

ملاحظات 1. ممنوع استخدام الآلة الحاسبة 2. رتب اجابتك حسب ترتيب ورود الاسئلة واكتب بخط واضح.

السؤال الأول (4 درجات): احسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي:

(درجتان) $y = \tanh(2x^3) + \operatorname{sech}^{-1}(3x)$ (1)

(درجتان) $y = \cosh^{-1}(\sqrt{x}) + \sinh^3\left(\frac{1}{x}\right)$ (2)

السؤال الثاني (21 درجة): احسب التكاملات التالية

(درجتان) $\int \frac{\coth(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ (1)

(درجتان) $\int (2x + 1) \cos x dx$ (2)

(درجتان) $\int \tan^2 x \sec^4 x dx$ (3)

(3 درجات) $\int \frac{1}{x \sqrt{x^6 + 25}} dx$ (4)

(درجتان) $\int x \ln|x| dx$ (5)

(درجتان) $\int \frac{1}{\sqrt{4 + \sqrt{x}}} dx$ (6)

(درجتان) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 6x + 13}} dx$ (7)

(3 درجات) $\int \frac{3x^2 + 3x + 8}{x^3 + 4x} dx$ (8)

(3 درجات) $\int \frac{1}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ (9)

111 رياض - حساب التكامل
الفصل الدراسي الثاني 1445 هـ
حل الاختبار الفصلي الثاني
د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

السؤال الأول (4 درجات): أحسب $\frac{dy}{dx}$ فيما يلي :

$$[2] . y = \tanh(2x^3) + \operatorname{sech}^{-1}(3x) \quad (1)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sech}^2(2x^3) (6x^2) + \frac{-1}{3x \sqrt{1 - (3x)^2}} \quad (3)$$

$$= 6x^2 \operatorname{sech}^2(2x^3) - \frac{1}{x \sqrt{1 - 9x^2}}$$

$$[2] . y = \cosh^{-1}(\sqrt{x}) + \sinh^3\left(\frac{1}{x}\right) \quad (2)$$

الحل :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x})^2 - 1}} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 3 \left(\sinh\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 \cosh\left(\frac{1}{x}\right) \left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x} \sqrt{x-1}} - \left(\frac{3}{x^2}\right) \sinh^2\left(\frac{1}{x}\right) \cosh\left(\frac{1}{x}\right)$$

السؤال الثاني (21 درجة): أحسب التكاملات التالية

$$[2] . \int \frac{\coth(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \quad (1)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{\coth(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx &= \int \coth(\sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= 2 \int \coth(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2 \ln |\sinh(\sqrt{x})| + c \end{aligned}$$

باستخدام القانون

$$\int \coth(f(x)) f'(x) dx = \ln |\sinh(f(x))| + c$$

$$[2] . \int (2x + 1) \cos x \, dx \quad (2)$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned} u &= 2x + 1 & dv &= \cos x \, dx \\ du &= 2 \, dx & v &= \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (2x + 1) \cos x \, dx &= (2x + 1) \sin x - \int 2 \sin x \, dx \\ &= (2x + 1) \sin x - 2 \int \sin x \, dx = (2x + 1) \sin x - 2(-\cos x) + c \\ &= (2x + 1) \sin x + 2 \cos x + c \end{aligned}$$

$$[2] . \int \tan^2 x \sec^4 x \, dx \quad (3)$$

الحل :

باستخدام التعويض $u = \tan x$

$$\text{عندئذ } du = \sec^2 x \, dx$$

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x \sec^4 x \, dx &= \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx \\ &= \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x \, dx = \int u^2 (1 + u^2) \, du \\ &= \int (u^2 + u^4) \, du = \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + c = \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + c \end{aligned}$$

$$[3] . \int \frac{1}{x \sqrt{x^6 + 25}} \, dx \quad (4)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \sqrt{x^6 + 25}} \, dx &= \int \frac{1}{x \sqrt{(x^3)^2 + (5)^2}} \, dx = \int \frac{x^2}{x^2 x \sqrt{(x^3)^2 + (5)^2}} \, dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3 \sqrt{(x^3)^2 + (5)^2}} \, dx = \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{5} \operatorname{csch}^{-1} \left(\frac{x^3}{5} \right) \right] + c = -\frac{1}{15} \operatorname{csch}^{-1} \left(\frac{x^3}{5} \right) + c \end{aligned}$$

باستخدام القانون

$$\text{حيث } a > 0 \int \frac{f'(x)}{f(x) \sqrt{[f(x)]^2 + a^2}} \, dx = -\frac{1}{a} \operatorname{csch}^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

$$[2] \cdot \int x \ln |x| dx \quad (5)$$

: الحل

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned} u &= \ln |x| & dv &= x dx \\ du &= \frac{1}{x} dx & v &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \ln |x| dx &= \frac{x^2}{2} \ln |x| - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln |x| - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln |x| - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{2} \ln |x| - \frac{x^2}{4} + c \end{aligned}$$

$$[2] \cdot \int \frac{1}{\sqrt{4 + \sqrt{x}}} dx \quad (6)$$

: الحل

$$u = \sqrt{4 + \sqrt{x}} \implies u^2 = 4 + \sqrt{x} \text{ ضع}$$

$$\implies u^2 - 4 = \sqrt{x} \implies (u^2 - 4)^2 = x$$

$$2(u^2 - 4) 2u du = dx \implies 4u(u^2 - 4) du = dx \text{ عندئذ}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4 + \sqrt{x}}} dx = \int \frac{4u(u^2 - 4)}{u} du = 4 \int (u^2 - 4) du$$

$$= 4 \left[\frac{u^3}{3} - 4u \right] + c = 4 \left[\frac{(\sqrt{4 + \sqrt{x}})^3}{3} - 4(\sqrt{4 + \sqrt{x}}) \right] + c$$

$$[2] \cdot \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 6x + 13}} dx \quad (7)$$

الحل : باستخدام الإكمال إلى مربع كامل

$$x^2 + 6x + 13 = (x^2 + 6x + 9) + 4 = (x + 3)^2 + (2)^2$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 6x + 13}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x + 3)^2 + (2)^2}} dx = \sinh^{-1} \left(\frac{x + 3}{2} \right) + c$$

باستخدام القانون

$$. a > 0 \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 + a^2}} dx = \sinh^{-1} \left(\frac{f(x)}{a} \right) + c$$

$$[3] \cdot \int \frac{3x^2 + 3x + 8}{x^3 + 4x} dx \quad (8)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{3x^2 + 3x + 8}{x^3 + 4x} = \frac{3x^2 + 3x + 8}{x(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

$$\frac{3x^2 + 3x + 8}{x^3 + 4x} = \frac{A(x^2 + 4)}{x(x^2 + 4)} + \frac{(Bx + C)x}{x(x^2 + 4)}$$

$$3x^2 + 3x + 8 = A(x^2 + 4) + x(Bx + C)$$

$$3x^2 + 3x + 8 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx = (A + B)x^2 + Cx + 4A$$

بمقارنة معاملات كثيرتي الحدود في الطرفين نحصل على :

$$A + B = 3 \quad \rightarrow (1)$$

$$C = 3 \quad \rightarrow (2)$$

$$4A = 8 \quad \rightarrow (3)$$

من المعادلة (3) نحصل على : $4A = 8 \Rightarrow A = 2$

من المعادلة (1) نحصل على : $2 + B = 3 \Rightarrow B = 1$

$$\int \frac{3x^2 + 3x + 8}{x^3 + 4x} dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{x + 3}{x^2 + 4} \right) dx$$

$$= \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{x}{x^2 + 4} dx + \int \frac{3}{x^2 + 4} dx$$

$$= 2 \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx + 3 \int \frac{1}{x^2 + 2^2} dx$$

$$= 2 \ln |x| + \frac{1}{2} \ln (x^2 + 4) + 3 \left[\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{x}{2} \right) \right] + c$$

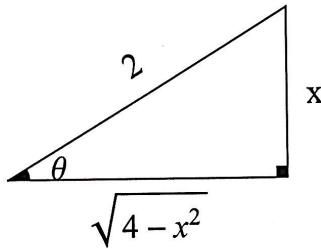
$$[3] \cdot \int \frac{1}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \quad (9)$$

الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

$$x = 2 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{x}{2} \text{ ضع}$$

$$dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
(4-x^2)^{\frac{3}{2}} &= (4-4\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} = [4(1-\sin^2\theta)]^{\frac{3}{2}} \\
&= (4\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} = (4)^{\frac{3}{2}} (\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} (\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} = 2^3 \cos^3\theta \\
\int \frac{1}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \frac{2\cos\theta}{2^3 \cos^3\theta} d\theta = \frac{1}{2^2} \int \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{4} \int \sec^2\theta d\theta = \frac{1}{4} \tan\theta + c
\end{aligned}$$



من المثلث : نلاحظ أن $\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$$\int \frac{1}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + c$$