القيم والمتجهات المميزة والإستقطار

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

4 جانفي 2024

المحتويات

القيم والمتجهات المميزة

تعريف

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و $\lambda \in \mathbb{R}$. نقول أن λ هي قيمة مميزة للمصفوفة A إذا وجد $X \in \mathbb{R}^n$ و $X \neq 0$ بحيث

$$AX = \lambda X$$

و في هذه الحالة يسمى X متجه مميز بالنسبة للقيمة المميزة λ.

مبرهنة

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و $\lambda \in \mathbb{R}$. فإن λ قيمة مميزة للمصفوفة A إلا وإذا كان $|\lambda I - A| = 0$.

تعريف

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة فإن

$$q_A(\lambda) = |\lambda I - A|$$

يسمى كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A.

مثال

أوجد القيم المميزة للمصفوفات التالية

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix},\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

تعريف

نقول أن مصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ قابلة للإستقطار (diagonalizable) إذا وجدت مصفوفة $P \in M_n(\mathbb{R})$ لها معكوس بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

ملاحظة

إذا كانت $X_1, \ldots, X_n$ أعمدة المصفوفة P، فإن أعمدة المصفوفة AP هي: $AX_1, \ldots, AX_n$.

كذلك إذا كانت $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ فإن أعمدة المصفوفة PD هي: $\lambda_1 X_1, \ldots, \lambda_n X_n$.

و بالتالي إذا كانت المصفوفة A قابلة للإستقطار و $P^{-1}AP = D \iff PD = AP$ فإن أعمدة المصفوفة P تمثل أساسا من المتجهات المميزة للفضاء $\mathbb{R}^n$.

مبرهنة

تكون مصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ قابلة للإستقطار إلا وإذا وفقط إذا كان لها n متجه مميز مستقلة خطيا. وفي هذه الحالة هذه المتجهات تشكل أساسا للفضاء $\mathbb{R}^n$.

أمثلة

أثبت أن المصفوفات التالية قابلة للإستقطار و أوجد $P \in M_n(\mathbb{R})$ لها معكوس بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية ثم أوجد A^{15}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

تعريف

لتكن مصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$ و λ قيمة مميزة للمصفوفة A، نعرف

$$E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n;\ AX = \lambda X\}$$

ويسمى الفضاء المميز للقيمة المميزة λ.

ملاحظة

إذا كانت λ قيمة مميزة لمصفوفة $A \in M_n(\mathbb{R})$، فإن
$E_\lambda = \{X \in \mathbb{R}^n;\ AX = \lambda X\}$ فضاء جزئي من $\mathbb{R}^n$.

تعريف

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و كانت كثيرة الحدود المميزة

$$q_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m Q(\lambda)$$

بحيث $Q(\lambda_1) \neq 0$ فنقول أن القيمة المميزة λ_1 لها تعدد m و يسمى التعدد الجبري للقيمة المميزة λ_1.
بعد الفضاء المميز E_{λ_1} للقيمة المميزة λ_1 يسمى التعدد الهندسي للقيمة المميزة λ_1.

مبرهنة

إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و كانت كثيرة الحدود المميزة

$$q_A(\lambda) = C(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$$

فإن A قابلة للإستقطار إلا و إذا كان التعدد الهندسي يساوي التعدد الجبري لكل قيمة مميزة للمصفوفة.

ملاحظة

حالة خاصة
إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$ مصفوفة و لها n قيمة مميزة مختلفة فإن A قابلة للإستقطار.

تمرين

ابحث قابلية الإستقطار للمصفوفة التالية و أوجد المصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

الحل كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2.$$

إذاً المصفوفة ليست قابلة للإستقطار.

تمرين

ابحث قابلية الإستقطار للمصفوفة التالية و أوجد المصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -6 \\ 18 & 11 \end{pmatrix}$$

الحل كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -10-\lambda & -6 \\ 18 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(1+\lambda).$$

إذًا المصفوفة قابلة للإستقطار.

$E_{-1} = \langle(-2,3)\rangle$ و $E_2 = \langle(1,-2)\rangle$.

المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

و المصفوفة P هي $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

تمرين

ابحث قابلية الإستقطار للمصفوفة التالية و أوجد المصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

الحل كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 4 \\ 2 & 1-\lambda & 5 \\ -4 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

إذاً المصفوفة ليست قابلة للإستقطار.

تمرين

ابحث قابلية الإستقطار للمصفوفة التالية و أوجد المصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda).$$

$E_1 = \langle (0,1,0),(1,0,-1)\rangle$ و $E_2 = \langle (0,1,-1)\rangle$.

إذاً المصفوفة قابلة للإستقطار.

المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

و المصفوفة P هي $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

تمرين

ابحث قابلية الإستقطار للمصفوفة التالية و أوجد المصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

تكون المصفوفة قابلة للاستقطار إلا وإذا كان بعد الفضاء المميز E_2 يساوي 2.

$E_2 = \langle (1,1,-1,0),(-1,2,0,1)\rangle$.

إذاً المصفوفة A قابلة للاستقطار.

$E_5 = \langle (1,0,0,0)\rangle$ و $E_3 = \langle (3,2,0,0)\rangle$.

المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

و المصفوفة P هي $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

تمرين

ابحث قابلية الإستقطار للمصفوفة التالية و أوجد المصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل كثيرة الحدود الميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-5).$$

$E_1 = \langle (1,0,1),(-2,1,0) \rangle$، $E_5 = \langle (1,1,-1) \rangle$.

إذاً المصفوفة A قابلة للاستقطار.

المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ و المصفوفة P هي

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

تمرين

ابحث قابلية الإستقطار للمصفوفة التالية و أوجد المصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 16 \\ 2 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

الحل كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 16 \\ 2 & 5-\lambda & 8 \\ -2 & -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-3)^2(\lambda-1).$$

$E_3 = \langle (1,-1,0),(4,0,-1) \rangle$ ، $E_1 = \langle (2,1,-1) \rangle$.

إذاً المصفوفة A قابلة للاستقطار.

المصفوفة القطرية هي $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ و المصفوفة P هي

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

تمرين

ابحث قابلية الإستقطار للمصفوفة التالية A و أوجد المصفوفة P بحيث تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

الحل كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A هي

$$q_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1-\lambda & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^3.$$

تكون المصفوفة قابلة للاستقطار إلا وإذا كان بعد الفضاء المميز E_2 يساوي 3.
$E_2 = \langle(-1,1,0,2),(-1,0,1,0)\rangle$.

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1. أوجد كثيرة الحدود المميزة للمصفوفة A واستنتج القيم المميزة للمصفوفة A
2. أوجد مصفوفة لها معكوس مصفوفة P حتى تكون المصفوفة $P^{-1}AP$ قطرية
3. بدون احتساب المصفوفة A^3، اثبت أن $A^3 = A$

1. $q_A(\lambda) = (1-\lambda)^2(1+\lambda)$. إذاً 1 و -1 هي القيم المميزة للمصفوفة A.
2. إذا كان $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$، فإن $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. $A^3 = PD^3P^{-1} = PDP^{-1} = A$.