت الإنتاج (دقيقة / طن)
مصنع الرياض	10	20	12	22
مصنع الدمام	14	25	13	23

كل مصنع يعمل لمدة 200 ساعة في الشهر . الشركة لديها شروط الإنتاج التالية :

- في كل شهر ، يجب إنتاج مالا يقل عن 500 طن من الحديد و مالا يقل عن 600 طن من النحاس.
- يجب أن يستخدم مصنع الرياض لإنتاج مالايقل عن 60% من إجمالي إنتاج الشركة من الحديد.
- في مصنع الدمام : يجب ألا يزيد إنتاج الحديد عن إنتاج النحاس بأكثر من 50 طن.

عند صياغة المسألة بنموذج رياضي خطي ، أجب عما يلي :

١. متغيرات القرار (الكمية المنتجة هي للشهر الواحد) :

A	x_1 : كمية الإنتاج بالطن المنتجة في مصنع الرياض. x_2: كمية الإنتاج بالطن المنتجة في مصنع الدمام. x_3 : كمية الإنتاج بالطن من الحديد. x_4 : كمية الإنتاج بالطن من النحاس.	**B**	x_1 : كمية الحديد بالطن المنتجة في مصنع الرياض. x_2: كمية النحاس بالطن المنتجة في مصنع الرياض. x_3 : كمية الحديد بالطن المنتجة في مصنع الدمام. x_4 : كمية النحاس بالطن المنتجة في مصنع الدمام.
C	x_1 : كمية الإنتاج بالطن المنتجة في مصنع الرياض. x_2: كمية الإنتاج بالطن المنتجة في مصنع الدمام.	**D**	x_1 : كمية الإنتاج بالطن من الحديد. x_2 : كمية الإنتاج بالطن من النحاس.

٢. دالة الهدف :

A	$\min z = 10x_1 + 12x_2 + 14x_3 + 13x_4$	**B**	$\min z = 22x_1 + 27x_2$
C	$\min z = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 + 13x_4$	**D**	$\min z = 24x_1 + 25x_2$

٣. من ضمن القيود الخطية :

A	$20x_1 + 22x_2 \geq 200(60)$	$20x_1 + 25x_2 \leq 200(60)$	**B**
C	$20x_1 + 22x_2 \leq 200(60)$	$42x_1 + 48x_2 \leq 200(60)$	**D**

٤. من ضمن القيود الخطية :

A	$x_1 + x_3 \geq 500$	$x_1 \geq 500$	**B**
C	$x_1 \geq 500$ $x_3 \geq 500$	$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1100$	**D**

٥. من ضمن القيود الخطية :

A	$x_1 \leq 0.6\ (x_1 + x_3)$	$x_1 \geq 0.6\ x_3$	**B**
C	$x_1 \geq 0.6\ (x_1 + x_2)$	$x_1 \geq 0.6\ (x_1 + x_3)$	**D**

٦. من ضمن القيود الخطية :

A	$x_1 - x_2 \leq 50$	$x_3 - x_4 \leq 50$	**B**
C	$x_3 - x_4 \geq 50$	$x_3 \leq 50$	**D**