أنظمة المعادلات الخطية

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

4 جانفي 2024

المحتويات

مدخل للأنظمة الخطية

لنبدأ بطرح المسألة التالية:
نريد معرفة عمر الأب و عمر الإبن إذا كانت لنا المعطيات التالية:
إذا أخذنا أربعة أضعاف عمر الإبن و طرحنا منها عمر الأب نجد 5، و إذا أخذنا ضعف عمر الأب و طرحنا منها سبع أضعاف عمر الإبن نجد 3.
الجواب إذا كان عمر الأبن هو x و عمر الأب هو y نجد المعدلتين التاليتين:

$$\begin{cases} 4x & - & y & = & 5 \\ -7x & + & 2y & = & 3 \end{cases}$$

هاتين المعادلتين تسمى نظام خطي، و x, y تسمى المجاهيل.
سنعطي طريقتين لحل هذا النظام:

الطريقة الأولى

المعادلة الأولى متكافئة مع المعادلة التالية: $8x - 2y = 10$ و بجمع هذه المعادلة مع المعادلة الثانية نجد أن $x = 13$ و بتعويض قيمة x في أي معادلة نجد أن $y = 47$.

الطريقة الثانية

النظام الخطي السابق متكافئ مع الكتابة التالية

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$، $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ فإن النظام الخطي متكافئ مع $AX = B \iff X = A^{-1}B$.

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ و $X = \begin{pmatrix} 13 \\ 47 \end{pmatrix}$.

طريقة جاوس و جاوس جوردن

تعريف

إذا كانت $(a_{j,k})$ أعدادا حقيقية $(1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n)$ و إذا كانت $x_1, \ldots, x_n$ مجاهيل و إذا كانت $b_1, \ldots, b_n$ أعدادا حقيقية. يمكن كتابة نظام معادلات خطية كما يلي

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & + & \vdots & + & \vdots & & \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m. \end{cases}$$

و يمكن كتابة هذا النظام الخطي في صيغة مصفوفات كما يلي: $AX = B$ مع

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

مثال

لتكن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ و المصفوفة $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$ و نبحث عن مصفوفة من درجة $(2,3)$ بحيث $AB=C$.

إذا كانت $B=\begin{pmatrix}x & y & z\\ t & u & v\end{pmatrix}$ نتحصل على النظام الخطي التالي:

$$\begin{cases} x-t &= 0\\ x-2t &= 1\\ y-u &= 1\\ y-2u &= 2\\ z-v &= 2\\ z-2v &= 3\end{cases}$$

إذًا

$$x=t=-1, y=0, u=-1, z=1, v=-1.$$

تعريف

1. نقول أن نظامين من المعادلات الخطية متكافئان إذا كان لها نفس مجموعة الحلول.
2. نقول أن نظام خطي متسقا أو متآلفا إذا كان له حل و نقول أنه غير متسق إذا لم يكن له حل.

طريقة جاوس

سنقوم بتوسيع المصفوفة A و ذلك باضافة المصفوفة B و نحصل على مصفوفة $[A|B]$ وتسمى المصفوفة الموسعة
لحل النظام الخطي سنقوم بوضع المصفوفة الموسعة $[A|B]$ على صيغة درجية صفية و نحصل على نظام خطي مثلثي مكافئ للنظام الخطي الأول و هذه الطريقة تسمى طريقة جاوس لحل النظام الخطي.

طريقة جاوس جوردن

لحل النظام الخطي سنقوم بوضع المصفوفة الموسعة $[A|B]$ على الصيغة الدرجية الصفية المختزلة و نحصل على نظام خطي مكافئ للنظام الخطي الأول و هذه الطريقة تسمى طريقة جاوس جوردن لحل النظام الخطي.

الأنظمة الخطية المتجانسة

تعريف

نقول أن نظام خطي $AX = B$ متجانس إذا كان $B = 0$.

ملاحظات

1. كل نظام خطي متجانس متسق لأن الحل التافه هو حل لهذا النظام.
2. إذا كان X_1 و X_2 حلان للنظام الخطي المتجانس $AX = 0$ فإن $X_1 + \lambda X_2$ هو حل للنظام الخطي لكل $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. إذا كان للنظام الخطي المتجانس $AX = 0$ حل غير صفري فإن النظام له عدد ما لا نهائي من الحلول.

مبرهنة

إذا كان للنظام الخطي $AX = B$ حل X_0 إذا كل حل X للنظام الخطي سيكون على الصيغة $X = X_0 + X_1$ حيث X_1 حل للنظام المتجانس $AX = 0$.

قاعدة كرامر

مبرهنة

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n ولها معكوس إذا الحل الوحيد للنظام الخطي $AX = B$ هو

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

حيث A_j هي المصفوفة A_j هي المصفوفة التي نتحصل عليها من المصفوفة A بوضع العمود B عوضا عن العمود C_j

مثال

استخدم قاعدة كرامر لحساب x, y, z التي تحقق النظام التالي

$$\begin{cases} 3x - 2z = 2 \\ -2x + 3y - 2z = 3 \\ -5x + 4y - z = 1 \end{cases}$$

تمارين

1. أوجد حلول الأنظمة الخطية التالية

$$\begin{cases} x+2y-z &= -4 \\ -x+y &= -2 \\ y-z &= -4 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} x+2y-z+t &= 1 \\ 3x-y+5z-t &= 2 \\ 5x+3y+3z+t &= \alpha \end{cases} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

3.
$$\begin{cases} -2y+3z &= 0 \\ 2x-4y+2z &= 1 \\ -x-2y+5z &= 0 \\ x-2y &= 1 \end{cases},$$

4
$$\begin{cases} -2y+3z &= 0 \\ 2x-4y+2z &= 0 \\ -x-2y+5z &= 0 \\ x-2y-z &= 1 \end{cases}$$

5
$$\begin{cases} x+y-z+t &= 0 \\ z-2t &= 0 \end{cases}$$

6
$$\begin{cases} 6x+3y-z &= 2 \\ -4x+y-6z &= 0 \\ x+2y-5z &= -1 \end{cases},$$

$$\begin{cases} y+3z-2t & = & 0 \\ 2x+y-4z+3t & = & 0 \\ 2x+3y+2z-t & = & 1 \end{cases} ,$$ 7

$$\begin{cases} x+my+(m-1)z & = & m+1 \\ 3x+2y+mz & = & 3 \\ (m-1)x+my+(m+1)z & = & m-1 \end{cases}$$ 8

$$\begin{cases} x+2y+z & = & 1 \\ 2x+(a+3)y+3z & = & 3 \\ x+(-a+3)y+(a-2)z & = & 0 \end{cases}$$ 9

$$\begin{cases} x+y+2z &= 8 \\ -x-2y+z &= 1 \\ 3x-7y+4z &= 10 \end{cases}$$ 10

$$\begin{cases} x-y+2z-w &= -1 \\ 2x+y-2z-2w &= -2 \\ -x+2y-4z+w &= 1 \\ 3x-3w &= -3 \end{cases}$$ 11

$$\begin{cases} 2x+2y+2z &= 0 \\ -2x+5y+2z &= 0 \\ -7x+7y+z &= 0 \end{cases}$$ 12

$$\begin{cases} 2x - 3y &= -2 \\ 2x + y &= 1 \\ 3x + 2y &= 1 \end{cases}$$ 13

$$\begin{cases} 3x + 2y - z &= -15 \\ 5x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x + y + 3z &= 11 \\ 11x + 7y &= -30 \end{cases}$$ 14

$$\begin{cases} 4x - 8y &= 12 \\ 3x - 6y &= 9 \\ -2x + 4y &= -6 \end{cases}$$ 15

$$\begin{cases} x + y + 2z + t = 11 \\ x + 2y + z + t = 9 \\ x + y + z + 2t = 6 \\ 2x + y + z + t = 14 \end{cases}$$ 16

1. أوجد علاقة بين a, b, و c حتى يكون النظام التالي متسق.

$$\begin{cases} x+y+2z &= a \\ x+z &= b \\ 2x+y+3z &= c \end{cases}$$

2. أثبت أنه إذا كان $ad-bc\neq 0$, فإن الصيغة الدرجية الصفية للمصفوفة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ هي $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. عين كل من $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ التي من أجلها يكون $(1, -1, 2)$ حلا للنظام الخطي

$$\begin{cases} ax + by - 3z = -3 \\ -2x - by + z = -1 \\ ax + 3y - cz = -1 \end{cases}.$$

2. أثبت أن $(\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{2})$ هو حل وحيد للنظام الخطي في الفقرة (1).

لتكن المصفوفتان $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

أثبت أن النظام الخطي $AX = B$ متسق إلا وإذا كان $b - a = c - b$.

أوجد القيود التي يجب وضعها على a, b حتى يكون النظام الخطي متسقا

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 5t = -2 \\ 2x - y + z - 3t = a \\ 4x - 7y - 3z + t = b \end{cases}$$

أوجد قيم الثابت α التي تجعل النظام المتجانس

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x + \alpha y + z = 0 \end{cases}$$

له حلول غير الحل الصفري.
إستخدم طريقة جاوس جوردن لإيجاد حلول النظام عندما تكون $\alpha = 1$.

أوجد جميع قيم الثابت a التي تجعل النظام الخطي

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ x + y + (a^2-5)z = a \end{cases}$$

1. له حل وحيد
2. عدد ما لا نهائي من الحلول
3. ليس له حل.

إستخدم طريقة جاوس جوردن لإيجاد حلول النظام التالي حسب قيمة m

$$\begin{cases} x+y-z & = & 1 \\ 3x+2y-2z & = & 3 \\ x+2my-(m+1)z & = & 2m-1 \end{cases}$$