التحليل الحقيقي

أ.د. إبراهيم العليان

جامعة الملك سعود

المحتويات

1. الاتصال
2. خواص الاتصال على فترة
3. الدوال المطردة
4. الاتصال المنتظم

الاتصال

الدالة المتصلة

تعريف

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ،و كانت $c \in D$، فإن الدالة f متصلة عند c إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta > 0 : \quad x \in D, \quad |x - c| < \delta \quad \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

ملاحظات

1. نعرف نهاية الدالة f عند أي نقطة في $\widehat{D}$ وإن لم تكن في D،
بينما يعرف الاتصال عند أي نقطة في D حتى وإن كانت معزولة.

ملاحظات

1. نعرف نهاية الدالة f عند أي نقطة في $\widehat{D}$ وإن لم تكن في D،
بينما يعرف الاتصال عند أي نقطة في D حتى وإن كانت معزولة.
2. تكون الدالة متصلة عند $c \in D \cap \widehat{D}$ إذا وفقط إذا كان

$$f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$$

ملاحظات

1. إذا كانت $c \in D$ نقطة معزولة، فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$(c-\delta, c+\delta) \cap D = \{c\}$$

وبالتالي، فإنه لأي $\varepsilon > 0$، فإن

$$|f(x) - f(c)| = 0 < \varepsilon \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta) \cap D$$

ملاحظات

1. إذا كانت $c \in D$ نقطة معزولة، فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$(c-\delta, c+\delta) \cap D = \{c\}$$

وبالتالي، فإنه لأي $\varepsilon > 0$، فإن

$$|f(x) - f(c)| = 0 < \varepsilon \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta) \cap D$$

2. إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإنه لكل جوار V للنقطة $f(c)$ يوجد جوار U للنقطة c بحيث

$$x \in U \cap D \Longrightarrow \quad f(x) \in V$$

ملاحظات

1. إذا كانت $c \in D$ نقطة معزولة، فإنه يوجد $\delta > 0$ بحيث

$$(c-\delta, c+\delta) \cap D = \{c\}$$

وبالتالي، فإنه لأي $\varepsilon > 0$، فإن

$$|f(x) - f(c)| = 0 < \varepsilon \quad \forall x \in (c-\delta, c+\delta) \cap D$$

2. إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإنه لكل جوار V للنقطة $f(c)$ يوجد جوار U للنقطة c بحيث

$$x \in U \cap D \Longrightarrow \quad f(x) \in V$$

3. تكون f متصلة على مجموعة D إذا كانت متصلة عند كل نقطة في D.

نظرية

نظرية

الدالة $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ متصلة إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مفتوحة هي مجموعة مفتوحة.

نظرية

نظرية

الدالة $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ متصلة إذا وفقط إذا كانت الصورة العكسية لأي مجموعة مغلقة هي مجموعة مغلقة.

الدالة المتصلة

نظرية

تكون الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة عند $c \in D$. إذا وفقط إذا كان لكل متتالية (x_n) في D تحقق $x_n \longrightarrow c$ ، فإن المتتالية $(f(x_n))$ متقاربة ونهايتها $f(c)$.

الدالة غير المتصلة

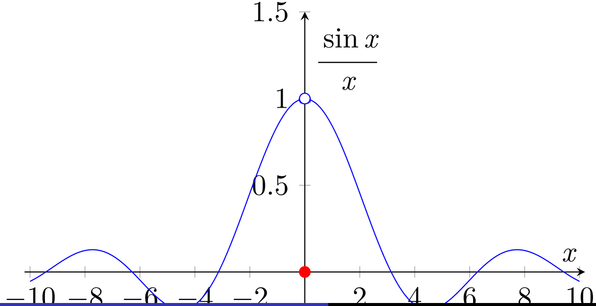
نتيجة

تكون الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ غير متصلة عند $c \in D$. إذا وفقط إذا وجدت متتالية (x_n) في D تحقق $x_n \longrightarrow c$ ولكن صورتها $(f(x_n))$ غير متقاربة من $f(c)$.

أمثلة

1. كثيرة الحدود دالة متصلة.
2. الدالة $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$



أمثلة

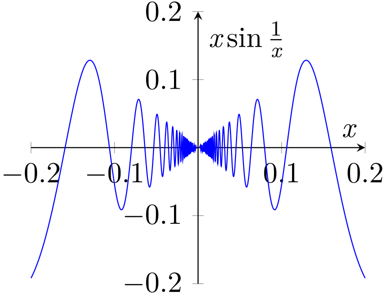
1. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\in\mathbb{Q}^c\end{cases}$$

أمثلة

1. إذا كانت $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفة كما يلي

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$



أمثلة

إذا كانت $f:(0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ معرفة كما يلي

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Q}^c \\ \dfrac{1}{q} & x=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q},(p,q)=1 \end{cases}$$

أمثلة

إذا كانت $f:(0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة كما يلي

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q}^c \\ \dfrac{1}{q} & x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}, (p,q) = 1 \end{cases}$$

فإن الدالة متصلة على الأعداد غير النسبية، لأنه لكل عدد غير نسبي c، فإن:

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0 = f(c)$$

أنواع عدم الاتصال

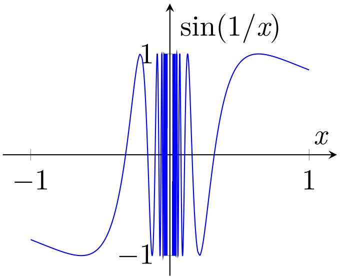
1. عدم الاتصال القابل للإزالة. ويحدث عندما تكون النهاية $\lim_{x \to c} f(x)$ موجودة ولكن $f(c) \neq \lim_{x \to c} f(x)$. وفي هذه الحالة يمكن إعادة تعريف الدالة عند c بحيث تساوي قيمة النهاية.

أنواع عدم الاتصال

1. عدم الاتصال القابل للإزالة، ويحدث عندما تكون النهاية $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة ولكن $f(c) \neq \lim_{x\to c} f(x)$، وفي هذه الحالة يمكن إعادة تعريف الدالة عند c بحيث تساوي قيمة النهاية.
2. عدم الاتصال من نوع القفزة:إذا كانت النهايتان اليمنى واليسرى للدالة f موجودتين عند c ولكنهما غير متساويتين أي $\lim_{x\to c^-} f(x) \neq \lim_{x\to c^+} f(x)$.

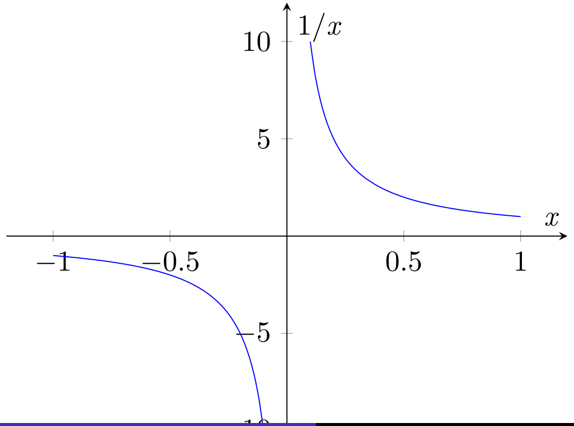
أنواع عدم الاتصال

1. عدم الاتصال المتذبذب: إذا كانت أحدى النهايتين $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ أو $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ غير موجودة.

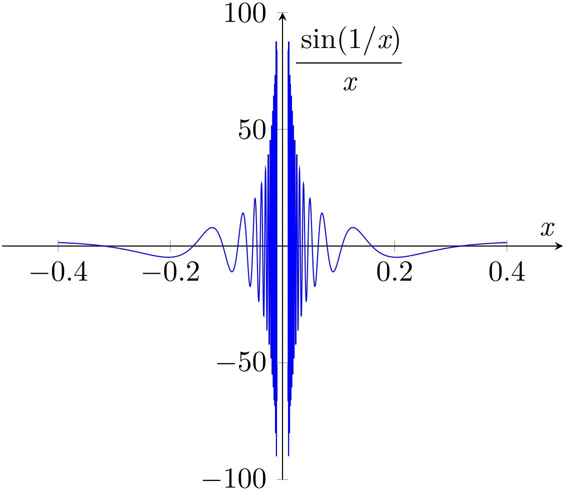


أنواع عدم الاتصال

1. عدم الاتصال اللانهائي: عندما تكون f غير محدودة في كل جوار للنقطة c، مثلا $\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$.



أنواع عدم الاتصال



نظرية

نظرية

إذا كانت $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة عند $c \in D$، فإن $f+g, f-g, fg$ متصلة عند c، كما أن f/g متصلة عند c إذا كانت $g(c) \neq 0$.

نتيجة

نتيجة

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة عند $c \in D$، فإن kf متصلة عند c، لأي ثابت k.

نتيجة

نتيجة

إذا كانت $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة على D، فإن $f+g, f-g, fg$ متصلة على D، كما أنه إذا كانت $g(x) \neq 0$ لكل $x \in D$، فإن f/g متصلة على D.

أمثلة

ما مجال اتصال الدوال التالية؟

1. الدالة الكسرية $p(x)/q(x)$ حيث p و q كثيرتا حدود

أمثلة

ما مجال اتصال الدوال التالية؟

1. الدالة الكسرية $p(x)/q(x)$ حيث p و q كثيرتا حدود
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

أمثلة

ما مجال اتصال الدوال التالية؟

1. الدالة الكسرية $p(x)/q(x)$ حيث p و q كثيرتا حدود
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$
3. $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^4 + 2}$

أمثلة

ما مجال اتصال الدوال التالية؟

1. الدالة الكسرية $p(x)/q(x)$ حيث p و q كثيرتا حدود
2. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$
3. $f(x) = \dfrac{x+4}{x^4+2}$
4. $\sin x, \cos x$

أمثلة

ما مجال اتصال الدوال التالية؟

1. الدالة الكسرية $p(x)/q(x)$ حيث p و q كثيرتا حدود
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$
3. $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^4 + 2}$
4. $\sin x, \cos x$
5. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

أمثلة

ما مجال اتصال الدوال التالية؟

1. الدالة الكسرية $p(x)/q(x)$ حيث p و q كثيرتا حدود
2. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$
3. $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^4 + 2}$
4. $\sin x, \cos x$
5. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
6. $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

نظرية

نظرية

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ، و $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ دالتان بحيث $f(D) \subset E$، وكانت f متصلة عند $c \in D$ ، و g متصلة عند $f(c)$ ، فإن دالة التحصيل $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة عند c.

نتيجة

نتيجة

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة على D، والدالة $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة على E، وكانت $f(D) \subset E$، فإن الدالة $g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة على D.

ملاحظة

1. إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = L$ و $\lim_{x\to L} g(x) = M$، فليس بالضرورة أن $\lim_{x\to c} g(f(x)) = M$.

ملاحظة

1. إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = L$ و $\lim_{x\to L} g(x) = M$، فليس بالضرورة أن $\lim_{x\to c} g(f(x)) = M$.

2. لتكن

$$f(x) = x$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} g(f(x)) =$$

$$g\left(\lim_{x\to 0} f(x)\right) =$$

أمثلة

1. إذا كانت الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإن الدالة $|f|$ متصلة على D.

أمثلة

1. إذا كانت الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإن الدالة $|f|$ متصلة على D.
2. إذا كانت الدالة $f : D \longrightarrow [0, \infty)$ متصلة، فإن الدالة $\sqrt{f}$ متصلة على D.

أمثلة

إذا كانت

$$f(x) = \sqrt{x-2}, \qquad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

فما مجال اتصال الدالة $g \circ f$؟

خواص الاتصال على فترة

الدالة المحدودة

تعريف

نقول إن الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ محدودة، إذا وجد ثابت $M > 0$ بحيث

$$|f(x)| \leq M \qquad \forall x \in D$$

نظرية

نظرية

إذا كانت $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإنها محدودة.

القيم القصوى

تعريف

يكون للدالة $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ قيمة صغرى (مطلقة) على D إذا وجد $x_m \in D$ بحيث

$$f(x_m) \leq f(x) \quad \forall x \in D$$

ويكون لها قيمة عظمى (مطلقة) على D إذا وجد $x_M \in D$ بحيث

$$f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in D$$

وتسمى القيمتان العظمى والصغرى القيم القصوى للدالة.

ملاحظات

1. إذا كان للدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ قيمة صغرى عند x_m وقيمة عظمى عند x_M، فإن $f(D) \subset [f(x_m), f(x_M)]$.
2. القيم القصوى إذا وجدت فهي وحيدة، ولكن قد تأخذها عند أكثر من نقطة.

أمثلة

ما القيم القصوى للدوال التالية؟

1. الدالة $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x)=x^2$
2. الدالة $f:(0,1)\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x)=x^2$
3. الدالة $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة

$$f(x)=\begin{cases} 1/x & x\neq 0\\ 2 & x=0\end{cases}$$

نظرية

نظرية

إذا كانت I فترة مغلقة ومحدودة، وكانت $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإن للدالة f قيمة عظمى وصغرى على I.

نظرية

نظرية

إذا كانت I فترة مغلقة ومحدودة، وكانت $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإن للدالة f قيمة عظمى وصغرى على I.

هذه شروط كافية وليست ضروية.

نظرية القيمة البينية

نظرية

إذا كانت $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ متصلة، وكان λ عددا حقيقيا بين $f(a)$ و $f(b)$ ، فإنه يوجد عدد $c\in(a,b)$ بحيث $f(c)=\lambda$.

البرهان

سنفرض أن $f(a) < f(b)$، إذا

$$f(a) < \lambda < f(b)$$

ولتكن

$$S := \{x \in [a, b] : f(x) < \lambda\}$$

بما أن $a \in S$، إذا $S \neq \phi$، كما أن S محدودة من أعلى بالعدد b، إذا S لها حد علوي أصغر وليكن $c = \sup S$. وبالتالي نستطيع اختيار متتالية $x_n \to c$، ونظرا لاتصال f، فإن $f(x_n) \to f(c)$. وبما أن $f(x_n) < \lambda$ لكل $n \in \mathbb{N}$، فإن

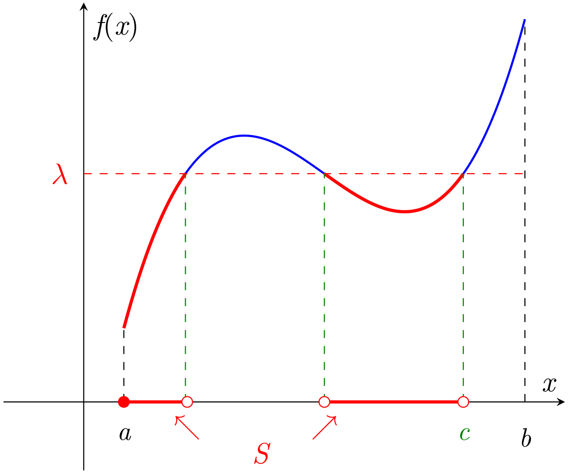
$$f(c) \leq \lambda < f(b)$$

البرهان

هذا يعني أن $c < b$، فنستطيع اختيار متتالية (y_n) في $[c, b]$ متقاربة من c. من الممكن اختيار

$$y_n = \min\left\{c + \frac{1}{n}, b\right\}$$

واضح أن $y_n > c$، إذا $f(y_n) \geq \lambda$. وبما أن $f(c) = \lim f(y_n) \geq \lambda$. وهذا يعني أن $f(c) = \lambda$.



$f(x)$
λ
x
a
S
c
b

نتيجة

نتيجة

إذا كانت $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة على وكانت إشارتا $f(a)$ و $f(b)$ مختلفتين ، فإن للدالة f صفرا في الفترة (a, b).

نتيجة

نتيجة

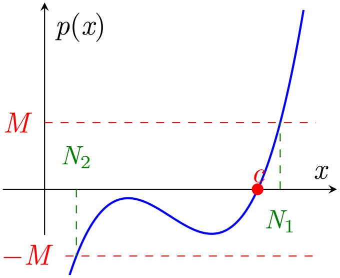
إذا كانت I فترة، والدالة $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإن $f(I)$ فترة.

أمثلة

1. أثبت أنه يوجد جذر حقيقي للمعادلة $x^3 - 2 = 0$ في الفترة $[1, 2]$.

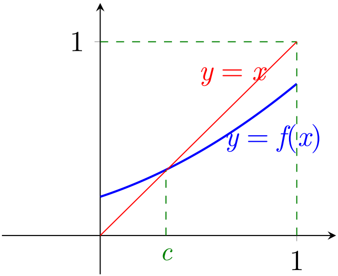
أمثلة

1. أثبت أنه يوجد جذر حقيقي للمعادلة $x^3 - 2 = 0$ في الفترة $[1, 2]$.
2. لتكن p كثيرة حدود حقيقية من الدرجة n. إذا كان n عددا فرديا، فإن للمعادلة $p(x) = 0$ جذرا حقيقيا واحدا على الأقل.



نظرية النقطة الثابتة

إذا كانت $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ متصلة، فأثبت أن f لها نقطة ثابتة. أي يوجد $c \in [0,1]$ بحيث $f(c) = c$.



نتيجة

نتيجة

إذا كانت f متصلة على فترة مغلقة ومحدودة $[a, b]$، فإن $f([a, b])$ فترة مغلقة ومحدودة.

الدوال المطردة

تعريف

تعريف

1. نقول إن f متزايدة إذا كان

$$x, y \in D,\ \ x < y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$$

وتكون متزايدة فعلا إذا كان $f(x) < f(y)$.

2. نقول إن f متناقصة إذا كان

$$x, y \in D,\ \ x < y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$$

وتكون متناقصة فعلا إذا كان $f(x) > f(y)$.

ملاحظات

1. نقول إن f مطردة إذا كانت متزايدة أو متناقصة.
2. f متزايدة إذا وفقط إذا كانت $-f$ متناقصة.

نظرية

نظرية

إذا كانت $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ متزايدة، فإنه لكل $c\in(a,b)$ تكون $\lim_{x\to c^-} f(x), \lim_{x\to c^+} f(x)$ موجودتين، كما أن

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=\inf\{f(x):x\in(c,b]\}$$

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\sup\{f(x):x\in[a,c)\}$$

إضافة لذلك، فإن

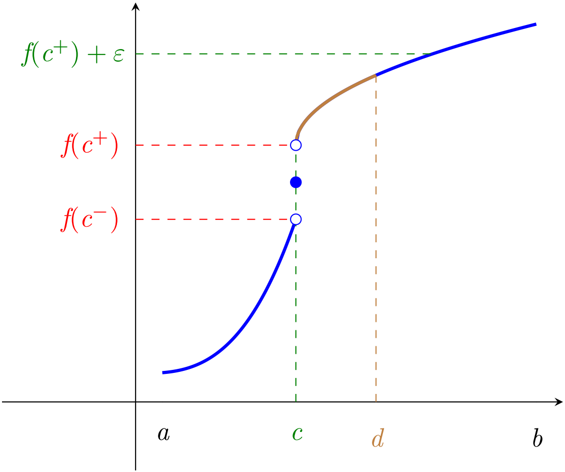
$$\lim_{x\to c^-} f(x)\le f(c)\le \lim_{x\to c^+} f(x)$$

نظرية

تكملة

كما أن $\lim_{x \to a^+} f(x)$ و $\lim_{x \to b^-} f(x)$ موجودة وتحقق

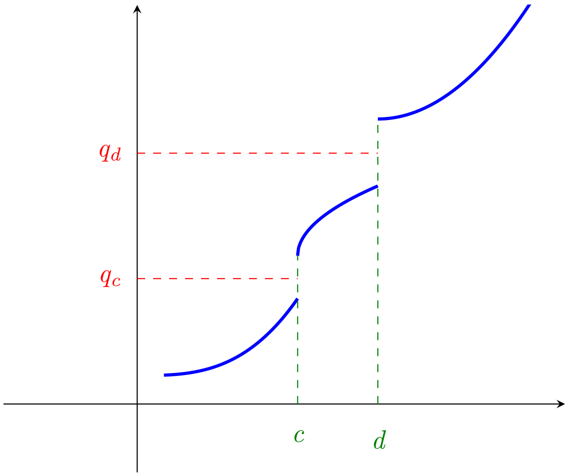
$$f(a) \leq \lim_{x \to a^+} f(x), \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) \leq f(b)$$


$f(c^+) + \varepsilon$
$f(c^+)$
$f(c^-)$
a
c
d
b

نظرية

نظرية

إذا كانت $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ مطردة، فإن مجموعة نقاط عدم اتصال f ولتكن A قابلة للعد.


q_d
q_c
c
d

نظرية

نظرية

لتكن I فترة. إذا كانت $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة ومتباينة، فإنها مطردة فعلا.

نظرية

نظرية

لتكن I فترة. إذا كانت $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ مطردة على I، وكان مدى f أي $f(I)$ فترة، فإن f متصلة.

نظرية

نظرية

لتكن I فترة. إذا كانت $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة ومتباينة، فإن f^{-1} متصلة ومطردة فعلا.

أمثلة

أثبت أن $f(x)=\sqrt[n]{x}$ دالة متصلة على $[0,\infty)$.

أمثلة

لاحظ أن اتصال f لوحده غير كاف لضمان اتصال f^{-1}.

أمثلة

لاحظ أن اتصال f لوحده غير كاف لضمان اتصال f^{-1}.

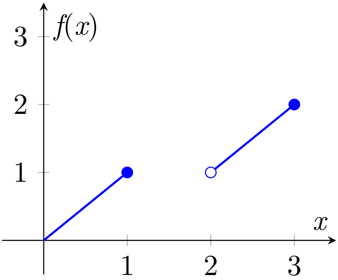
إذا كانت الدالة $f : [0,1] \cup (2,3] \longrightarrow [0,2]$ حيث

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

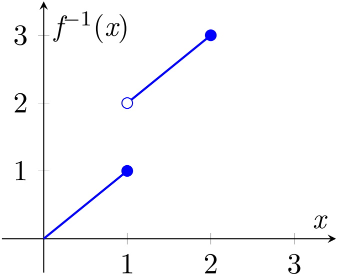
فإن f متصلة ومتباينة، ولكن $f^{-1} : [0,2] \longrightarrow [0,1] \cup (2,3]$ حيث

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x+1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

غير متصلة.



$f(x)$
3
2
1
x
1
2
3



$f^{-1}(x)$
3
2
1
x
1
2
3

نظرية

إذا كانت $D \subset \mathbb{R}$ ، فإن التقارير التالية متكافئة:

1. المجموعة D متراصة.
2. المجموعة D مغلقة ومحدودة.
3. لكل متتالية عناصرها في D، يوجد متتالية جزئية متقاربة نهايتها في D.

نظرية

نظرية

إذا كانت $\mathbb{R} \supset D$ متراصة، وكانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإن $f(D)$ متراصة.

ملاحظات

1. إذا كانت $\mathbb{R} \longrightarrow D : f$ دالة متصلة، وكانت D مجموعة مفتوحة، فليس بالضرورة أن تكون $f(D)$ مجموعة مفتوحة

ملاحظات

1. إذا كانت $\mathbb{R} \longrightarrow D : f$ دالة متصلة، وكانت D مجموعة مفتوحة، فليس بالضرورة أن تكون $f(D)$ مجموعة مفتوحة
   1. إذا كانت $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = 2$، فإن $f((0,1)) = \{2\}$ مجموعة غير مفتوحة.
   2. إذا كانت $f : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = \sin x$ ، فإن $f((0,\infty)) = [-1,1]$ مجموعة غير مفتوحة.

ملاحظات

1. إذا كانت $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة، وكانت D مجموعة مفتوحة، فليس بالضرورة أن تكون $f(D)$ مجموعة مفتوحة
   1. إذا كانت $f: (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = 2$، فإن $f((0,1)) = \{2\}$ مجموعة غير مفتوحة.
   2. إذا كانت $f: (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = \sin x$ ، فإن $f((0,\infty)) = [-1,1]$ مجموعة غير مفتوحة.
2. إذا كانت $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة، وكانت D مجموعة مغلقة، فليس بالضرورة أن تكون $f(D)$ مجموعة مغلقة.

ملاحظات

1. إذا كانت $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة، وكانت D مجموعة مفتوحة، فليس بالضرورة أن تكون $f(D)$ مجموعة مفتوحة
   - إذا كانت $f: (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = 2$، فإن $f((0,1)) = \{2\}$ مجموعة غير مفتوحة.
   - إذا كانت $f: (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = \sin x$ ، فإن $f((0,\infty)) = [-1,1]$ مجموعة غير مفتوحة.
2. إذا كانت $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة، وكانت D مجموعة مغلقة، فليس بالضرورة أن تكون $f(D)$ مجموعة مغلقة.
   - في الدالة $f: [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ نلاحظ أن $f([0,\infty)) = (0,1]$ ليست مجموعة مغلقة.

نظرية

نظرية

إذا كانت $D \subset \mathbb{R}$ متراصة، وكانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة، فإنه يوجد $x_1, x_2 \in D$ بحيث

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in D$$

نظرية

نظرية

إذا كانت $D \subset \mathbb{R}$ متراصة، وكانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة ومتباينة ، فإن $f^{-1} : f(D) \longrightarrow D$ متصلة.

الاتصال المنتظم

الاتصال المنتظم

إذا كانت الدالة f متصلة عند نقطة $c \in D$، فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث

$$x \in D, |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

الاتصال المنتظم

إذا كانت الدالة f متصلة عند نقطة $c \in D$، فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث

$$x \in D, |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

لكن لو اخترنا نقطة أخرى $d \in D$ فإنه يوجد $\delta_2 > 0$

$$x \in D, |x - d| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

الاتصال المنتظم

إذا كانت الدالة f متصلة عند نقطة $c \in D$، فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث

$$x \in D, |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

لكن لو اخترنا نقطة أخرى $d \in D$ فإنه يوجد $\delta_2 > 0$

$$x \in D, |x - d| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

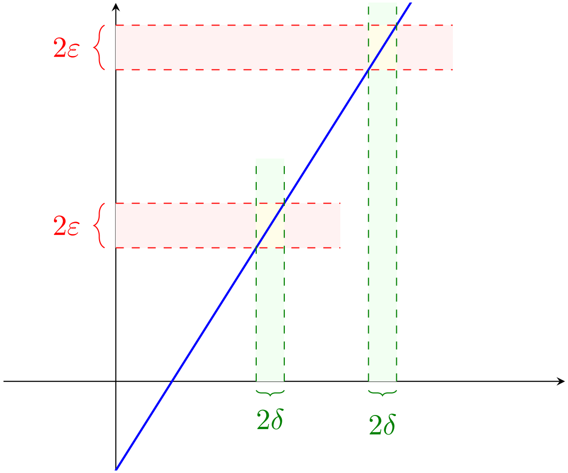
وهذا يعني أن δ مرتبطة بالنقطة c.

الاتصال المنتظم

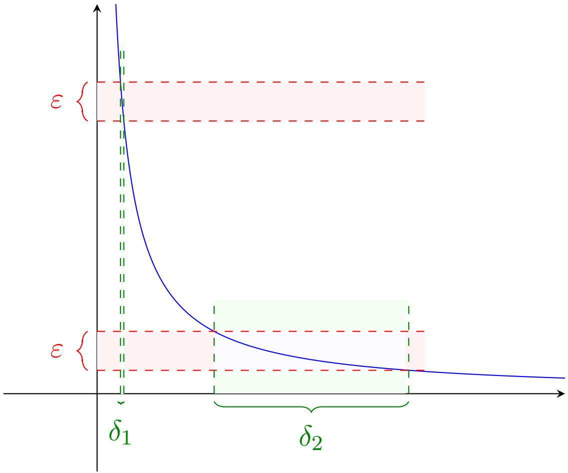
$$f(x) = 2x - 1$$

الاتصال المنتظم

$$f(x) = 2x - 1$$



الاتصال المنتظم



أمثلة

لتكن $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: f معرفة بالقاعدة $f(x) = 2x + 3$.

أمثلة

لتكن $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$: f معرفة بالقاعدة $f(x) = 2x + 3$.

$\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ تحقق شرط الاتصال.

أمثلة

لتكن $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

أمثلة

لتكن $f:(0,1)\longrightarrow \mathbb{R}$ معرفة بالقاعدة $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

$\delta=\min\{\dfrac{c}{2},\dfrac{c^2\varepsilon}{2}\}$ تحقق شرط الاتصال.

الاتصال المنتظم

تعريف

نقول إن الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : \quad x, t \in D, \\ |x - t| < \delta \qquad \Rightarrow |f(x) - f(t)| < \varepsilon$$

ملاحظات

1. الاتصال المنتظم يكون على مجموعة، وليس عند نقطة.
2. أي دالة متصلة بانتظام، فهي متصلة.

أمثلة

لتكن $\mathbb{R} \longrightarrow [2,3] : f$ معرفة بالقاعدة $f(x) = x^2$.

أمثلة

لتكن $\mathbb{R} \longrightarrow [2,3] : f$ معرفة بالقاعدة $f(x) = x^2$.
$\delta = \frac{\varepsilon}{6}$ تحقق شرط الاتصال.

معيار عدم الاتصال المنتظم

نظرية

تكون الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ غير منتظمة الاتصال إذا وفقط إذا وجدت متتاليتان (x_n) و (t_n) في D بحيث

1. $|x_n - t_n| \to 0$
2. $|f(x_n) - f(t_n)| \nrightarrow 0$

نتيجة

نتيجة

تكون الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ منتظمة الاتصال إذا وفقط إذا كان لكل متتاليتين (x_n) و (t_n) في D تحققان $|x_n - t_n| \to 0$ ، فإن $|f(x_n) - f(t_n)| \to 0$.

أمثلة

الدالة $f : (0,2) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \frac{1}{x}$

أمثلة

الدالة $\mathbb{R} \longrightarrow (2,\infty] : f$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \frac{1}{x}$ منتظمة الاتصال.

أمثلة

الدالة $f : [2,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^2$

أمثلة

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^2$

نظرية

نظرية

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة، والمجموعة D مغلقة ومحدودة، فإن f متصلة بانتظام.

أمثلة

الدالة $f : [0, 10] \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^3 - x^2$ متصلة بانتظام.

أمثلة

الدالة $f : (0,10) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = x^4 - x$ متصلة بانتظام.

أمثلة

الدالة $\mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty) : f$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \sqrt{x}$ متصلة بانتظام.

أمثلة

الدالة $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = \sqrt{x}$ متصلة بانتظام.

وهذا يعني أن شروط النظرية السابقة كافية وليست ضرورية لانتظام الاتصال.

شرط ليبشتز

تعريف

نقول إن الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق شرط ليبشتز ، إذا كان هناك ثابت $K > 0$ بحيث

$$|f(x) - f(t)| \leq K|x - t| \quad \forall x, t \in D$$

شرط ليبشتز

تعريف

نقول إن الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق شرط ليبشتز ، إذا كان هناك ثابت $K > 0$ بحيث

$$|f(x) - f(t)| \leq K|x - t| \quad \forall x, t \in D$$

المعنى الهندسي

شرط ليبشتز

تعريف

نقول إن الدالة $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ تحقق شرط ليبشتز ، إذا كان هناك ثابت $K > 0$ بحيث

$$|f(x) - f(t)| \leq K|x - t| \quad \forall x, t \in D$$

المعنى الهندسي

$$f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \tan(x)$$

أمثلة

1. الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x) = 4x - 5$ تحقق شرط ليبشتز

أمثلة

1. الدالة $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ المعرفة بالقاعدة $f(x)=4x-5$ تحقق شرط ليبشتز
2. أثبت أن $f:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, $a>0$ حيث $f(x)=\frac{1}{x}$ تحقق شرط ليبشتز.

تمرين

1. أثبت أن $f:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$، $a>0$ حيث $f(x)=\sqrt{x}$ تحقق شرط ليبشتز.
2. أثبت أن $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$، $a>0$ حيث $f(x)=x^2$ تحقق شرط ليبشتز.

نتيجة

نتيجة

أي دالة تحقق شرط ليبشتز، فهي متصلة بانتظام.

نتيجة

نتيجة

أي دالة تحقق شرط ليبشتز، فهي متصلة بانتظام.

هل العكس صحيح؟

نظرية

نظرية

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام، وكانت $(x_n) \subset D$ من نوع كوشي، فإن $(f(x_n))$ من نوع كوشي.

نظرية

نظرية

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام، وكانت $(x_n) \subset D$ من نوع كوشي، فإن $(f(x_n))$ من نوع كوشي.

هل يكفي اتصال f؟

نظرية

نظرية

الدالة $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ متصلة بانتظام، إذا وفقط إذا أمكن تمديدها لتصبح متصلة على $[a,b]$.

نظرية

نظرية

الدالة $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام، إذا وفقط إذا أمكن تمديدها لتصبح متصلة على $[a, b]$.

الدالة $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ على $(0, 1)$

نظرية

نظرية

الدالة $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ متصلة بانتظام، إذا وفقط إذا أمكن تمديدها لتصبح متصلة على $[a, b]$.

الدالة $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ على $(0, 1)$

الدالة $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ على $(0, 1)$

نظرية

نظرية

إذا كانت $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ منتظمة الاتصال على D . فإنه يمكن تمديد الدالة f لتصبح متصلة بانتظام على $\overline{D} = D \cup \widehat{D}$.

نظرية

نظرية

1 إذا كانت $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, دالة متصلة وكانت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ موجودة، فإن f متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.

2 إذا كانت $f:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, دالة متصلة وكانت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ موجودة، فإن f متصلة بانتظام على $[a,\infty)$.

3 إذا كانت $f:(-\infty,a]\longrightarrow\mathbb{R}$, دالة متصلة وكانت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ موجودة، فإن f متصلة بانتظام على $(-\infty,a]$.

نظرية

نظرية

1. إذا كانت $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, دالة متصلة وكانت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ موجودة، فإن f متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.
2. إذا كانت $f:[a,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$, دالة متصلة وكانت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ موجودة، فإن f متصلة بانتظام على $[a,\infty)$.
3. إذا كانت $f:(-\infty,a]\longrightarrow\mathbb{R}$, دالة متصلة وكانت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ موجودة، فإن f متصلة بانتظام على $(-\infty,a]$.

هل العكس صحيح؟

تمرين

1. أثبت أن الدالة $f(x) = \tan^{-1} x$ متصلة بانتظام على $\mathbb{R}$.
2. أثبت أن الدالة $f(x) = e^x$ متصلة بانتظام على $(-\infty, b]$.