المصفوفات

د. المنجي بلال

جامعة الملك سعود

4 جانفي 2024

المحتويات

تعريف

المصفوفة هي عبارة عن جدول من الأعداد الحقيقية، ويسمى كل سطر من عناصر المصفوفة صفا (row) ويسمى كل عمود من عناصر المصفوفة عمودا (column).
إذا كانت $(a_{j,k})$ هي عناصر المصفوفة A فإننا نكتب

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \vdots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

ونقول أن المصفوفة A هي من الدرجة (m, n) حيث m هو عدد الصفوف و n هو عدد الأعمدة.

ملاحظات

1. في بعض الأحيان نرمز الصيغة المختزلة $A = (a_{j,k})$ لكتابة المصفوفة.
2. المصفوفة الصفية هي المصفوفة المكونة من صف واحد أي من الدرجة $(1, n)$ و في بعض الأحيان تسمى المصفوفة "متجه صفي".
3. المصفوفة العمودية هي المصفوفة المكونة من عمود واحد (أي من الدرجة $(n, 1)$) و في بعض الأحيان تسمى المصفوفة "متجه عمودي".
4. المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي جميع عناصرها أصفار ويرمز لها بالرمز (0).

ملاحظات

5. مصفوفة الوحدة هي المصفوفة المربعة التي عناصرها القطرية تساوي واحد وبقية العناصر كلها أصفار ويرمز لها بالرمز I_n إذا كانت من الدرجة (n, n).
6. نقول أن مصفوفة مربعة أنها مثلثية علوية إذا كان كل عناصرها التي تقع أسفل القطر أصفارا. و نقول أن مصفوفة مربعة أنها مثلثية سفلوية إذا كان كل عناصرها التي تقع أعلى القطر أصفارا.
7. المصفوفة القطرية هي المصفوفة الممثلثية العلوية و المثلثية السفلوية، مثال

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

تعريف

1. الجمع:
لتكن $A = (a_{j,k})$ و $B = (b_{j,k})$ مصفوفتين من الدرجة (m, n).
نعرف المصفوفة
$$A + B = (a_{j,k} + b_{j,k})$$
و تسمى مصفوفة الجمع بين المصفوفة A و المصفوفة B.

2. الضرب بعدد حقيقي:
لتكن $A = (a_{j,k})$ مصفوفتين من الدرجة (m, n) و λ عدد حقيقي.
نعرف المصفوفة
$$\lambda A = (\lambda a_{j,k})$$
و تسمى مصفوفة ضرب المصفوفة A بالعدد الحقيقي λ.

تعريف

إذا كانت $A = (a_1, \ldots, a_n)$ متجها صفيا و $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ متجها عموديا. فنعرف الضرب الداخلي الإقليدي للمتجهين A و B على النحو التالي

$$AB = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

تعريف

إذا كانت $A = (a_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (m, n) و $B = (b_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (n, p) فإن $AB = (c_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (m, p) حيث $c_{j,k}$ هو نتيجة الضرب الإقليدي للصف j من المصفوفة A مع العمود k من المصفوفة B.

$$c_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} a_{j,i} b_{i,k}.$$

تعريف

لتكن $A = (a_{j,k})$ مصفوفة من الدرجة (m, n). يعرف منقول المصفوفة A المصفوفة من الدرجة (n, m) والتي نحصل عليها من A بحيث تكون صفوفها هي أعمدة A على التوالي. و نرمز بها A^T.

تعريف

نقول أن مصفوفة مربعة متماثلة إذا كان

$$A = A^T.$$

مبرهنة

إذا كانت $A = (a_{j,k})$ و $B = (b_{j,k})$ مصفوفتين من الدرجة (m, n) فإن

1. $(A^T)^T = A$.
2. $(kA)^T = kA^T$.
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

تعريف

العمليات الأولية على الصفوف هي

1. تغيير ترتيب صفين من المصفوفة
2. ضرب صف بعدد غير صفري
3. ضرب صف بعدد و إضافة الناتج إلى صف آخر.

تعريف

نقول أن مصفوفتين متكافئتين صفيا إذا حصلنا على إحداها من الأخرى بعد إجراء عدد منته من العمليات الأولية على الصفوف. و نكتب $B \sim A$.
نستخدم الرموز التالية

1. $R_{j,k}$ وتعني تبادل الصفين j و k.
2. rR_j و تعني ضرب الصف j بالعدد r.
3. $rR_{j,k}$ و تعني ضرب الصف j بالعدد r و إضافة الناتج للصف k.

تعريف

نقول أن مصفوفة A هي على صيغة درجية صفية (row echelon form) إذا تحققت الشروط التالية

1. كل صف غير صفري يكون أول عنصر غير صفري هو 1 و يسمى العنصر المتقدم.
2. الصفوف الصفرية إن وجدت تكون في آخر المصفوفة.
3. إذا وجد صفان غير صفريان فإن العنصر المتقدم في الصف الأعلى يكون على يسار العنصر المتقدم في الصف الأسفل.

تعريف

نقول أن مصفوفة A هي على صيغة درجية صفية مختزلة (reduced row echelon form) إذا تحققت الشروط التالية

1. A على صيغة درجية صفية
2. جميع عناصر الأعمدة التي تحوي على عنصر متقد أصفارا باستثناء العنصر المتقدم.

مثال

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1R_{1,2}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_{1,2},-4R_{1,3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 9 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 9 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{-9R_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3R_{3,1},1.R_{3,2}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_{2,1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

مثال

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)R_{1,2}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-2)R_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 8 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2R_{1,3},3R_{1,4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 7 & -6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{2,3},1R_{2,4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & 8 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{7R_{2,3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 7 & 38 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{3,4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 7 & 38 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-4R_{3,4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3, \frac{1}{7}R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{26}{7} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2R_{2,1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{26}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_{3,1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{26}{7} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3R_{4,1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{29}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{26}{7} \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)R_{4,2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{29}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{16}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{26}{7} \end{pmatrix}$$

يمكن تجنب الكسور كما يلي:

$$\xrightarrow{-4R_{3,4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{7R_1, 7R_2} \begin{pmatrix} 7 & 14 & -14 & -7 & 14 \\ 0 & 7 & 0 & 7 & 42 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1R_{4,1}, -1R_{4,2}} \begin{pmatrix} 7 & 14 & -14 & 0 & 40 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 26 \end{pmatrix} \xrightarrow{7R_{3,1}, -2R_{2,1}} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 26 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}R_1, \frac{1}{7}R_2, \frac{1}{2}R_3, \frac{1}{7}R_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{29}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{16}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{26}{7} \end{pmatrix}$$

معكوس المصفوفة

تعريف

نقول أن مصفوفة A من الدرجة n لها معكوس إذا وجدت مصفوفة B من الدرجة n بحيث $AB = BA = I_n$.

ونرمز A^{-1} معكوس المصفوفة A.

مبرهنة

1. معكوس المصفوفة إذا وجد فهو وحيد.
2. معكوس المصفوفة I_n هي I_n.
3. إذا كان للمصفوفة A معكوس فإن A هي معكوس المصفوفة A^{-1}. $(A^{-1})^{-1} = A$.
4. إذا كان للمصفوفة A و B معكوس فإن $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
5. إذا كان للمصفوفات $A_1, \dots, A_k$ معكوس فإن المصفوفة $A_1 \dots\dots A_k$ لها معكوس و
$$(A_1 \dots\dots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \dots\dots A_1 1^{-1}.$$
6. إذا كان للمصفوفة A معكوس و $r \neq 0$ فإن rA لها معكوس و $(rA)^{-1} = \frac{1}{r}A^{-1}$.
7. إذا كان للمصفوفة A معكوس فإن A^T لها معكوس و $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

تعريف

نقول أن مصفوفة E من الدرجة n هي مصفوفة أولية إذا حصلنا عليها من مصفوفة الوحدة I_n بإجراء عملية واحدة من العمليات الصفية.

ملاحظات

1. لتكن المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ و لتكن المصفوفة الأولية $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ والتي نتحصل عليها بإجراء تبديل الصفين الثاني والثالث من مصفوفة الوحدة I_3. نلاحظ أن $EA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = R_{2,3}A$.

2 كذلك إذا كانت المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ و لتكن المصفوفة الأولية $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ والتي نتحصل عليها بإجراء $5R_{1,3}$ على مصفوفة الوحدة I_3.

نلاحظ أن $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 6 & 4 & 14 & 15 \end{pmatrix} = EA = 5R_{1,3}A$.

و بصورة عامة لدينا

مبرهنة

إذا كانت مصفوفة A من الدرجة (m, n) و كانت E المصفوفة الأولية التي نحصل عليها من I_m باحدى العمليات الصفية الأولية فإن المصفوفة EA هي المصفوفة التي نتحصل عليها من A بإجراء العملية الصفية الأوليية نفسها.

مبرهنة

إذا كانت E مصفوفة أولية فإن E لها معكوس ومعكوسها مصفوفة أولية.

مبرهنة

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n فإن العبارات التالية متكافئة

1. المصفوفة A لها معكوس.
2. الصيغة الدرجية الصفية المختزلة للمصفوفة A هي I_n.
3. يمكن كتابة A كحاصل ضرب عدد منته من المصفوفات الأولية.

(خوارزمية)

إذا كانت A مصفوفة مربعة من الدرجة n

1. استخدم العمليات الأولية الصفية لتحويل المصفوفة $[A|I]$ إلى صيغة درجية صفية مختزلة $[B|C]$
2. إذا كانت $B = I_n$ فإن $C = A^{-1}$.
3. إذا كانت $B \neq I_n$ فإنه لا يوجد معكوس للمصفوفة A.

مثال

معكوس المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_{1,2},R_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2R_{1,2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-1)R_{2,3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{2R_2,2R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-1)R_{3,1},2R_{3,2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

معكوس المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-1)R_{1,4}]{(-2)R_{1,2},(-3)R_{1,3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-1)R_4]{(-1)R_2,(-1)R_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 12 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-2)R_{2,3}]{(-1)R_{4,2}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{(-2)R_{2,4}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-2)R_{3,4}]{(1)R_{3,2},-1R_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_{3,4}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[(-1)R_{4,1}]{(-3)R_{2,1},(-2)R_{3,1}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right].$$