المحددات

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

4 جانفي 2024

المحتويات

تعريف المحدد

تعريف

إذا كانت $A=(a_{j,k})$ مصفوفة مربعة من الدرجة n نرمز $A_{j,k}$ المصفوفة مربعة من الدرجة $n-1$ نحصل عليها من المصفوفة A بحذف الصف j والعمود k.

مثال:

إذا كانت $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 2 & -4\\ 2 & -3 & 4\end{pmatrix}$ فإن $A_{2,3}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$.

تعريف

1. إذا كانت مصفوفة $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ نعرف محدد المصفوفة A بما يلي

$$|A| = det(A) = ad - bc.$$

2. إذا كانت مصفوفة $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ نعرف محدد المصفوفة A بما يلي

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$$

تعريف

3 إذا كانت مصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{n,1} & a_{m,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

نعرف محدد المصفوفة A بما يلي

$$\begin{aligned} |A| = \det(A) &= a_{1,1}\det A_{1,1} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1,n} \det A_{1,n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det A_{1,j}. \end{aligned}$$

مثال

1. إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, محدد المصفوفة A هو

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4.3 - 5.2 = 2.$$

2. إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$، محدد المصفوفة A هو

$$|A| = det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

مثال

3 إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, محدد المصفوفة A هو

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

تعريف

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n, يسمى المحدد $\det A_{j,k}$ مصغر العنصر $a_{j,k}$
ويسمى العدد $C_{j,k} = (-1)^{j+k} \det A_{j,k}$ المعامل المصاحب للعنصر $a_{j,k}$

ملاحظة

1. إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n، محدد المصفوفة A يساوي

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} C_{1,j}.$$

2. بإعادة ترتيب الحدود نخلص إلى

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} C_{1,j} = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} C_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} C_{k,j}.\end{aligned}$$

مبرهنة Sarrus

إذا كانت $n = 3$ و المصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \det A &= a_{1,1}(a_{2,2} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,2}) \\ &\quad - a_{1,2}(a_{2,1} \cdot a_{3,3} - a_{2,3} \cdot a_{3,1}) \\ &\quad + a_{1,3}(a_{2,1} \cdot a_{3,2} - a_{2,2} \cdot a_{3,1} \end{aligned}$$

مثال

إذا كانت $A=\begin{pmatrix}3 & -4 & 0\\ 0 & 7 & 6\\ 2 & -6 & 1\end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}\det A &= \left|\begin{array}{ccc|cc}3 & -4 & 0 & 3 & -4\\ 0 & 7 & 6 & 0 & 7\\ 2 & -6 & 1 & 2 & -6\end{array}\right.\\ &= 3\cdot 7\cdot 1+(-4)\cdot 6\cdot 2-(-6)\cdot 6\cdot 3=81.\end{aligned}$$

خواص المحددات

مبرهنة

1. إذا كانت مصفوفة A مربعة فإن $\det A^T = \det A$.
2. إذا كانت مصفوفة A مربعة وتحتوي على صف أو عمود صفري فإن محددها يساوي صفر.
3. إذا كانت مصفوفة A مثلثية علوية أو سفلية فإن محددها يساوي

$$a_{1,1} \dots a_{n,n}.$$

4. إذا كانت مصفوفة A مربعة وتحتوي على صف مضاعف لصف آخر أو عمود مضاعف لعمود آخر فإن محددها يساوي صفر.

مبرهنة

5. إذا حصلنا على مصفوفة B من مصفوفة A بضرب صف بعدد c فإن $\det B = c\det A$، (يعني $|cR_jA| = c|A|$)
6. إذا حصلنا على مصفوفة B من مصفوفة A بتبديل صفين (أو عمودين) فإن $\det B = -\det A$، (يعني $|R_{j,k}A| = -|A|$)
7. إذا حصلنا على مصفوفة B من مصفوفة A بضرب صف بعدد وإضافة الناتج لصف آخر فإن $\det B = \det A$، (يعني $|cR_{j,k}A| = |A|$)

مثال

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}
&\underset{(-1)R_{1,4}}{\overset{(-2)R_{1,2},(-3)R_{1,3}}{=}}
\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & -6 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{(-2)R_{1,2}}{=} -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= -2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2.
\end{aligned}
$$

مثال

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} \underset{-1R_{1,4},-1R_{1,5}}{\overset{2R_{1,2},-3R_{1,3}}{=}} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & -13 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 9 & -3 & -2 \\ 3 & -13 & 6 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{3R_{1,2},1R_{1,3}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 9 & -3 & -2 \\ 0 & 14 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 14 & -3 & -4 \\ 6 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 14 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -4 & -5 & -2 \end{vmatrix} \\
&\overset{(-1)R_{1,2},2R_{1,3}}{=} \begin{vmatrix} 14 & 6 & 1 \\ -17 & -6 & 0 \\ 24 & 7 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -17 & -6 \\ 24 & 7 \end{vmatrix} | \\
&\overset{1R_{1,2}}{=} \begin{vmatrix} -17 & -6 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 42 - 17 = 25.
\end{aligned}
$$

مثال

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & -2\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -3\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}-2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix} = -3.\end{aligned}$$

مثال

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 0 & b-a & (b-a)(b+a)\\ 0 & c-a & (c-a)(c+a)\end{vmatrix}\\ &= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & b+a\\ 1 & c+a\end{vmatrix}\\ &= (b-a)(c-a)(c-b).\end{aligned}$$

مبرهنة

لتكن مصفوفة A مربعة فإن A لها معكوس إذا و فقط $\det A \neq 0$.

مبرهنة

لتكن A و B مصفوفتين مربعتين فإن

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

ملاحظات

1. إذا كانت مصفوفة A مربعة من الدرجة n فإن $|cA| = c^n|A|$.
2. لتكن مصفوفة A مربعة و إذا كانت B هي صيغة درجية صفية للمصفوفة A. فإنه يوجد عدد منته من المصفوفات الأولية $E_1, \ldots, E_m$ بحيث $B = E_1 \ldots E_m A$. إذا

$$\det(E_1) \ldots \det(E_m) \det(A) = \det(B).$$

المصفوفة المصاحبة

تعريف

لتكن مصفوفة A مربعة نعرف المصفوفة $B = (C_{j,k})^T$ و تسمى المصفوفة المصاحبة للمصفوفة A و نرمز بها $\mathrm{adj}(A)$.

مبرهنة

إذا كانت مصفوفة A مربعة من الدرجة n فإن

$$(\mathrm{adj}(A))A = A(\mathrm{adj}(A)) = (\det A)I_n.$$

مبرهنة

إذا كانت مصفوفة A مربعة و لها معكوس فإن

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{adj}(A).$$

مثال

1. $n=2$, $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $\det A=5$, $\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$ و
$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$.

2. $n=3$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $\det A=-13$
$$\operatorname{adj}(A)=\begin{pmatrix}-4 & -5 & -2\\ -2 & 4 & -1\\ 3 & -6 & -5\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 3\\ -5 & 4 & -6\\ -2 & -1 & -5\end{pmatrix}$$
و $A^{-1}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-4 & -2 & 3\\ -5 & 4 & -6\\ -2 & -1 & -5\end{pmatrix}$.

مثال

3. $n=4$, $A=\begin{pmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{pmatrix}$, $\det A=24$

$$\operatorname{adj}(A)=2\begin{pmatrix}5&-1&-1&-1\\-1&5&-1&-1\\-1&-1&5&-1\\-1&-1&-1&5\end{pmatrix},$$

و

$$A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}5&-1&-1&-1\\-1&5&-1&-1\\-1&-1&5&-1\\-1&-1&-1&5\end{pmatrix}$$

تمرين

لتكن المصفوفة المربعة $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. أوجد المصفوفة $\mathrm{adj}(A)$ و محدد المصفوفة A.
2. أوجد معكوس المصفوفة A إن وجدت.

تمرين

لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ و المصفوفة $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
أوجد قيمة العدد a بحيث $A^2 - AB + aI_3 = 0$ واستنتج معكوس المصفوفة A.

تمرين

1. إذا كانت $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$ و لها معكوس فأثبت أن $\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = (\det A)^{n-2} A.$
2. أثبت أن المصفوفة A لها معكوس إذا و إذا فقط إذا المصفوفة $\operatorname{adj}(A)$ لها معكوس

الحل

1. من العلاقة $A\mathrm{adj}(A)=|A|I_n$ نستنتج أن $|\mathrm{adj}(A)|=|A|^{n-1}$ و $(\mathrm{adj}(A))^{-1}=\frac{1}{|A|}A$ إذا كان $|A|\neq 0$.
إذا كانت المصفوفة A لها معكوس فإن $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$.
لتكن $B=\mathrm{adj}(A)$، إذاً $B\mathrm{adj}(B)=|B|I_n=|A|^{n-1}I_n$ و بالتالي $\mathrm{adj}(B)=|A|^{n-1}B^{-1}=|A|^{n-2}A$.
و لها معكوس فأثبت أن $\mathrm{adj}(\mathrm{adj}(A)=(\det A)^{n-2}A.$
2. من العلاقة $A\mathrm{adj}(A)=|A|I_n$ نستنتج أنه إذا كانت المصفوفة A لها معكوس فإن المصفوفة $\mathrm{adj}(A)$ لها معكوس.
كذلك من نفس العلاقة إذا كانت المصفوفة $\mathrm{adj}(A)$ لها معكوس و المصفوفة A ليس لها معكوس فإن $A\mathrm{adj}(A)=0$ و $A\mathrm{adj}(A)(\mathrm{adj}(A))^{-1}=0$.
إذاً $A=0$ و هذا تناقض لأنه إذا كانت $A=0$ فإن $\mathrm{adj}(A)=0$.