فضاءات الضرب الداخلي

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

4 جانفي 2024

تعريف الضرب الداخلي

تعريف

ليكن V فضاء متجهات على $\mathbb{R}$.
نقول أن الدالة $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ هي ضرب داخلي على V إذا تحقق كل ما يلي
لكل $u, v, w \in V$، $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$
2. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$
3. $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$
4. $\langle u, u\rangle \geq 0$
5. $\langle u, u\rangle = 0 \iff u = 0$

أمثلة

1. الضرب الداخلي المعتاد على $\mathbb{R}^n$ معرف كما يلي:
إذا كان $u, v \in \mathbb{R}^n$، $u = (u_1, \ldots, u_n)$ و $v = (v_1, \ldots, v_n)$،

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j = u_1 v_1 + + \ldots + u_n v_n.$$

2. إذا كان $E = \mathcal{C}([0,1])$ فضاء الدوال المتصلة على $[0,1]$. لكل $f, g \in E$ ،
نعرف الضرب الداخلي على E كما يلي:

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t).$$

ملاحظة

إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاء ضرب داخلي وإذا كان $u, v, w, x \in E$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ فإن

$$\langle u + v, w + x\rangle = \langle u, w\rangle + \langle u, x\rangle + \langle v, w\rangle + \langle v, x\rangle.$$

المثال الأول

ليكن $u=(x,y)$ و $v=(a,b)$، نعرف

$$\langle u,v\rangle = 2ax+by-bx-ay$$

$\langle\ ,\ \rangle$ تمثل ضربا داخليا في $\mathbb{R}^2$.

يكفي أن نثبت أن $\langle u,u\rangle \geq 0$ و $u=0 \iff \langle u,u\rangle = 0$.

$$\langle u,u\rangle = 2x^2+y^2-2xy = (x-y)^2+x^2 \geq 0$$

و $u=0 \iff \langle u,u\rangle = 0$.

المثال الثاني

ليكن $u = (x, y, z)$ و $v = (a, b, c)$، نعرف

$$\langle u, v\rangle = 2ax + by + 3cz - bx - ay + cy + bz$$

$\langle\ ,\ \rangle$ تمثل ضربا داخليا في $\mathbb{R}^3$.

يكفي أن نثبت أن $\langle u, u\rangle \geq 0$ و $u = 0 \iff \langle u, u\rangle = 0$.

$$\begin{aligned}\langle u, u\rangle &= (y + z - x)^2 - (z - x)^2 + 2x^2 + 3z^2 \\ &= (y + z - x)^2 + (x + z)^2 + z^2 \geq 0\end{aligned}$$

المثال الثالث

ليكن $u = (x, y, z)$ و $v = (a, b, c)$، نعرف

$$\langle u, v\rangle = 2ax + by + cz - bx - ay + cy + bz$$

$\langle\ ,\ \rangle$ لا تمثل ضربا داخليا في $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\langle u, u\rangle &= (y+z-x)^2 - (z-x)^2 + 2x^2 + z^2\\ &= (y+z-x)^2 + x^2 + 2xz\\ &= (y+z-x)^2 + (x+z)^2 - z^2.\end{aligned}$$

المثال الرابع

إذا كانت مصفوفة $A = (a_{j,k}) \in M_n(\mathbb{R})$, نعرف

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,j}$$

و

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB^T)$$

لكل $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.
$\langle A, B \rangle \longmapsto (A, B)$ تمثل ضربا داخليا على الفضاء $M_n(\mathbb{R})$.

تمرين

إذا كان $u=(x_1,x_2,x_3)$, $v=(y_1,y_2,y_3)$, نعرف الدوال التالية
$f,g,h,k\colon \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$.

1. $f(u,v)=x_1y_1+x_2y_2+2x_3y_3+x_2y_1+2x_1y_2+x_2y_3+y_2x_3$.
2. $g(u,v)=x_1y_2+x_2y_1+x_2y_3+x_3y_2+3x_1y_3+3x_3y_1$.
3. $h(u,v)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_2y_1+x_1y_2+x_2y_3+y_2x_3+x_3y_1+x_1y_3$.
4. $k(u,v)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3-x_2y_3-x_3y_2+x_1y_3+y_1x_3$.

حدد من من الدوال f,g,h,k من تمثل ضربا داخليا في $\mathbb{R}^3$.

الحل

1 $f(u,v)-f(v,u)=x_1y_2-x_2y_1$. إذاً f لا تمثل ضربا داخليا في $\mathbb{R}^3$.

2 $g(u,u)=2x_1x_2+2x_2x_3+6x_1x_3=2(x_1+x_3)(x_2+3x_3)-6x_3^2=(x_1+x_2+4x_3)^2-(x_1-x_2-2x_3)^2-6x_3^2$. .
إذاً g لا تمثل ضربا داخليا في $\mathbb{R}^3$.

3

$$\begin{aligned} h(u,u) &= x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3 \\ &= (x_1+x_2+x_3)^2 \end{aligned}$$

إذاً h لا تمثل ضربا داخليا في $\mathbb{R}^3$ لأن

$$h(u,u)=0 \not\Rightarrow u=0.$$

4

$$\begin{aligned} k(u,u) &= x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_2x_3+2x_1x_3 \\ &= (x_1+x_3)^2+x_2^2-2x_2x_3 \\ &= (x_1+x_3)^2+(x_2-x_3)^2-x_3^2 \end{aligned}$$

إذاً k لا تمثل ضربا داخليا في $\mathbb{R}^3$ لأن

$$k(u,u)=0 \not\Rightarrow u=0.$$

مثال

أوجد قيم a, b حتى يكون

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + a x_1 y_2 + b x_2 y_1$$

ضربا داخليا في $\mathbb{R}^2$.

الحل

حتى يكون $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2)\rangle$ لا بد أن يكون $a = b$.

$$\begin{aligned} \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2)\rangle &= x_1^2 + x_2^2 + 2ax_1x_2 \\ &= (x_1 + ax_2)^2 + x_2^2(1 - a^2). \end{aligned}$$

إذاً $\langle\ ,\ \rangle$ تمثل ضربا داخليا في $\mathbb{R}^2$ إلا و إذا كان $|a| < 1$.

تعريف

ليكن $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاء ضرب داخلي.

1. إذا كان $u \in E$, نعرف طول أو معيار المتجه بما يلي:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

2. إذا كان $u, v \in E$, نعرف المسافة بين u و v بما يلي:

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

3. و نعرف الزاوية $0 \leq \theta \leq \pi$ بين متجهين $u, v \in E$ بما يلي:

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|.\|v\|}$$

ليكن الفضاء الضرب الداخلي $(M_2(\mathbb{R}), \langle\ ,\ \rangle)$ المعرف بما يلي

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T).$$

أوجد $\cos\theta$ إذا كانت θ هي الزاوية بين المصفوفتين
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
$AB^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $\|A\|^2 = 15$, $\|B\|^2 = 7$.
إذاً

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{35}}.$$

مبرهنة (متباينة كوشي شوارتز)

إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاء ضرب داخلي و $u, v \in E$

إذًا

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

ولا تكون المساواة إلا إذا كان المتجهين u, v مرتبطين خطيا.

البرهان

لتكن $Q(t)$ كثيرة الحدود التالية

$$Q(t) = \|u + tv\|^2 = \|u\|^2 + 2t\langle u, v\rangle + t^2\|v\|^2.$$

بما أن $Q(t) \geq 0$ لكل $t \in \mathbb{R}$, فإن مميز $Q(t)$ يكون سالبا، أي

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2.$$

و هذا هو المطلوب.
إذا كان $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|$، فهذا يعني أن المميز يساوي صفر.
إذاً يوجد $t \in \mathbb{R}$ بحيث $Q(t) = 0$.
إذاً المتجهين u, v مرتبطين خطيا.

مبرهنة

إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ و $u, v \in E$
إذاً

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

البرهان

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2.$$

تعريف

إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاء ضرب داخلي. نقول أن متجهين $u, v \in E$ متعامدين و نكتب $v \perp u$, إذا كان $\langle u, v \rangle = 0$.

مبرهنة (قاعدة بيتاغورس)

إذا كان $v \perp u$ فإن

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

البرهان

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

تعريف

إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاء ضرب داخلي. نقول أن مجموعة $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ من المتجهات الغير صفرية متعامدة إذا كان

$$\langle e_j, e_k \rangle = 0, \quad \forall 1 \leq j \neq k \leq n.$$

و نقول أنها عيارية إذا كان

$$\|e_j\| = 1, \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

و نقول أنها عيارية و متعامدة إذا كان

$$\langle e_j, e_k \rangle = \delta_{j,k}, \quad \forall 1 \leq j, k \leq n.$$

($\delta_{j,k} = 0$ إذا كان $j \neq k$ و $\delta_{j,j} = 1$).

مبرهنة

كل مجموعة متعامدة و لا تحتوي على المتجه الصفري هي مستقلة خطيا.

مبرهنة

إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاء ضرب داخلي و إذا كانت $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ أساسا عياريا و متعامدا و إذا كان $u \in E$ فإن

$$u = \langle u, e_1\rangle e_1 + \ldots + \langle u, e_n\rangle e_n.$$

مبرهنة

إذا كان $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ فضاء ضرب داخلي و $(v_1, \ldots, v_n)$ مجموعة مستقلة خطيا في E توجد مجموعة وحيدة عيارية و متعامدة $(e_1, \ldots, e_n)$ بحيث

1. لكل $k \in \{1, \ldots, n\}$,
$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_k),$$
2. لكل $k \in \{1, \ldots, n\}$,
$$\langle e_k, v_k \rangle > 0.$$

البرهان

نبحث في الأول على مجموعة متعامدة $(u_1, \ldots, u_n)$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_1 &= & v_1 \\ u_2 &= & v_2 - \dfrac{\langle u_1, v_2 \rangle}{\| u_1 \|^2} u_1 \\ & \vdots & \\ u_n &= & v_n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{\langle u_i, v_n \rangle}{\| u_i \|^2} u_i. \end{cases}$$

نتحصل على المجموعة $(e_1, \ldots, e_n)$ من المجموعة $(u_1, \ldots, u_n)$ كما يلي:

$$e_k = \frac{u_k}{\| u_k \|}, \quad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

مثال

ليكن الفضاء الجزئي F من $\mathbb{R}^4$ المولدبالمتجهات
$S = \{u = (1, 1, 0, 0),\ v = (1, 0, -1, 0),\ w = (0, 0, 1, 1)\}.$

1. أثبت أن S هو أساس للفضاء الجزئي F.
2. أوجد أساسا عياريا متعامدا للفضاء الجزئي F باستعمال خوارزمية جرام شميد. (حيث الضرب الداخلي هو الضرب الإقليدي).

الحل

1. لتكن $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ والتي أعمدتها u, v, w.
الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة A هي $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ وهذا يبين أن S هو أساس للفضاء الجزئي F.
2. $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)$، $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, -2, 0)$، $u_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(1, -1, 1, 3)$.
$\{u_1, u_2, u_3\}$ هو أساس عياري متعامد للفضاء الجزئي F

تمرين

1. أثبت أن $\langle (a,b),(x,y)\rangle = ax + ay + bx + 2by$ تمثل ضربا داخليا في $\mathbb{R}^2$.
2. إستعمل طريقة جرام شميت لتحويل الأساس
$\{u_1 = (1,-1), u_2 = (1,2)\}$ إلى أساس عياري و متعامد.

الحل

1.
- $\langle (a,b)+(c,d),(x,y)\rangle = (a+c)x+(a+c)y+(b+d)x+2(b+d)y = \langle (a,b),(x,y)\rangle + \langle (c,d),(x,y)\rangle$
- $\langle (a,b),(x,y)\rangle = ax+ay+bx+2by = \langle (x,y),(a,b)\rangle$
- $\langle \lambda(a,b),(x,y)\rangle = \lambda ax+\lambda ay+\lambda bx+2\lambda by = \lambda\langle (a,b),(x,y)\rangle$
- $\langle (a,b),(a,b)\rangle = a^2+2ab+2b^2 = (a+b)^2+b^2 \geq 0$
- $\langle (a,b),(a,b)\rangle = 0 \iff a+b=0=b \iff a=b=0$

2. المتجه u_1 عياري والمتجه الثاني هو $v_2 = (1,0)$
إذاً $\{v_1=(1,-1), v_2=(1,0)\}$ هو أساس عياري و متعامد.

مثال

لتكن $S = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ أساسا للفضاء $M_2(\mathbb{R})$ حيث أن

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

سنستعمل طريقة جرام شميت لتحويل الأساس S إلى أساس عياري و متعامد.

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\langle u_2, v_1 \rangle = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$u_2 - \langle u_2, v_1 \rangle v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\langle u_3, v_2\rangle = \frac{3}{\sqrt{15}}\ ,\langle u_3, v_1\rangle = \sqrt{3}$$

$$u_3 - \langle u_3, v_1\rangle v_1 - \langle u_3, v_2\rangle v_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}.$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}.$$

$$\langle u_4, v_3\rangle = \frac{4}{\sqrt{35}}\ ,\langle u_4, v_2\rangle = \frac{6}{\sqrt{15}}\ ,\langle u_4, v_1\rangle = 0$$

$$u_4 - \langle u_4, v_1\rangle v_1 - \langle u_4, v_2\rangle v_2 - \langle u_4, v_3\rangle v_3 = \frac{1}{35}\begin{pmatrix}-10 & -39\\ -29 & -29\end{pmatrix}.$$

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}.$$

تمرين

ليكن الفضاء الجزئي F من الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^4$ المولد بالمتجهات التالية
$u_1 = (1, 2, 0, 2), \; u_2 = (-1, 1, 1, 1).$

1. أوجد أساسا عياريا متعامدا للفضاء F باستعمال خوارزمية جرام شميدت.
2. أثبت أن المجموعة التالية
$F^{\perp} = \{u \in \mathbb{R}^4 : \langle u, v \rangle = 0, \; \forall v \in F\}$ تمثل فضاءا جزئيا من $\mathbb{R}^4$.
3. أوجد أساسا عياريا متعامدا للفضاء $F^{\perp}$.

الحل

1. $v_1=\frac{1}{3}u_1$, $\langle u_2,v_1\rangle=1$,
$$u_2-\langle u_2,v_1\rangle v_1=(0,3,1,-1)-\tfrac{1}{3}(-1,1,1,1)=\tfrac{1}{3}(-4,1,3,1).$$
إذاً $v_2=\frac{1}{3\sqrt{3}}(-4,1,3,1)$.
(v_1,v_2) تمثل أساسا عياريا متعامدا للفضاء F.

2. إذا كان $v_1,v_2\in F^{\perp}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ و $u\in F$ فإن
$$\langle \alpha v_1+\beta v_2,u\rangle=\alpha\langle v_1,u\rangle+\beta\langle v_2,u\rangle=0.$$
إذاً المجموعة التالية $F^{\perp}$ تمثل فضاءا جزئيا من $\mathbb{R}^4$.

3. ليكن $u=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$.
$$u\in F^{\perp}\iff\begin{cases}\langle u,u_1\rangle=0\\ \langle u,u_2\rangle=0\end{cases}\iff\begin{cases}x+2y+2t=0\\ -x+y+z+t=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+2t=0 \\ -x+y+z+t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{2}{3}z \\ y=-\frac{z}{3}-t \end{cases}$$

إذًا $u=-\frac{z}{3}(-2,1,-3,0)+t(0,-1,0,1) \iff u\in F^{\perp}$.

المتجهين $e_1=(-2,1,-3,0), e_2=(0,-1,0,1)$ يمثلان أساسا للفضاء $F^{\perp}$.

$w_1=\frac{1}{\sqrt{14}}e_1$, $\langle w_1,e_2\rangle=-\frac{1}{\sqrt{14}}$,

$e_2-\langle e_2,w_1\rangle w_1=\frac{1}{14}(2,13,3,14)$.

إذًا $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}(-2,1,-3,0), \frac{1}{3\sqrt{42}}(2,13,3,14)\right)$ تمثل أساسا عياريا متعامدا للفضاء $F^{\perp}$.

ليكن الضرب الداخلي على الفضاء $\mathbb{R}^3$ والمعرف بما يلي:

$$\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = 2xx' + 4yy' + zz' + 2xy' + 2yx'.$$

1. استعمل خوارزمية جرام شميدت على الأساس المعتاد $C = \{u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,1,0), u_3 = (0,0,1)\}$ لإيجاد اساس عياري ومتعامد $B = \{v_1, v_2, v_2\}$ للفضاء $\mathbb{R}^3$
2. ليكن $u = (1,2,3)$ متجه في الفضاء $\mathbb{R}^3$.
أوجد $[u]_B$ إحداثيات المتجه u بالنسبة للأساس B

1. الأساس $\{\frac{1}{\sqrt{2}}u_1, \frac{1}{\sqrt{2}}(u_2-u_1), u_3\}$ عياري ومتعامد للفضاء $\mathbb{R}^3$
2. إذا كان $u=(1,2,3)$ متجها في $\mathbb{R}^3$، فإن
$$[u]_B = \begin{pmatrix} \langle u, v_1\rangle \\ \langle u, v_2\rangle \\ \langle u, v_3\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} \\ 3 \end{pmatrix}.$$