

111 رياض - حساب التكامل
 الفصل الدراسي الثاني 1445 هـ
 حل الاختبار النهائي
 د. طارق عبدالرحمن محمد الفاضل

الجزء الأول (7 درجات):

[3] . جد قيمة c التي تحقق نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ على الفترة $[-2, 0]$.

$$(b-a)f(c) = \int_a^b f(x) dx \text{ باستخدام العلاقة}$$

$$[a, b] = [-2, 0] \text{ و } f(x) = \sqrt[3]{x+1} \text{ حيث}$$

$$(0 - (-2)) \sqrt[3]{c+1} = \int_{-2}^0 \sqrt[3]{x+1} dx = \int_{-2}^0 (x+1)^{\frac{1}{3}} dx$$

$$2\sqrt[3]{c+1} = \left[\frac{3}{4} (x+1)^{\frac{4}{3}} \right]_{-2}^0 = \frac{3}{4} (0+1)^{\frac{4}{3}} - \frac{3}{4} (-2+1)^{\frac{4}{3}}$$

$$2\sqrt[3]{c+1} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0 \implies 2\sqrt[3]{c+1} = 0$$

$$\sqrt[3]{c+1} = 0 \implies c+1 = 0 \implies c = -1$$

لاحظ أن $c = -1 \in (-2, 0)$.

قيمة c المطلوبة هي -1 .

[2] . $F(x) = \int_{\sqrt{3x}}^{e^{x^2}} \tan(t^2 + 1) dt$ إذا كانت $F'(x)$ جد (2)

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{\sqrt{3x}}^{e^{x^2}} \tan(t^2 + 1) dt \text{ : الحل}$$

$$F'(x) = \tan\left(\left(e^{x^2}\right)^2 + 1\right) e^{x^2} (2x) - \tan\left(\left(\sqrt{3x}\right)^2 + 1\right) \frac{1}{2\sqrt{3x}} \quad (3)$$

$$= 2x e^{x^2} \tan\left(e^{2x^2} + 1\right) - \frac{3}{2\sqrt{3x}} \tan(3x + 1)$$

[2] . $f(x) = \cosh^{-1}(3^{2x-1}) + \log\left|\operatorname{csch}\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ إذا كانت $f'(x)$ جد (3)

: الحل

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(3^{2x-1})^2 - 1}} (3^{2x-1} (2) \ln 3) + \frac{-\operatorname{csch}\left(\frac{x}{2}\right) \coth\left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)}{\operatorname{csch}\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{\ln 10}$$

$$= \frac{2 \cdot 3^{2x-1} \ln 3}{\sqrt{3^{4x-2} - 1}} - \frac{\coth\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \ln 10}$$

الجزء الثاني (16 درجة): أحسب التكاملات التالية :

$$[3] . \int \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 8x + 20}} dx \quad (1)$$

الحل : باستخدام الإكمال إلى مربع كامل

$$\begin{aligned} 4x^2 + 8x + 20 &= 4(x^2 + 2x + 5) = 4[(x^2 + 2x + 1) + 4] = 4[(x+1)^2 + (2)^2] \\ \int \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 8x + 20}} dx &= \int \frac{2}{\sqrt{4[(x+1)^2 + (2)^2]}} dx = \int \frac{2}{2\sqrt{(x+1)^2 + (2)^2}} dx \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + (2)^2}} dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + c \end{aligned}$$

$$a > 0 \text{ حيث } \int \frac{f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 + a^2}} dx = \sinh^{-1}\left(\frac{f(x)}{a}\right) + c \text{ باستخدام القانون}$$

$$[3] . \int \tan^{-1} x dx \quad (2)$$

الحل : باستخدام طريقة التكامل بالتجزئ

$$\begin{aligned} u &= \tan^{-1} x & dv &= dx \\ du &= \frac{1}{1+x^2} dx & v &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \tan^{-1} x dx &= x \tan^{-1} x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + c \end{aligned}$$

$$[3] . \int \frac{4}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx \quad (3)$$

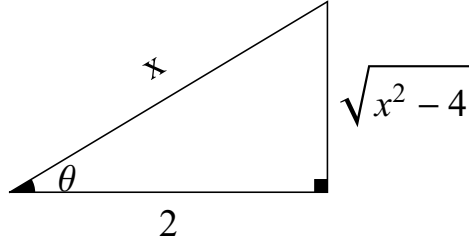
الحل : باستخدام التعويضات المثلثية

$$x = 2 \sec \theta \implies \sec \theta = \frac{x}{2} \implies \cos \theta = \frac{2}{x} \text{ ضع}$$

$$dx = 2 \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{4 \sec^2 \theta - 4} = \sqrt{4(\sec^2 \theta - 1)} = \sqrt{4 \tan^2 \theta} = 2 \tan \theta$$

$$\begin{aligned} \int \frac{4}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx &= \int \frac{4 (2 \sec \theta \tan \theta)}{(2 \sec \theta)^2 2 \tan \theta} d\theta = \int \frac{8 \sec \theta \tan \theta}{8 \sec^2 \theta \tan \theta} d\theta \\ &= \int \frac{1}{\sec \theta} d\theta = \int \cos \theta d\theta = \sin \theta + c \end{aligned}$$



من المثلث نجد أن: $\sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}$

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}} dx = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} + c$$

$$[3] \cdot \int \frac{3x + 1}{x^2 + 2x - 8} dx \quad (4)$$

الحل : باستخدام طريقة الكسور الجزئية

$$\frac{3x + 1}{x^2 + 2x - 8} = \frac{3x + 1}{(x - 2)(x + 4)} = \frac{A_1}{x - 2} + \frac{A_2}{x + 4}$$

$$\frac{3x + 1}{(x - 2)(x + 4)} = \frac{A_1 (x + 4)}{(x - 2)(x + 4)} + \frac{A_2 (x - 2)}{(x + 4)(x - 2)}$$

$$3x + 1 = A_1 (x + 4) + A_2 (x - 2)$$

بوضع $x = 2$ نجد أن: $3(2) + 1 = A_1 (2 + 4) \implies 7 = 6A_1 \implies A_1 = \frac{7}{6}$

بوضع $x = -4$ نجد أن: $3(-4) + 1 = A_2 (-4 - 2) \implies -11 = -6A_2 \implies A_2 = \frac{11}{6}$

$$\int \frac{3x + 1}{x^2 + 2x - 8} dx = \int \left(\frac{\frac{7}{6}}{x - 2} + \frac{\frac{11}{6}}{x + 4} \right) dx$$

$$= \frac{7}{6} \int \frac{1}{x - 2} dx + \frac{11}{6} \int \frac{1}{x + 4} dx$$

$$= \frac{7}{6} \ln |x - 2| + \frac{11}{6} \ln |x + 4| + c$$

$$[2] . \int \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x + x^{\frac{1}{3}}} dx : \text{الحل}$$

باستخدام التعويض $u = x^{\frac{1}{3}}$ ، أي أن $x = u^3$

$$dx = 3u^2 du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + x^{\frac{1}{3}}} &= \int \frac{3u^2}{u^3 + (u^3)^{\frac{1}{3}}} du = \int \frac{3u^2}{u^3 + u} du = \int \frac{3u^2}{u(u^2 + 1)} du \\ &= 3 \int \frac{u}{u^2 + 1} du = \frac{3}{2} \int \frac{2u}{u^2 + 1} du = \frac{3}{2} \ln(u^2 + 1) + c = \frac{3}{2} \ln\left(x^{\frac{2}{3}} + 1\right) + c \end{aligned}$$

$$[2] . \int \sin^5 x \cos^6 x dx \quad (6)$$

: الحل

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \cos^6 x dx &= \int \sin^4 x \cos^6 x \sin x dx \\ &= \int (\sin^2 x)^2 \cos^6 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^6 x \sin x dx \end{aligned}$$

باستخدام التعويض $u = \cos x$

$$du = -\sin x \implies (-1) du = \sin x dx$$

$$\begin{aligned} \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^6 x \sin x dx &= \int (1 - u^2)^2 u^6 (-1) du \\ &= - \int (1 - 2u^2 + u^4) u^6 du = - \int (u^6 - 2u^8 + u^{10}) du \\ &= - \left[\frac{u^7}{7} - 2 \frac{u^9}{9} + \frac{u^{11}}{11} \right] + c = - \frac{\cos^7 x}{7} + 2 \frac{\cos^9 x}{9} - \frac{\cos^{11} x}{11} + c \end{aligned}$$

الجزء الثالث (17 درجة):

$$(1) \text{ بين فيما إذا كان التكامل المعتل } \int_0^{\infty} x e^{1-x^2} dx \text{ متقارباً أم متباعداً. } [2]$$

: الحل

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{1-x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x e^{1-x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{2} \int_0^t e^{1-x^2} (-2x) dx \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{2} [e^{1-x^2}]_0^t \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{2} [e^{1-t^2} - e^{1-0^2}] \right) = \frac{-1}{2} [0 - e] = \frac{e}{2} \end{aligned}$$

التكامل المعتل متقارب .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{1-t^2} = 0 \text{ تذكر أن}$$

(2) أرسم المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x + 2$ و $y = 4 - x^2$ ،
وجد مساحتها . [3]

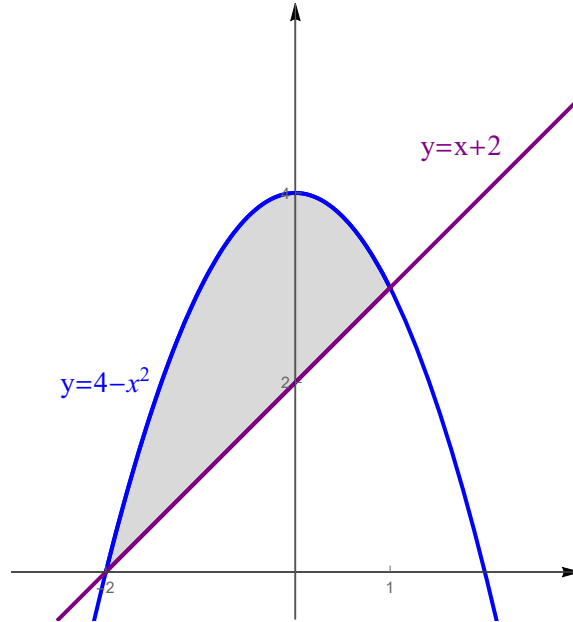
الحل :

المنحنى $y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأسفل .

المنحنى $y = x + 2$ يمثل خط مستقيم يمر بالنقطة $(0, 2)$ ، وميله يساوي 1 .

إيجاد نقاط تقاطع المنحنيين $y = x + 2$ و $y = 4 - x^2$:

$$x + 2 = 4 - x^2 \implies x^2 + x - 2 = 0 \implies (x + 2)(x - 1) = 0 \implies x = -2, x = 1$$



$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 [(4 - x^2) - (x + 2)] dx = \int_{-2}^1 (4 - x^2 - x - 2) dx \\ &= \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 \\ &= \left(-\frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 2(1) \right) - \left(-\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + 2(-2) \right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4\right) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 6 = -3 + 8 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

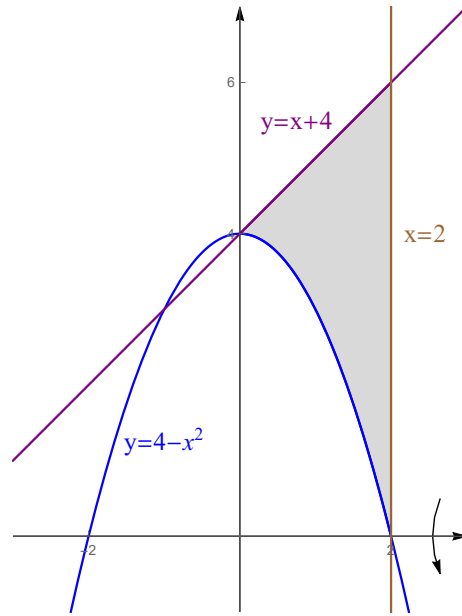
(3) ارسم المنطقة المحصورة بين المنحنيات $y = 4 - x^2$ و $y = x + 4$ و $x = 2$ ، ثم جد حجم الجسم الناتج من دوران هذه المنطقة حول محور x . [3]

الحل :

$y = 4 - x^2$ يمثل قطع مكافئ رأسه $(0, 4)$ وفتحته للأسفل .

$y = x + 4$ يمثل خط مستقيم يمر بالنقطة $(0, 4)$ ، وميله يساوي 1 .

$x = 2$ يمثل خط مستقيم يوازي محور y ويمر بالنقطة $(2, 0)$.



لاحظ أن الخط المستقيم $x = 2$ يقطع القطع المكافئ $y = 4 - x^2$ في النقطة $(2, 0)$.

باستخدام طريقة الوردات :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 [(x+4)^2 - (4-x^2)^2] dx = \pi \int_0^2 [(x^2 + 8x + 16) - (16 - 8x^2 + x^4)] dx \\ &= \pi \int_0^2 (x^2 + 8x + 16 - 16 + 8x^2 - x^4) dx = \pi \int_0^2 (-x^4 + 9x^2 + 8x) dx \\ &= \pi \left[-\frac{x^5}{5} + 3x^3 + 4x^2 \right]_0^2 = \pi \left[\left(-\frac{2^5}{5} + 3(2)^3 + 4(2)^2 \right) - \left(-\frac{0^5}{5} + 3(0)^3 + 4(0)^2 \right) \right] \\ &= \pi \left(-\frac{32}{5} + 24 + 16 \right) = \pi \left(-\frac{32}{5} + 40 \right) = \pi \left(\frac{-32 + 200}{5} \right) = \frac{168\pi}{5} \end{aligned}$$

(4) جد طول المنحنى $y = \sqrt{1-x^2}$ من $x = -1$ إلى $x = 1$. [3]

الحل :

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{aligned} L &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{(1-x^2) + x^2}{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = [\sin^{-1} x]_{-1}^1 \\ &= \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

(5) حول المعادلة القطبية $r = 8 \sin \theta + 6 \cos \theta$ إلى معادلة كارتيزية. [2]

الحل :

$$\begin{aligned} r &= 8 \sin \theta + 6 \cos \theta \implies r^2 = 8(r \sin \theta) + 6(r \cos \theta) \implies x^2 + y^2 = 8y + 6x \\ \implies x^2 - 6x + y^2 - 8y &= 0 \implies (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = 9 + 16 \\ \implies (x - 3)^2 + (y - 4)^2 &= 5^2 \end{aligned}$$

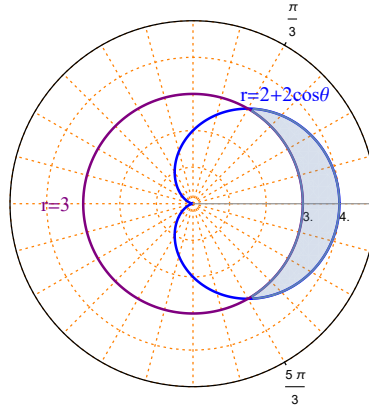
تمثل دائرة مركزها النقطة $(3, 4)$ ونصف قطرها 5.

(6) ارسم المنطقة الواقعة داخل المنحنى $r = 2 + 2 \cos \theta$ وخارج المنحنى $r = 3$ وجد مساحتها. [3]

الحل :

المنحنى $r = 2 + 2 \cos \theta$ يمثل منحنى قلبي رأسه إلى اليمين ومتناظر حول المحور القطبي .

المنحنى $r = 3$ يمثل دائرة مركزها القطب ونصف قطرها 3.



نقاط تقاطع المنحني $r = 2 + 2 \cos \theta$ مع المنحني $r = 3$:

$$2 + 2 \cos \theta = 3 \implies 2 \cos \theta = 1 \implies \cos \theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{3}, \theta = \frac{5\pi}{3}$$

لاحظ أن المنطقة المطلوبة متناظرة حول المحور القطبي

$$\begin{aligned} A &= 2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[(2 + 2 \cos \theta)^2 - (3)^2 \right] d\theta \right) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [4 + 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta - 9] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} [-5 + 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left[-5 + 8 \cos \theta + 4 \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) \right] d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} [-5 + 8 \cos \theta + 2 + 2 \cos 2\theta] d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} [-3 + 8 \cos \theta + 2 \cos 2\theta] d\theta \\ &= [-3\theta + 8 \sin \theta + \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{3}} = [-3\theta + 8 \sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left[-3 \left(\frac{\pi}{3} \right) + 8 \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) + 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} \right) \right] - [-3(0) + 8 \sin(0) + 2 \sin(0) \cos(0)] \\ &= \left[-\pi + 8 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \right] - [0 + 0 + 0] \\ &= -\pi + \frac{8\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\pi + \frac{9\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$