المحتويات

تمهيدية آبل

تعريف

لتكن $(a_n)_n$ متتالية من الأعداد الحقيقية. المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ تسمى متسلسلة قوى و مركزها x_0.

فيما يلي نبحث عن مجال التقارب للمتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$.
المتسلسلة تتقارب على الأقل عند النقطة $x = x_0$. في ما يلي، نعتبر متسلسلات القوى التي مركزها 0.

مبرهنة

(مبرهنة آبل)
إذا كانت متسلسلة القوى $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x_0^n$ متقاربة حيث $x_0 \neq 0$، فإنّ

1. المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ تتقارب مطلقا على الفترة $]-|x_0|, |x_0|[$،
2. لكل $r < |x_0|$، المتسلسلة $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ تتقارب بانتظام على الفترة $[-r, r]$.

نتيجة

إذا كانت متسلسلة القوى $\sum_{n\geq 0} a_n x_0^n$ متباعدة، فالمتسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ متباعدة لكل $|x| > |x_0|$.

قرص التقارب لمتسلسلة القوى

مبرهنة

لكل متسلسلة القوى $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$، يوجد عدد وحيد $R \in [0, +\infty]$ يحقق ما يلي:

1. المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ متقاربة مطلقا على الفترة $]-R, R[$ (إذا كان $R > 0$)
2. المتتالية $(a_n x^n)_n$ ليست محدودة و بالتالي المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ متباعدة لكل $x \in \mathbb{R}$، بحيث $|x| > R$. (إذا كان $R \neq +\infty$)

العدد R يسمى نصف قطر التقارب أو شعاع التقارب لمتسلسلة القوى و الفترة $]-R, R[= \{x \in \mathbb{R};\ |x| < R\}$ يسمى مجال التقارب لمتسلسلة القوى.

مبرهنة

لتكن $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ متسلسلة قوى حيث شعاع تقاربها $R > 0$. إذاً

1. الدالة $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ قابلة للاشتقاق على الفترة $]-R, R[$ و
$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.
2. R هو كذلك شعاع تقارب متسلسلة القوى $\sum_{n\geq 0} n a_n x^{n-1}$.

للبرهان نعطي هذه التمهيدية:

تمهيدية

ليكن $x \in \mathbb{R}$ و $h \in \mathbb{R}$ بحيث $0 < |h| \leq r$. إذاً لكل $n \in \mathbb{N}$

$$|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \leq \frac{|h|^2}{r^2}(|x|+r)^n \tag{1}$$

و

$$n|x|^{n-1} \leq \frac{1}{r}\big(2(|x|+r)^n + |x|^n\big). \tag{2}$$

البرهان

$$\begin{aligned}
\left|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} C_n^k h^k x^{n-k} - x^n - nhx^{n-1}\right| \\
&= \left|\sum_{k=2}^{n} C_n^k h^k x^{n-k}\right| \\
&\leq |h|^2 \sum_{k=2}^{n} C_n^k |x|^{n-k} |h|^{k-2} \\
&\leq \frac{|h|^2}{r^2} \sum_{k=2}^{n} C_n^k |x|^{n-k} r^k \\
&\leq \frac{|h|^2}{r^2} (|x| + r)^n.
\end{aligned}$$

بما أنّ $|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \geq nr|x|^{n-1} - |x|^n - (|x|+r)^n$،
فباستعمال المعادلة (1) نستنتج أن

$$nr|x|^{n-1} \leq |x|^n + (|x|+r)^n + |(x+r)^n - x^n - nrx^{n-1}| \leq |x|^n + 2(|x|+r)^n.$$

برهان

ليكن R' شعاع التقارب لمتسلسلة القوى $\sum_{n\geq 0} na_n x^{n-1}$. من البديهي أنّ $R \leq R'$.
ليكن $r > 0$ بحيث $|x| + r < R$. باستعمال التمهيدية 7 نستنتج:

$$|na_n x^{n-1}| \leq \frac{1}{r}\left(2|a_n|(|x|+r)^n + |a_n||x|^n\right)$$

و بالتالي المتسلسلة $\sum_{n\geq 0} na_n x^{n-1}$ تتقارب مطلقا على الفترة $]-R, R[$. إذًا $R = R'$.

لتكن $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ لكل $x \in]-R, R[$. باستعمال المتباينة (1) نستنتج أنّ

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x)\right| \leq \frac{|h|}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|(|x| + r)^n$$

و هذا يبرهن أنّ $f'(x) = g(x)$، لكل $x \in]-R, R[$.

نتيجة

إذا كانت $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ فإن الدالة f قابلة للمفاضلة لا نهائيا على $]-R,R[$، و $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ و $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$. (هذه المتسلسلة تسمى متسلسلة تايلور للدالة f عند النقطة 0.

نتيجة

إذا كانت $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x)$ فإن الدالة f قابلة للمفاضلة لا نهائيا على $]-R, R[$،
$a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ و $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. (هذه المتسلسلة تسمى متسلسلة تايلور للدالة f عند 0. (Taylor's series of f at 0

أمثلة لمتسلسلات القوى

1. $\forall x \in \mathbb{R}$

   1. $$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$
   2. $$\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
   3. $$\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
   4. $$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
   5. $$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

2 لكل $|x| < 1$،

1. $\displaystyle \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ ، $\displaystyle \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
2. $$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$
3. $$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)}$$
4. $$\tanh^{-1} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$
5. $$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$
6. $$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$$

3 لتكن $f(x)=(1+x)^\alpha$ بحيث α عدد حقيقي، $\alpha \notin \mathbb{N}$. لكل $x \in]-1,1[$؛ $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$. f تحقق المعادلة التفاضلية التالية:

$$(1+x)y'-\alpha y=0, \quad y(0)=1$$

نبحث عن دالة معرفة بمتسلسلة القوى $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ تكون حلا لهذه المعادلة التفاضلية.

$$a_n=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{2.3\dots(n+1)}a_0.$$

و بما أن حل المعادلة التفاضلية وحيد نستنتج أنّ لكل $x \in]-1,1[$،

$$(1-x)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{2.3\dots(n+1)}x^n$$

1. $$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{C_{2n}^{n}}{4^n}x^n \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n C_{2n}^{n}}{4^n}x^n$$
2. $$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n C_{2n}^{n}}{4^n(n+1)}x^{n+1}$$
3. $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{C_{2n}^{n}}{4^n}x^{2n} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n C_{2n}^{n}}{4^n}x^{2n}$$
4. $$\sin^{-1}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{C_{2n}^{n}}{4^n(2n+1)}x^{2n+1}$$
5. $$\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{C_{2n}^{n}}{4^n(2n+1)}x^{2n+1}$$
6. $$\sinh^{-1}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n C_{2n}^{n}}{4^n(2n+1)}x^{2n+1}$$