التحويلات الخطية

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

4 جانفي 2024

المحتويات

تعريف

ليكن كل من V و W فضاء متجهات و ليكن $T\colon V \longrightarrow W$ تطبيقا. نقول أن T تحويل خطي إذا كان لكل $u, v \in V$، $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$.
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$.

ملاحظات

إذا كان $T\colon V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا فإن

1. $T(0) = 0$.
2. $T(-u) = -T(u)$.
3. $T(u-v) = T(u) - T(v)$.

مثال

حدد من الدوال التالية من هي تحويل خطي:

$$
\begin{array}{ll}
T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, & T_1(x, y, z) = (x + y + z, x - z + y) \\
T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, & T_2(x, y, z) = (xy, z) \\
T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, & T_3(x, y, z) = (x + y - 3z, z + y - 1) \\
T_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, & T_4(x, y, z) = (x + y, z + y, x^2) \\
T_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, & T_5(x, y, z) = (x + y, z + y, 0) \\
T_6 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, & T_6(x, y, z) = (-x + 2z, y + 2z, 2x + 2y) \\
T_7 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, & T_7(x, y, z) = x + y - z.
\end{array}
$$

الحل

T_1 تحويل خطي.

T_2 ليس تحويل خطي

T_3 ليس تحويل خطي لأن $T(0) \neq 0$.

T_4 ليس تحويل خطي

T_5 تحويل خطي.

T_6 تحويل خطي.

T_7 تحويل خطي.

مثال

ليكن الفضاء $V = M_n(\mathbb{R})$.
نعرف الدالة $T\colon\ V \longrightarrow \mathbb{R}$ بما يلي: $T(A) = \det A$.
هل الدالة T خطية.
الدالة T ليست خطية لأن $\det(A+B) \neq \det A + \det B$.

مبرهنة

إذا كان $T\colon V \longrightarrow W$ تطبيقا فإن T تحويلا خطيا إذا و فقط

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v) \qquad \forall u, v \in V,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ملاحظات

1. إذا كان $T\colon V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا فإن
$$T(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 T(u_1) + \ldots + \alpha_n T(u_n).$$
2. إذا كان $T\colon V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا و $S = \{u_1, \ldots u_n\}$ أساسا للفضاء V.
إذاً التحويل الخطي يصبح معرفا إذا حدد $T(u_1), \ldots, T(u_n)$.
3. التحويلات الخطية الوحيدة $T\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ هي $T(x) = ax$، $a \in \mathbb{R}$.
4. التحويلات الخطية الوحيدة $T\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ هي $T(x, y) = ax + by$، $a, b \in \mathbb{R}$.

مبرهنة

إذا كانت $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ فإن التطبيق $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ المعرف بالقاعدة $T_A(X) = AX$ لكل $X \in \mathbb{R}^n$ هو تحويلا خطيا و يسمى التحويل الخطي المقابل للمصفوفة A.

مبرهنة

ليكن $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ تحويلا خطيا و ليكن $B = (e_1, \ldots, e_n)$ أساسا للفضاء $\mathbb{R}^n$ و $C = (u_1, \ldots, u_m)$ أساسا للفضاء $\mathbb{R}^m$. عندئذ $T = T_A$ حيث $A = [a_{i,j}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ أعمدتها $[T(e_1)]_C, \ldots, [T(e_n)]_C$.
تسمى المصفوفة A المصفوفة المعتادة للتحويل الخطي T بالنسبة للأساس B و الأساس C.

مبرهنة

ليكن V, W فضائي متجهات و $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ أساسا للفضاء V و $\{w_1, \ldots, w_n\}$ مجموعة من المتجهات في الفضاء W.
يوجد تحويلا خطيا وحيدا $T\colon\ V \longrightarrow W$ يحقق $T(v_j) = w_j$ لكل $1 \leq j \leq n$.

تعريف

ليكن $W \longrightarrow V :T$ تحويلا خطيا. نعرف نواة التحويل T والتي نرمز بها بالرمز $\ker(\mathrm{T})$ المجموعة التالية

$$\ker(\mathrm{T}) = \{v \in V;\ \ T(v) = 0\}.$$

كما نعرف صورة التحويل T والتي نرمز بها بالرمز $\mathrm{Im}(\mathrm{T})$ المجموعة التالية

$$\mathrm{Im}(\mathrm{T}) = \{\, T(v);\ \ v \in V\}.$$

مبرهنة

إذا كان $T\colon\ V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا فإن $\ker(\mathrm{T})$ هو فضاء جزئي من V و $\mathrm{Im}(\mathrm{T})$ هو فضاء جزئي من W.

تعريف

إذا كان $T\colon V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا فإن بعد الفضاء $\ker(\mathrm{T})$ يسمى صفرية التحويل الخطي T و نرمز بالرمز $(\mathrm{nullity}(T))$، كذلك بعد الفضاء $\mathrm{Im}(\mathrm{T})$ يسمى رتبة التحويل الخطي T و نرمز له بالرمز $(\mathrm{rank}(T))$

مثال

إذا كانت $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ و $T_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ المعرف بالقاعدة $T_A(X) = AX$
فإن $\operatorname{rank}(T) = \operatorname{rank} A$, و $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{col} A$.

مثال

ليكن $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ التحويل الخطي المعرف بما يلي:
$T(x,y,z) = (2x-y+3z, x-2y+z)$.

$$(x,y,z)\in \ker(T) \iff \begin{cases} 2x-y+3z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$$

المصفوفة الموسعة لهذا النظام الخطي هي: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$.

إذًا

$$(x,y,z)\in \ker(T) \iff x=5y, z=-3y.$$

$$\ker(T) = \langle (5,1,-3)\rangle.$$

$T(x,y,z) = x(2,1) + y(-1,-2) + z(3,1)$.

إذًا

$$\mathrm{Im}(T) = \langle (2,1),(-1,-2),(3,1)\rangle = \langle (2,1),(-1,-2)\rangle.$$

مبرهنة

إذا كان $T\colon V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا و $\{v_1, \dots v_n\}$ أساسا للفضاء V فإن المجموعة $\{T(v_1), \dots T(v_n)\}$ تولد الفضاء $\mathrm{Im}(T)$.

مبرهنة البعد للتحويلات

إذا كان $W \longrightarrow V :T$ تحويلا خطيا و كان $\dim V = n$ فإن

$$\text{nullity}(T) + (\text{rank}(T) = n.$$

أي

$$\dim\ker(T) + \dim\text{Im}(T) = n.$$

تعريف

إذا كان $T\colon V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا.

1. نقول أن T أحادي أو متباين إذا تحقق لكل $u, v \in V$ ما يلي

$$T(u) = T(v) \Rightarrow u = v.$$

2. نقول أن T شامل أو غامر إذا كان $\mathrm{Im}(T) = W$.

مبرهنة

إذا كان $T\colon V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا.
يكون التحويل T أحاديا إلا و إذا كان $\ker(T) = \{0\}$.

نتيجة

إذا كان $T\colon V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا و $\dim V = \dim W = n$ عندئذ يكون التحويل T أحاديا إذا و فقط إذا كان T تحويلا شاملا.

مثال

عين أساسا لصورة ونواة التحويل الخطي $T\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ المعرف بالقاعدة

$$T(x, y, z, t) = (x - y, 2z + 3t, y + 4z + 3t, x + 6z + 6t).$$

الحل

$(x, y, z, t) \in \mathrm{Ker}(T) \iff x = y = 3t = -2z$.
إذًا $(6, 6, -3, 2)$ هو أساس لنواة التحويل الخطي.
صورة التحويل الخطي T مولد بأعمدة المصفوفة التالية

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

والمصفوفة

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

هي صيغة درجية صفية للمصفوفة. و بالتالي

$$\{(1,0,0,1),(-1,0,1,0),(0,2,4,6)\}$$

يمثل أساسا لصورة التحويل الخطي.

مثال

ليكن V, W فضائين و $T\colon V \longrightarrow W$ تحويل خطي.
إذا كان التحويل أحادي و $S = \{u_1, \dots, u_n\}$ مجموعة مستقلة خطيا فإن المجموعة $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ مجموعة مستقلة خطيا.

الحل

$$\begin{aligned} a_1 T(u_1) + \ldots + a_n T(u_n) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad T(a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n = 0 \end{aligned}$$

لأن T أحادي. و بما أن المجموعة S مستقلة خطيا فإن $a_1 = \ldots = a_n = 0$.

مبرهنة

ليكن $T\colon\ V \longrightarrow W$ تحويلا خطيا و ليكن $B=(u_1,\ldots,u_n)$ أساسا للفضاء V و $C=(v_1,\ldots,v_m)$ أساسا للفضاء W. عندئذ توجد مصفوفة وحيدة $[T]_B^C$ والتي أعمدتها $[T(u_n)]_C,\ldots,[T(u_1)]_C$.
المصفوفة $[T]_B^C$ تسمى مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساس B و الأساس C. و تحقق

$$[T(v)]_C=[T]_B^C\,[v]_B\,; \qquad \forall v\in V.$$

إذا كان $V=W$ و $B=C$ نكتب المصفوفة $[T]_C$ عوضا عن $[T]_B^C$.

مثال

ليكن $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 :T$ التحويل الخطي المعرف بما يلي:
$T(x, y, z) = (2x - y + 3z, x - 2y + z)$.
مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^3$ هي: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

مثال

إعط مصفوفة التحويل الخطي في الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^3$ و أوجد $T_j(x, y, z)$ إذا كان

1. $T_1((1,0,0)) = (1,1,1)$، $T_1((0,1,0)) = (1,2,2)$، $T_1((0,0,1)) = (1,2,3)$
2. $T_2((1,0,0)) = (1,-1,1)$، $T_2((0,1,0)) = (-1,1,1)$، $T_2((0,0,1)) = (-1,-1,1)$
3. $T_3((1,0,0)) = (1,1,1)$، $T_3((0,1,0)) = (1,2,1)$، $T_3((0,0,1)) = (2,-2,1)$.

الحل

1. $T_1(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 2z, x + 2y + 3z)$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ، $T_2(x, y, z) = (x - y - z, -x + y - z, x + y + z)$.

3. $T_3(x, y, z) = (x + y + 2z, x + 2y - 2z, x + y + z)$ ، $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

مبرهنة

إذا كان $V \longrightarrow V$:T تحويلا خطيا و كان كل من B و C أساسا للفضاء V فإن

$$[T]_B = {}_BP_C\,[T]_C\,{}_CP_B.$$

مثال

ليكن $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ التحويل الخطي والذي مصفوفته بالنسبة للأساس المعتاد C للفضاء $\mathbb{R}^3$ هي

$$[T]_C = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -5 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

أوجد مصفوفة التحويل الخطي $[T]_B$ بالنسبة للأساس B التالي

$$B = \{u = (1,1,1),\ v = (1,1,0),\ w = (0,1,-1)\}.$$

الحل

مصفوفة التحويل من الأساس B إلى الأساس C هي

$$
{}_C P_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

إذًا مصفوفة التحويل من الأساس S إلى الأساس B هي

$$
{}_B P_C = {}_S P_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

و

$$
[T]_B = {}_B P_C [T]_C {}_C P_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
$$

مثال

ليكن التحويل الخطي $T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ المعرف بما يلي

$$T(x, y, z) = (3x + 2y, 3y + 2z, 9x - 4z).$$

1. اعط مصفوفة التحويل الخطي T.
2. اعط نواة و صورة التحويل الخطي T.
3. أوجد مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساس $S = \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$.

الحل

1. مصفوفة التحويل الخطي T هي $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
2. المصفوفة الموسعة للنظام الخطي $AX = 0$ هي : $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 9 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right]$. هذه المصفوفة متكافئة مع المصفوفة $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$.
   إذاً $\ker(T) = \{0\}$ و صورة التحويل الخطي T هي: $\mathbb{R}^3$.
3. لتكن المصفوفة $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

مثال

ليكن $u_1=\frac{1}{3}(1,2,2)$، $u_2=\frac{1}{3}(2,1,-2)$، $u_3=\frac{1}{3}(2,-2,1)$.

1. أثبت أن $\{u_1,u_2,u_3\}$ هو أساس عياري و متعامد للفضاء $\mathbb{R}^3$.
2. نعرف التحويل الخطي $T\colon \mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ بما يلي:
   $T(e_1)=u_1$، $T(e_2)=u_2$ و $T(e_3)=u_3$، مع $\{e_1,e_2,e_3\}$ الأساس المعتاد للفضاء $\mathbb{R}^3$.
   أوجد P مصفوفة التحويل T بالنسبة الأساس $\{e_1,e_2,e_3\}$ و أوجد $T(x,y,z)$.
3. نعرف التحويل الخطي $S\colon \mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ بما يلي:
   $S(x,y,z)=(-x+2z,y+2z,2x+2y)$.
   أثبت أن S هي تحويل خطي و أوجد مصفوفته A بالنسبة للأساس $\{e_1,e_2,e_3\}$.
4. أوجد مصفوفة S بالنسبة للأساس $\{u_1,u_2,u_3\}$ ثم أوجد A^n، لكل $n\in\mathbb{N}$.

الحل

1. بما أن المحدد

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -27$$

إذاً $\{u_1, u_2, u_3\}$ هو أساس. و بما أن $\|u_1\| = \|u_2\| = \|u_3\| = 1$ و $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_1, u_3\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = 0$.
إذاً
أثبت أن $\{u_1, u_2, u_3\}$ هو أساس عياري و متعامد للفضاء $\mathbb{R}^3$.

2.

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. نعرف التحويل الخطي $T \colon \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ المعرف بالمصفوفة A بالنسبة للأساس المعتاد (e_1, e_2, e_3) للفضاء $\mathbb{R}^3$.

1. أوجد $T(x, y, z)$.
2. أوجد أساسا متعامدا (u_1, u_2, u_3) للفضاء $\mathbb{R}^3$ بحيث $T(u_1) = 3u_1$ و $T(u_2) = 4u_2$.
3. أوجد مصفوفة التحويل الخطي T بالنسبة للأساس (u_1, u_2, u_3).
4. نعرف الآن التحويل الخطي $S \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ بما يلي: $S(e_1) = u_1$, $S(e_2) = u_2$ و $S(e_3) = u_3$.
   أوجد P مصفوفة التحويل الخطي S بالنسبة للأساس المعتاد.

1. أثبت أن المصفوفة P لها معكوس و أوجد P^{-1}.
2. ليكن التحويل الخطي U المعرف بالمصفوفة P^{-1} بالنسبة للأساس المعتاد.
   أوجد $U(u_k)$ لكل $k = 1, 2, 3$.
3. ليكن $F = U \circ T \circ S$.
   إحسب $F(e_1)$، $F(e_2)$، $F(e_3)$.
   أوجد مصفوفة التحويل الخطي F واستنتج A^n لكل $n \in \mathbb{N}$.

الحل

1

$$T(x,y,z) = (2x - 2y + 3z, -2x + 2y + 3z, 3x + 3y - 3z).$$

2 ليكن $u = (x,y,z)$.

$$T(u) = 3u \iff \begin{cases} -x - 2y + 3z = 0 \\ -2x - y + 3z \\ 3x + 3y - 6z = 0 \end{cases} \iff x = y = z.$$

نأخذ $u_1 = (1,1,1)$.

$$T(u) = 4u \iff \begin{cases} -2x - 2y + 3z = 0 \\ -2x - 2y + 3z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}.$$

1. المصفوفة P لها معكوس لأن (u_1, u_2, u_3) أساس.
$.P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
2. $.U(u_3) = (0,0,1)$,$U(u_2) = (0,1,0)$,$U(u_1) = (1,0,0)$
3. $.F = U \circ T \circ S$
,$F(e_1) = U \circ T(u_1) = 3\,U(u_1) = 3(1,0,0)$
,$F(e_2) = U \circ T(u_2) = 4\,U(u_2) = 4(0,1,0)$
$.F(e_3) = U \circ T(u_3) = -6\,U(u_3) = -6(0,0,1)$
مصفوفة التحويل الخطي F هي

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

ليكن التحويل الخطي $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ المعرف بالمصفوفة
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ بالنسبة للأساس المعتاد C للفضاء $\mathbb{R}^3$

1. اوجد أساسا للفضاء $\operatorname{Ker} T$ وأساسا للفضاء $\operatorname{Im}(T)$
2. أوجد صفرية التحويل الخطي T.
3. ليكن الأساس
$B = \{v_1 = (1, -1, 0), v_2 = (0, 1, -1), v_3 = (1, 1, 1)\}$ للفضاء $\mathbb{R}^3$
اوجد ${}_C P_B$، ${}_B P_C$ و $[T(v_3)]_C$
4. اوجد $[T]_B$، مصفوفة التحويل T بالنسبة للأساس B.

1. $\{(1,-2,1)\}$ يمثل أساسا للفضاء $\operatorname{Ker} T$ و $\{(1,2,3),(1,1,1)\}$ هو أساس للفضاء $\operatorname{Im}(T)$.
2. صفرية التحويل T هي 1.
3. $_CP_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ و $_BP_C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$، $[T(v_3)]_C = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.
4. $$[T]_B = {}_BP_C[T]_C {}_CP_B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$