قسم الاقتصاد الزراعي
كلية علوم الأغذية والزراعة
جـــــامعة الملك سعود

قصر ٢١٦ : "تحليل كمي تطبيقي"
"Applied Quantitative Analysis"
شعبة XXXXX

د. كمال الدين علي بشير ابراهيم

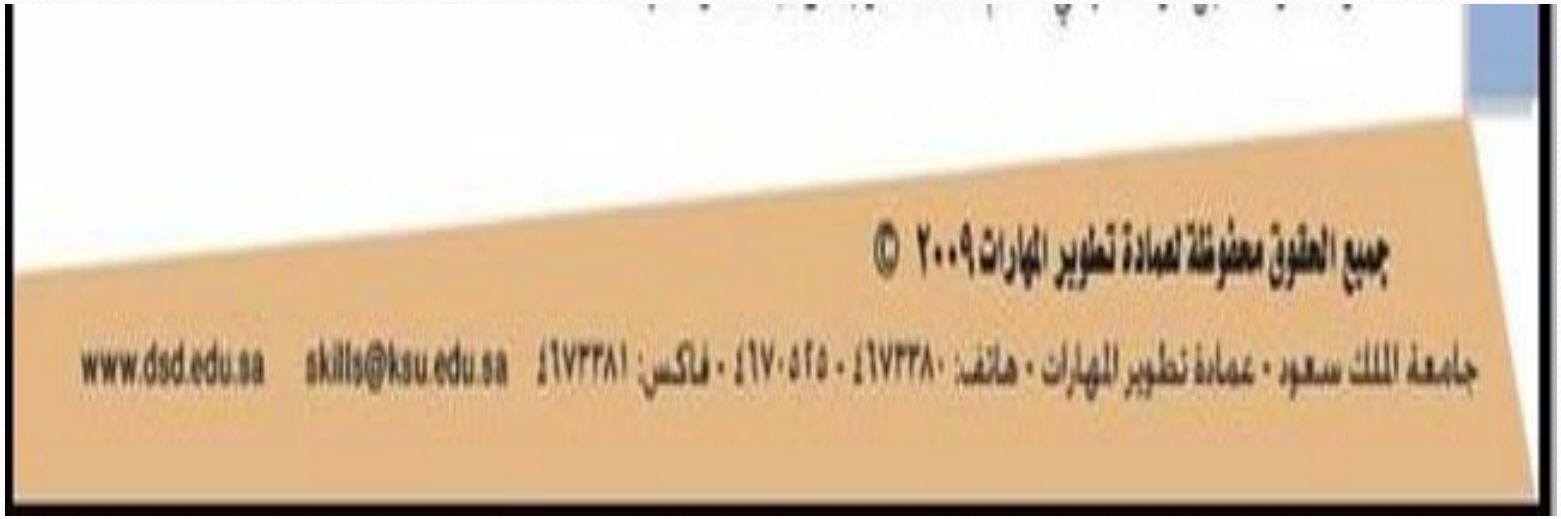
محاضرات

الفصل (1) 1445

- **Fac.ksu.edu.sa/kbashir**

الملكية الفكرية /

plagiarism



جامعة الملك سعود
وكالة الجامعة للتطوير والجودة
عمادة تطوير المهارات
سلسلة نصائح في التدريس الجامعي
(10)
جنب طلابك خطأ الوقوع في السرقة العلمية
مفهوم السرقة العلمية Plagiarism
تعتبر السرقة العلمية من المشاكل الأخلاقية المعقدة والمتعددة الوجوه في البيئة الجامعية. ويمكن تعريف السرقة العلمية، بشكل مبسط، في المحيط الجامعي، على أنها تحدث عندما يقوم الكاتب متعمداً باستخدام كلمات أو أفكار أو معلومات (ليست عامة) خاصة بشخص آخر بدون تعريف أو ذكر هذا الشخص أو مصدر هذه الكلمات أو المعلومات، منسباً إياها إلى نفسه. وهذا التعريف ينطبق على الكتابات المنشورة ورقياً أو الكترونياً أو الخاصة بطلاب آخرين. ومن أكثر أسباب اللجوء للسرقة العلمية: قصر الوقت وتأجيل إنجاز المهام إلى أن يحل الموعد النهائي لتسليم البحث، أو صعوبة البحث المطلوب، أو اعتياد الطلاب القيام بهذا العمل أو عدم وضوح مفهوم السرقة العلمية والطريقة الصحيحة للاستشهاد والتنويه (Citation) عن المراجع لدى الطلاب.
واليك عزيزي عضو هيئة التدريس بعض النصائح لتجنب وقوع طلابك في هذه المشكلة:
١- وضح بالتحديد وبدقة للطلاب، ومنذ اليوم الأول من الفصل الدراسي، مفهوم السرقة العلمية، موضحاً أهمية حقوق الملكية الفكرية والأمانة العلمية والاستخدام الأمثل للكتابات العلمية والمراجع، والعقوبات المترتبة عليها. واجعل هذا الأمر واضحاً في مخطط المقرر (syllabus)، مع توفير بعض الروابط الخاصة بحقوق الملكية الفكرية في المخطط.
٢- وضح للطلاب عدم قبولك باللجوء للمكاتب التي تقوم بتجهيز هذه البحوث لحساب الطالب. واعرض بعض نماذج من البحوث وناقش مع الطلاب نقاط القوة والضعف فيها، حتى يدرك الطلاب أنك على علم بما هو موجود بالفعل، موضحاً أن معظم هذه البحوث لا يرقى للمستوى المطلوب، وأنك تنشد الأفضل.
٣- حدد موضوعات البحوث للطلاب في وقت مبكر من الفصل الدراسي حتى تسمح بالوقت الكافي للتعمق في البحث. ووضح أن الهدف من البحث هو تعلم مهارات التفسير والتحليل و استخدام المعلومة، وليس مجرد تجميع المادة العلمية والحصول على منتج نهائي.
٤- غير موضوعات البحث بشكل دوري كل فصل دراسي، حتى لا يتم تداول هذه البحوث بين الطلاب أو بيعها أو شرائها.

٥- شجع الطلاب على استخدام مصادر متنوعة للحصول على المادة العلمية، بحيث يكون بعضها من المراجع والمجلات المطبوعة والبعض من الانترنت أو من خلال المشاهدات أو المقابلات الشخصية أو الاستبيان، الخ... وذلك لتفادي القص واللصق.

٦- وضع للطلاب حدود استخدام الانترنت والمقالات المنشورة الكترونياً في البحث (بحيث لا تزيد في النصوص المكتوبة عن ١٠٪ أو الف كلمة، ايهما اقل)، واستخدام الاقواس أو الكتابة المائلة أو حجم الحرف الاصغر، أو ترك مسافة كافية قبلها وبعدها، عند عرض مثل هذه النصوص، إلى جانب ذكر المصدر بالتاكيد.

٧- أكد على اهمية كتابة حواشي مختصرة (مذكرات يصوغها الطالب بكلماته على هامش المرجع) على بعض المصادر المستخدمة في تجهيز البحث، وتقديمها مع البحث، أو تقديم نسخ من المصادر المستخدمة على الاقل.

٨- شجع الطلاب على إتباع المنهجية العلمية في الكتابة، كان تطلب مخطط اولي للبحث وعناصره الاساسية ((Outline أو نسخة اولية من البحث (First draft)، لتقييمها قبل تقديم النسخة النهائية، فهذا يكون من الصعب تحقيقه باستخدام بحوث منقولة،

خريطة طريق الامتحانات

			Assessment Method/times			
Domain	**CLO Code**	**CLO**	**Test1**	**Test2**	**practical**	**Final**
Knowledge	K1	Describe various quantitative techniques taught in this class. توصيف مختلف الطرق الكمية بالمقرر	✓			✓
	K2	Recall mathematical principles and formulae. تذكر الأسس والنماذج الرياضية بالمقرر	✓	✓		✓
Skills	S1	Apply methodically relevant mathematical procedures to a given familiar situation. تطبيق الطرق الرياضية المناسبة في المكان المناسب		✓	✓	✓

The … Internet: to trust or not?

- من منا لا يستخدمها للبحوث واستقاء المعلومات ؟ لا أحد .
- القاعدة والنصيحة الذهبية هنا: خذ أي معلومة (مطلقا) منها بشئ من الحذر!! استصحب هذه الاحتياطات:
  - استخدم مصادر متعددة وليس واحدا
  - بحيث تعضد المعلومة من أكثر من مصدر
  - على أن تكون هذه المصادر مستقلة عن بعضها! كيف؟
    - في حالة بعض المصادر «المفتوحة» والتي تسمح بالنقل وإعادة النشر مثل Wikipedia
    - في حالة السرقات والنسخ المخالف لقواعد الملكية الفكرية
    - في الحالتين أعلاه سوف تأخذ نفس المعلومة على أساس أنها من مصدرين مختلفين لكن في الحقيقة؟؟

Books vs. Internet تابع:

- قد تكون الكتب أكثر مصداقية؟؟؟
- لكن ال Internet :
  - أكثر مواكبة
  - أكثر تفصيلا
  - أسهل أيسر؟

Summary Slide

- **الأساليب الكمية والكيفية:**
  مالفرق؟
  Quantitative Qualitative Methods
- **الأساليب الكيفية**

- **التحليل الكيفي في الاقتصاد**
- **الأساليب الكمية**
- **مرتكزات التحليل الكمي**

Summary Slide (cont.)

- الاساليب الكمية / الكيفية: مقارنة
- علم الإحصاء والتحليل الكمي
- أقسام الأساليب الكمية
- النمذجة (البرمجة) الرياضية

- النمذجة القياسية / الاحصائية
- الأساليب الكمية تطبيقيا
- بيانات وعينات الدراسات السوقية

الأساليب الكمية والكيفية:
مالفرق؟

Quantitative & Qualitative Methods

- ما هي الأساليب الكمية وما هي استخداماتها وما هي نقاط القوة والضعف فيها؟
- ما هي الأساليب الكيفية وما هي استخداماتها وما هي نقاط القوة والضعف فيها؟
- متي نستخدم كل؟ وأيهما أفضل؟

الأساليب الكيفية

- طرق تجمع بين مرتكزات (في مختلف فروع المعرفة:(الاجتماع / علم النفس /الاقتصاد...) وتهدف الي فهم متعمق للمشكلة قيد الدراسة: مثلا للسلوك البشري (وربما غير البشري).
  - يراد من هذه الأساليب الوصول الي الأسباب وراء سلوك/ميل معين؛ أي الإجابة علي: لماذا ؟ وكيف؟
  - في الغالب لتحقيق ذلك يتم استخدام وسائل مثل: دراسة "عينة" صغيرة (focus group) / المشاركة في الأحداث / المراقبة / المعاينة المركزة / فحص المستندات والمدونات ...

تابع: الأساليب الكيفية

- التحليل الكيفي في الغالب يلجأ اليه في الدراسات الاستكشافية.
- علي ضوء نتائج التحليل الكيفي يمكن: المضي قدما أو لا
- من تطبيقات الأساليب الكيفية: دراسة اطلاق منتج جديد في السوق ومعرفة تقبل المستهلك له ومدي قدرة المنتج علي اختراق السوق وسط المنافسة القائمة؟ كيف يمكننا عمل ذلك؟
- هل يمكن الاعتماد علي نتائج التحليل الكيفي؟
- ماذا عن غياب البعد الكمي: الدقة في النتائج؟

تابع: الأساليب الكيفية

- ما هي أوجه القصور الأخرى في الأساليب الكيفية؟
  - قضايا أخلاقية: السرية/الثقة بين الباحث والمبحوث، كيف نعالج ذلك؟
    - informed consent? ، طرق نشر النتائج
    - تحيز/خلفية/ميول/نوع.... الباحث؟؟ أمثلة؟
- هل يمكن تعميم النتائج؟

here التحليل الكيفي في الاقتصاد

- يختلف هذا المفهوم عن ما سبق عن أساليب التحليل الكيفي
- عبارة عن تحليل اقتصادي يعني باتجاه (وليس بمقدار) التغير في متغير ما
- يحاول تحديد التغير في المتغير الداخلي endogenous عند تغير أحد المعلمات/ أو عند تغير المتغير الخارجي exogenous
- الغرض تحديد العلاقة "نظريا" بين متغيرين: هل هي طردية أم سلبية
- مثل هذا التحليل مكون رئيس في الاقتصاد الكلي والجزئي يعرف بـ: **Comparative statics**
- مثال ذلك:

مثال: كيف يتأثر إنفاق المستهلك علي سلعة ما بمرونة الطلب؟

$$e = PQ$$

$$\frac{\partial e}{\partial p} = p\frac{dQ}{dP} + Q$$

$$\frac{\partial e}{\partial p} = Q(\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP} + 1) = Q(1 + \varepsilon_D)$$

تابع التحليل الكيفي في الاقتصاد

- ما لعلاقة بين "أداء سوق الأسهم" و"الأسعارفي سوق العقار"
- ما لعلاقة بين "الناتج الإجمالي الكلي" وبين كل من "الضرائب" و"عرض النقود"؟
- مثل هذا التحليل مكون رئيس في الاقتصاد الكلي والجزئي يعرف بـ:
  Comparative

مثال آخر

- $f(x, p) = 0$ for all x,
- $f'_1(x, p)dx + f'_2(x, p)dp.$
- $f'_1(x, p)dx + f'_2(x, p)dp = 0.$
- $dx/dp = -f'_2(x, p) / f'_1(x, p)$.

Relationship between Marginal Cost and Average Cost Functions

$$C = C(Q)$$

$$AC \equiv \frac{C(Q)}{Q}, \quad Q > 0$$

$$\frac{d}{dQ}\frac{C(Q)}{Q} = \frac{[C'(Q)\square Q - C(Q)\cdot 1}{Q^2} = \frac{1}{Q}\left[C'(Q) - \frac{C(Q)}{Q}\right]$$

$$for \quad Q > 0$$

$$\frac{d}{dQ}\frac{C(Q)}{Q} \gtreqless 0 \quad iff \quad C'(Q) \gtreqless \frac{C(Q)}{Q}$$

example:

$$C = Q^3 - 12Q^2 + 60Q$$

Applications To Comparative-static Analysis: Market Model

$$Q = a - bP \qquad (a, b > 0) \qquad [demand]$$

$$Q = -c + dP \qquad (c, d > 0) \qquad [Supply]$$

$$\bar{P} = \frac{a + c}{b + d}$$

$$\bar{Q} = \frac{ad - bc}{b + d}$$

Applications To Comparative-static Analysis: Market Model

Four partial derivatives:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial a} = \frac{1}{b+d} \qquad \frac{\partial \bar{P}}{\partial b} = \frac{-(a+c)}{(b+d)^2}$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial c} = \frac{1}{b+d} \qquad \frac{\partial \bar{P}}{\partial a} = \frac{-(a+c)}{(b+d)^2}$$

Conclusion:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial a} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial c} > 0 \quad and \quad \frac{\partial \bar{P}}{\partial b} = \frac{\partial \bar{P}}{\partial d} < 0$$

Applications To Comparative-static Analysis: National Income Model

$$Y = C + I_0 + G_0$$

$$C = \alpha + \beta(Y - T) \qquad (\alpha > 0; 0 < \beta < 1)$$

$$T = \gamma + \delta Y \qquad (\gamma > 0; 0 < \delta < 1)$$

Solution :

$$\bar{Y} = \frac{\alpha - \beta\gamma + I_0 + G_0}{1 - \beta + \beta\delta}$$

Applications To Comparative-static Analysis: National Income Model

Solution:

$$\bar{Y} = \frac{\alpha - \beta\gamma + I_0 + G_0}{1 - \beta + \beta\delta}$$

Government expenditure multiplier:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G_0} = \frac{1}{1 - \beta + \beta\delta} > 0$$

Non-income-tax multiplier:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \gamma} = \frac{-\beta}{1 - \beta + \beta\delta} < 0$$

Income tax rate multiplier:

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial \delta} = \frac{-\beta(\alpha - \beta\gamma + I_0 + G_0)}{(1 - \beta + \beta\delta)^2} = \frac{-\beta\bar{Y}}{1 - \beta + \beta\delta} < 0$$

أرقام مرعبة!

http://breathingearth.net/ –

الأساليب الكميةhere

- تقدير مؤشرات كمية من و اقع البيانات وباستخدام معادلات وعلاقات رياضية.
- تساعد في اتخاذ القرارات.
- يحاول الاجابة علي أسئلة من نوع: كم؟ كم مرة ؟ ما مدي قوة.....؟ ما نسبة؟ هل محددات السلوك قادرة علي التنبؤ به بصورة معنوية؟
- نحتاج لكثير من المعايير الكمية لاتخاذ القرارات التسويقية
- عادة ينطوي علي أخذ عينة "ممثلة" بحجم "معقول" وجمع بيانات ثانوية أو أولية (إجراء استبيان)

تابع

- يتطلب إجراء استبيان لجمع بيانات "كمية / يمكن معاملتها ككمية" واستخدام طرق احصائية لتمييز السبب والنتيجةcause and effect— بين المتغيرات: مثال؟ دراسة مبيعات بيض المائدة في المواسم المختلفة للشركات المختلفة

الأساليب الكمية: الاستبيان

- تصميم الاستبيان مهم ويستحسن الاستعانة بذوي الخبرة.
- من القضايا المهمة هنا: العينة / وضوح الأسئلة: فهم كل المشاركين للسؤال متو افق بصورة مستمرة (مثال؟؟) / صلاحية الأسئلة (شخصية؟محرجة؟ اجابتها مستطاعة؟سؤال واحد أم ٢ في ١) (؟؟) والمقاييس / امكانية الحصول على اجابة صادقة؟؟/ تجريب الاستبيان / امكانية الاعتماد علي المتغيرات.....
- توجد طرق عدة لتنفيذ الاسبيان (للمعاينة): شخصية / البريد؟ / التلفون / علي الشبكة/ خليط
- هل تري فوارق بين هذه الطرق؟ هل تتأثر نتائج الدراسة بالطريقة التي تختارها؟

تمرين (١) : خمس (٥) درجات

tue28/3/2013.

هل تري فوارق بين هذه الطرق؟ هل تتأثر نتائج الدراسة بالطريقة التي تختارها؟

الطريقة	المقدم	الدرجة/٥
البريد السعودي	fawwaz	
الشخصية	massaad	
التلفون	badr	
الشبكة	tareq	
تقييم ومقارنة بين الطرق المختلفة	Ahmad	
إدارة الحوار	Hussam	

مرتكزات التحليل الكمي

- ترتكز عملية التحليل الكمي علي:
  - وجود نظرية اقتصادية محددة
  - جمع بيانات ممثلة للمجتمع عن الظاهرة محل الدراسة
  - استخدام الأدوات المناسبة لتقدير مؤشرات كمية
  - استخدام المؤشرات لتفسير الظاهرة / اتخاذ القرار المناسب
  - وربما التنبؤ بالمستقبل من و اقع المؤشرات التي قمنا بتقديرها.

أي الاسلوبين تفضل ؟؟

- للإجابة علي هذا السؤال، نسأل:
  - ما هي مزايا الأساليب الكمية؟
  - ما هي عيوبها؟
  - ما هي مزايا الأساليب الكيفية؟
  - ما هي عيوبها؟

هل هما ضدين؟

لا

الاساليب الكمية / الكيفية: مقارنة

الكمية	الكيفية
استبيان/ بيانات رقمية	معاينة مجموعات صغيرة بعمق: بيانات وصفية لفظية
نختبر فروض بنظرية معينة	نريد بناء / استكشاف نظرية جديدة
أكثر موضوعية	أكثر ذاتية (آراء المستطلعين)
تعتمد علي الأرقام	لفظية / وصفية
التغطية أهم من العمق	العمق أهم من التغطية
تستخدم الاختبارات الاحصائية	لا تستخدم الاختبارات الاحصائية
وقت أكثر للتخطيط أقل للتحليل	وقت أقل للتخطيط أكثر للتحليل
يسهل تعميم النتائج	يصعب تعميم النتائج
الأسئلة: مغلقة، ردود محددة	الأسئلة مفتوحة

العمليات الجبرية للأسس والكسور وتطبيقاتها

قصر ٢١٦

د. كمال الدين علي بشير ابراهيم

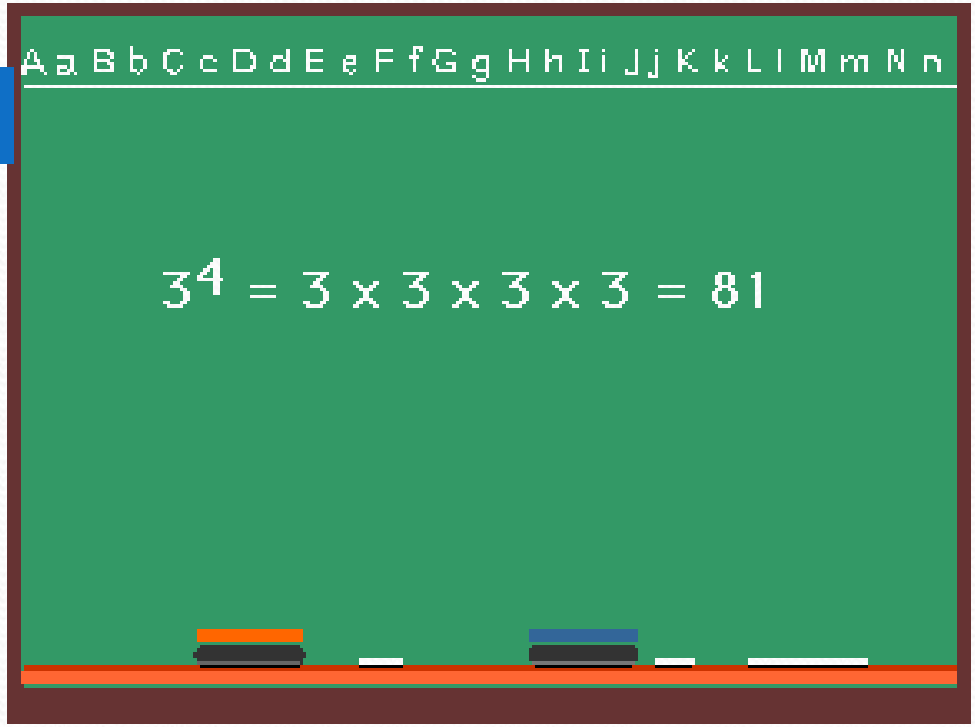
الأسس: powers

- عملية رياضية توضح عدد المرات التي يضرب فيها العدد في نفسه.
- يتكون المقدار الأسي من شقين: الأس و الأساس
- في المقدار الأسي يكون الأساس مرفوعا للأس (القوى) أي أن الأساس يكون مضروبا في نفسه بقدر الأس
- يمكن للأس أن يكون:
  - عدد صحيحا موجبا أو سالبا
  - كسرا (مقدارا نسبيا)

تابع

- مثلا: (3^5) تعني أن العدد ٣ ضرب في نفسه ٥ مرات:
  3X3X3X3X3
- ويمكن قراءة ذلك بعدة طرق:
  - 3X3X3X3X3
  - ٣(الأساس) مرفوعة للقوى ٥ (الأس)
  - ٣ أس ٥
- كذلك يمكن ان يكون لدينا(3^{-5}) وتعني؟
- $\frac{1}{3^5} = \frac{1}{3\times3\times3\times3\times3} = \frac{1}{243}$

هذا يبدو سهلا حتى الآن



تابع

- كما يمكن أن يكون لدينا $\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$ وبصورة أعم:

- $X^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

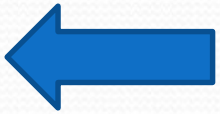
تابع

- ويمكن تعميم تعبير المقدار ألأسي من المثال السابق بـ:
  - ($س^{ن}$) وتعني ؟؟؟

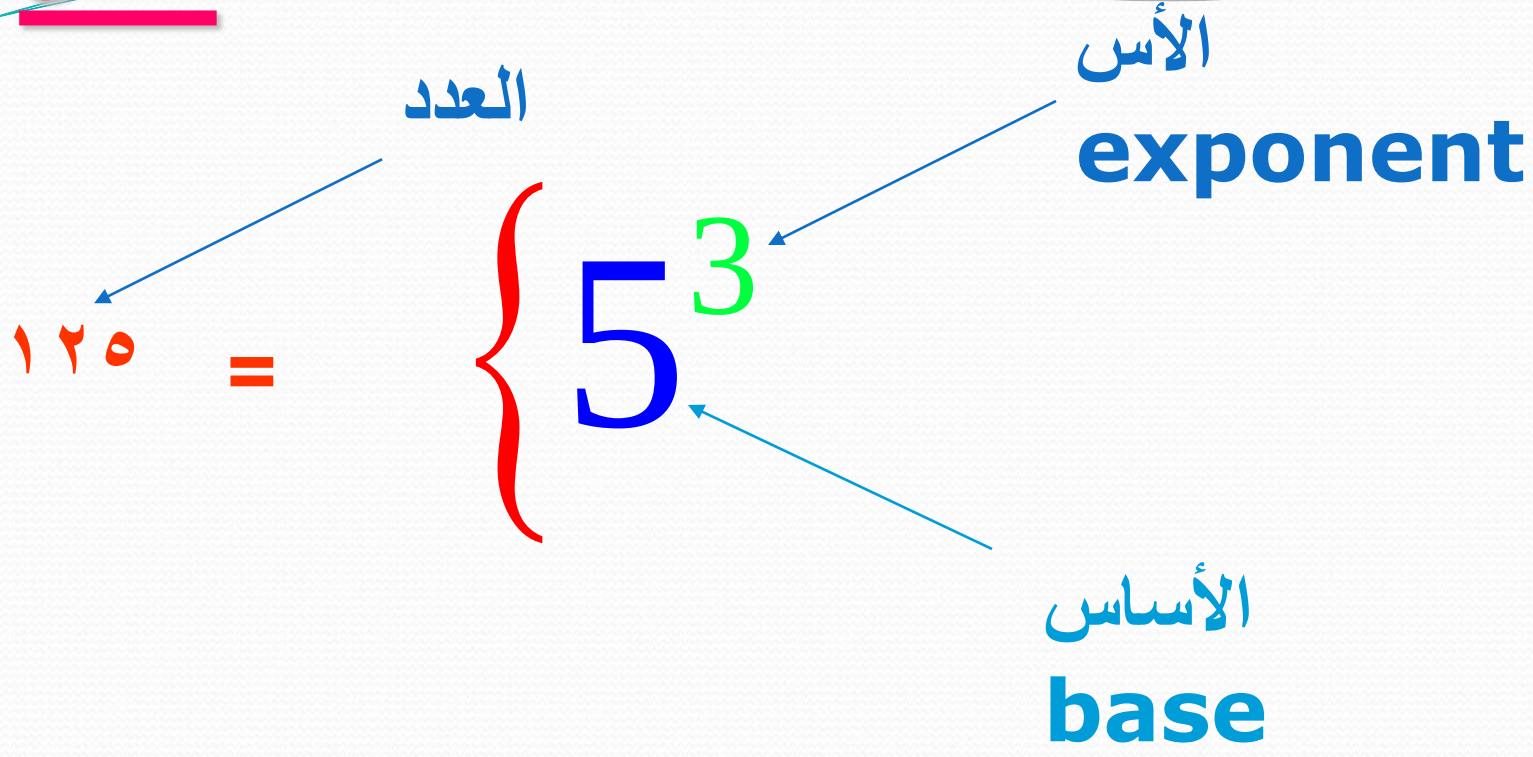
أو

  - ($س^{-ن}$) وتعني؟؟

here تابع

- لا حظ أنه يمكننا أيضا استخدام اللوغاريثمات للحصول على قيمة الأس:
- ص = (س^{ن})  لو$_{س}$ ص = ن
- إذا :اللوغاريثم هو؟ الأس

مثال



لوغاريثم (لو) ١٢٥ للأساس ٥ = ٣

لو ١٢٥ ٥ = ٣

الجذور:roots/radicals

- الجذور هي مقادير جبرية يكون الأس فيها عددا نسبيا (كسر اعتيادي).
- فمثلا إذا كانت ص = (س^{ن}) فإن س = الجذر النوني لـ: ص
- وهذا تعميم للجذور المعروفة لدينا والمتداولة مثل:
  - الجذر التربيعي وهو الجذر الثاني لأي مقدار مرفوع للقوة (٢)
  - الجذر التكعيبي وهو الجذر الثالث لأي مقدار مرفوع للقوة (٢)
  - وبصورة أعم $X^{\frac{m}{n}}$ هي الجذر النوني لـ x مرفوعة للقوة m :
- $X^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

بعض خواص الجذور (١)

$$\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}=\sqrt[n]{xy}$$

حاصل ضرب جذرين بنفس الدليل (n) لمقدارين (x) , (y) يساوي جذر مضروب المقدارين لذلك الدليل، مثلا:

$$\sqrt{36\times16}=\sqrt{36}\times\sqrt{16}=6\times4=24$$

(٢)

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

حاصل قسمة جذرين بنفس الدليل (n) لمقدارين (x) , (y) يساوي جذر مضروب المقدارين لذلك الدليل، مثلا:

$$\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}$$

المقادير الجبرية algebraic expressions

- ماهي؟
- أية تشكيلة من الأعداد والرموزوالمرتبطة فيما بينها بعمليات جبرية أساسية ويسمى كل جزء منفصل (الفواصل هي علامات سالب أو موجب) حدا في المقدار الجبري.
- أمثلة؟
- $x/y - \frac{7}{8}z + \frac{2}{5}y + x^2 + 5$ مقدار جبري يتكون من (٤) حدود.
- لاحظ أن (٥) مقدار ثابت
- أمثلة أخرى؟؟؟

تطبيقات المقادير الجبرية

- للمقادير الجبرية تطبيقات مهمة في مجال علم الاقتصاد والعلوم الاجتماعية والانسانية الأخري:
  - تستخدم الدوال وهي مقادير جبرية (functions) كعلاقة تربط المتغيرات التابعة والمتغيرات المستقلة (العناصر المؤثرة في غيرها).
  - تستخدم لبناء ووصف النماذج الاقتصادية

الصورة العامة للدالة: ص = د(س)؟؟

- هذه هي الصيغة العامة لكتابة مقدار جبري من أي نوع، وتعني:
  - ص = د(س) أي أن (ص) دالة في (س)
  - أي أن ص معبر عنها بدلالة (س)
  - أي أنه توجد علاقة من نوع ما بين (ص) و(س)
- بهذا التعبير{ص = د(س)} نحن نقول أنه توجد علاقة ولكننا لا ندري كنهها
- هذا التعبير يصف أية علاقة يمكنك تخيلها بين (ص) و(س)، مثلا:
  - ص=٢س، ص= س^{٢} ، ص=٢٠س+٣٠س^{٢} +٤٠س^{٣} ، و...و...و؟؟؟؟

here443Exponential functions

العلاقات (الدوال) الأسية

- ماهي؟
- هنا يظهر المتغير المستقل في صورة أس أو قوة بينما المقدار الثابت هو الأساس.
- الصورة العامة؟
- ص = د(س) = $ن^{س}$ حيث:
  - ص = المتغير التابع
  - س = المتغير المستقل
  - ن = الأساس، ن > ١

قواعد الأسس

(1) الأس (كما سلف) هو عدد المرات التي يضرب فيها الأساس في نفسه

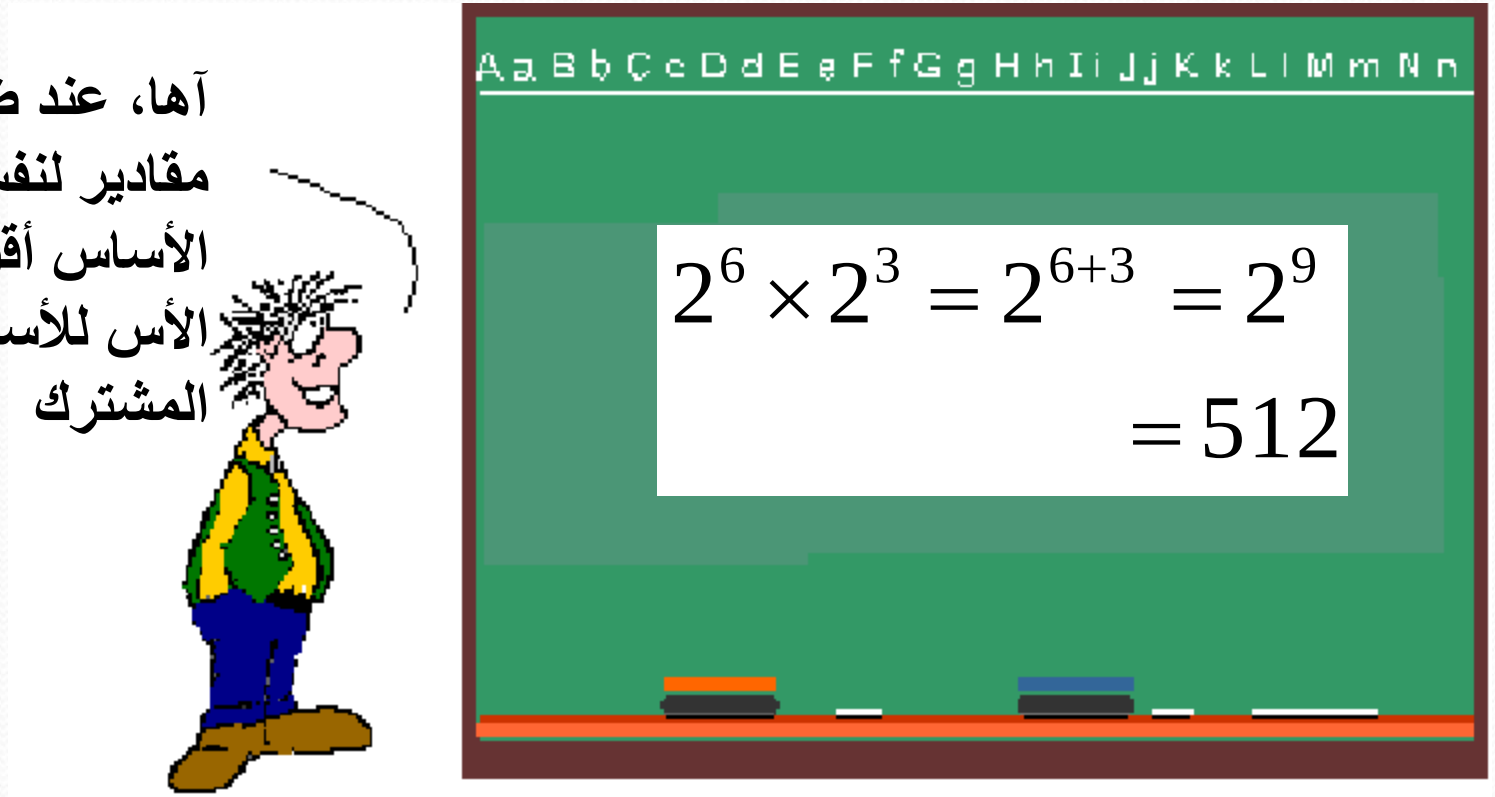
$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \cdots \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{n-times}$$

x مضروبة في نفسها **n** مرة

Example: $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$

(٢) الضرب: عند ضرب حدود (مقادير جبرية) أسية بنفس الأساس نجمع الأسس (ونحتفظ بالأساس).

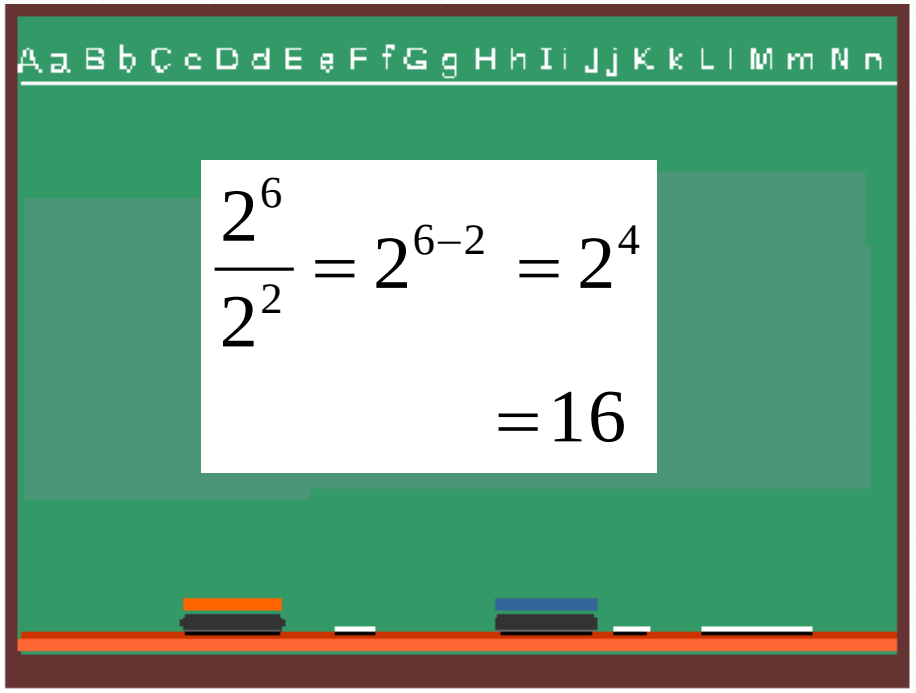
$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$



(٣) القسمة: عند ضرب حدود (مقادير جبرية) أسية بنفس الأساس نطرح الأسس (ونحتفظ بالأساس).

$$\frac{x^m}{x^n} = x^m \div x^n = x^{m-n}$$

آها، عند ضرب مقادير لنفس الأساس أقوم بطرح الأس للأساس المشترك !



أمثلة

1. $3^2 \times 3^2 =$
2. $5^2 \times 5^4 =$
3. $a^5 \times a^2 =$
4. $2s^2 \times 4s^7 =$
5. $(-3)^2 \times (-3)^3 =$
6. $s^2t^4 \times s^7t^3 =$
7. $\frac{s^{12}}{s^4} =$
8. $\frac{3^9}{3^5} =$
9. $\frac{s^{12}t^8}{s^4t^4} =$
10. $\frac{36a^5b^8}{4a^4b^5} =$

الحلول

1. $3^2 \times 3^2 = 3^{2+2} = 3^4 = 81$
2. $5^2 \times 5^4 = 5^{2+4} = 5^6$
3. $a^5 \times a^2 = a^{5+2} = a^7$
4. $2s^2 \times 4s^7 = 2 \times 4 \times s^{2+7} = 8s^9$
5. $(-3)^2 \times (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5 = -243$
6. $s^2t^4 \times s^7t^3 = s^{2+7}t^{4+3} = s^9t^7$

الحلول

7. $\frac{s^{12}}{s^4} = s^{12-4} = s^8$

8. $\frac{3^9}{3^5} = 3^{9-5} = 3^4 = 81$

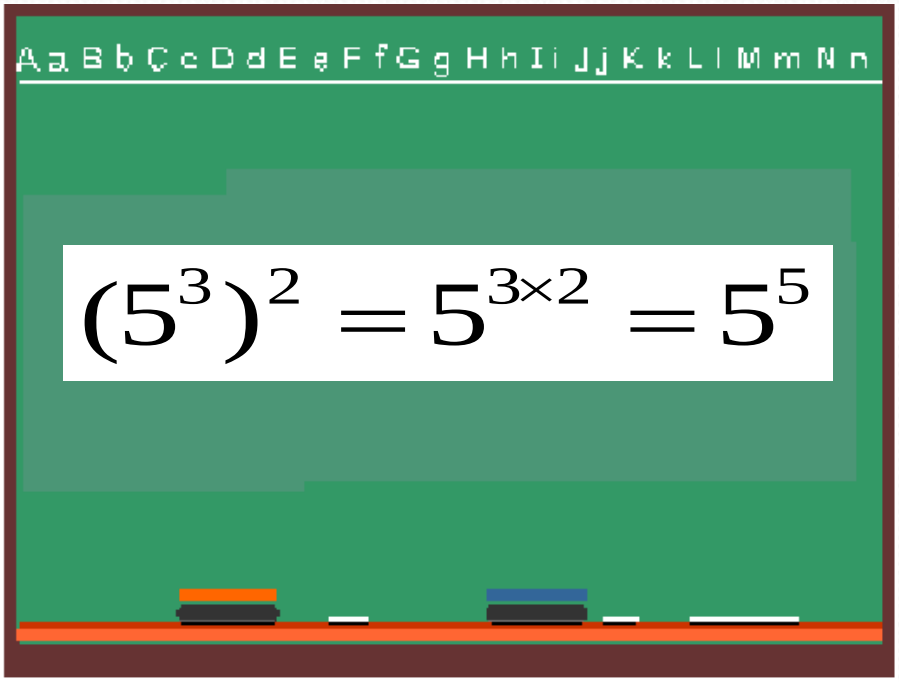
9. $\frac{s^{12}t^8}{s^4t^4} = s^{12-4}t^{8-4} = s^8t^4$

10. $\frac{36a^5b^8}{4a^4b^5} = 36 \div 4 \times a^{5-4}b^{8-5} = 9ab^3$

(٤)أس الأس: عند رفع مقدار أسي لأس نضرب الأس في بعضها

$$\left(x^{m}\right)^{n} = x^{mn}$$

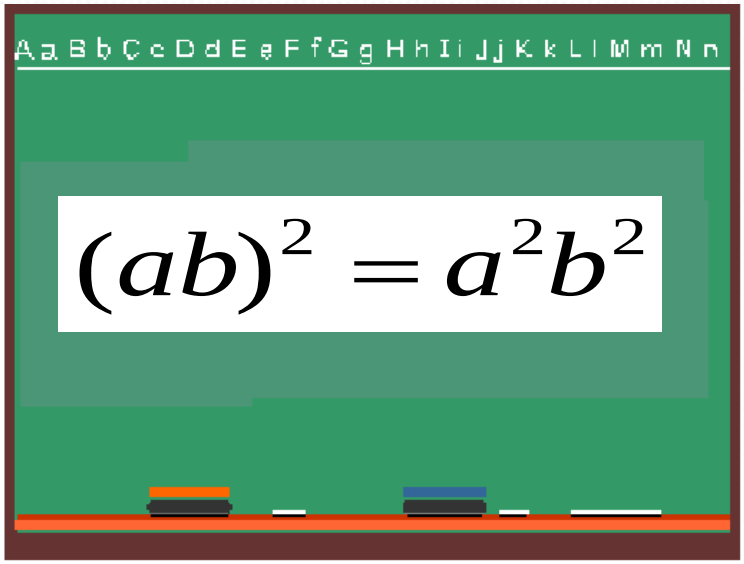
يعني عند رفع مقدار أسي لأس آخر أقوم بضرب الأسس في بعضها!



(٥) الأس لمضروب مقدارين (حدين): الأس لمضروب مقدارين هو مضروب المقدارين مرفوعين لذلك الأس.

$$(xy)^n = x^n \cdot y^n$$

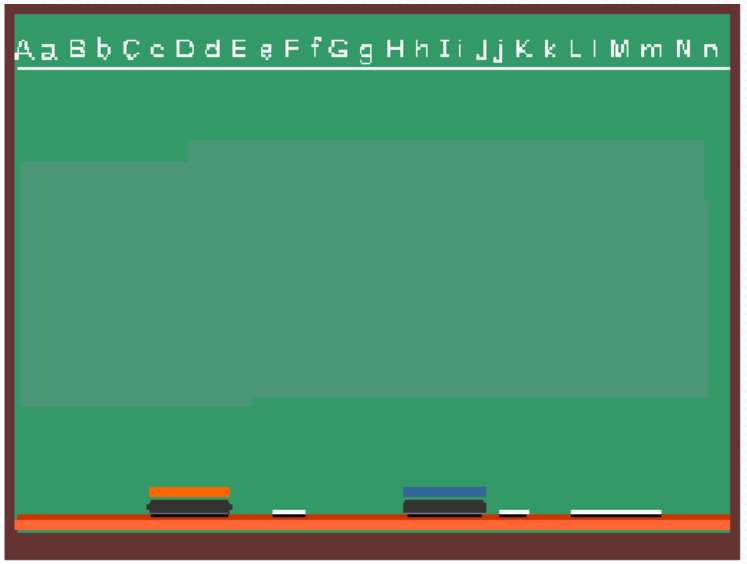
ها عند رفع المضروب لأس تكون النتيجة مضروب المقدارين بعد رفع كل منهما للأس المشترك!



(٥) الأس لحاصل قسمة مقدارين (حدين): الأس لحاصل قسمة مقدارين هو حاصل قسمة المقدارين مع رفع كل منهما لذلك الأس.

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

ها عند رفع حاصل القسمة لأس تكون النتيجة حاصل قسمة المقدارين بعد رفع كل منهما للأس المشترك!



أمثلة

1. $\left(3^2\right)^5 =$
2. $\left(a^3\right)^4 =$
3. $\left(2a^2\right)^3 =$
4. $\left(2^2 a^5 b^3\right)^2 =$
5. $(-3a^2)^2 =$
6. $\left(s^2 t^4\right)^3 =$
7. $\left(\frac{s}{t}\right)^5 =$
8. $\left(\frac{3^9}{3^5}\right)^2 =$
9. $\left(\frac{st^8}{rt^4}\right)^2 =$
10. $\left(\frac{36a^5 b^8}{4a^4 b^5}\right)^2 =$

الحلول

1. $\left(3^2\right)^5 = \quad 3^{10}$

2. $\left(a^3\right)^4 = \quad a^{12}$

3. $\left(2a^2\right)^3 = \quad 2^3 a^{2\times 3} = 8a^6$

4. $\left(2^2 a^5 b^3\right)^2 = 2^{2\times 2} a^{5\times 2} b^{3\times 2} = 2^4 a^{10} b^6 = 16a^{10} b^6$

5. $(-3a^2)^2 = (-3)^2 \times a^{2\times 2} = 9a^4$

6. $\left(s^2 t^4\right)^3 = s^{2\times 3} t^{4\times 3} = s^6 t^{12}$

SOLUTIONS

7. $\left(\frac{s}{t}\right)^5 = \frac{s^5}{t^5}$

8. $\left(\frac{3^9}{3^5}\right)^2 = \left(3^4\right)^2 = 3^8$

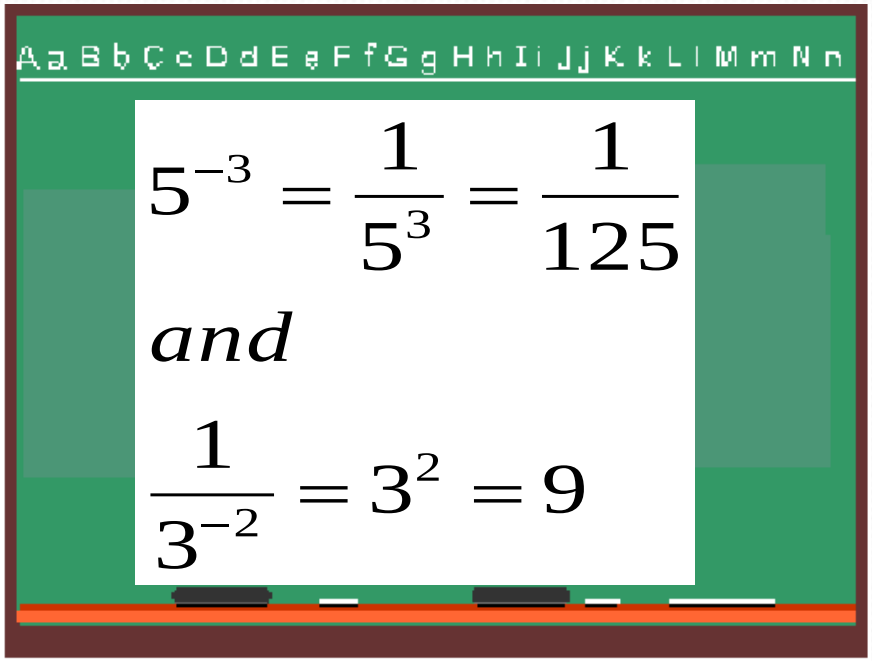
9. $\left(\frac{st^8}{rt^4}\right)^2 = \left(\frac{st^4}{r}\right)^2 = \frac{s^2t^8}{r^2}$

10 $\left(\frac{36a^5b^8}{4a^4b^5}\right)^2 = \left(9ab^3\right)^2 = 9^2a^2b^{3\times2} = 81a^2b^6$

(٧) المعكوس لأس سالب: الأساس مرفوعا لأس سالب يساوي معكوس الأساس مرفوعا لنفس الأس بالموجب

$$x^{-m} = \frac{1}{x^{m}}$$

يعني إذا كان عندي أساس مرفوع لأس سالب آخذ معكوس ذلك الأساس مرفوعا لنفس الأس بالموجب__والعكس صحيح: إذا كان الأساس المرفوع لأس سالب موجودا بالمقام أحوله للبسط مع عكس علامة الأس!



$$5^{-3} = \frac{1}{5^{3}} = \frac{1}{125}$$

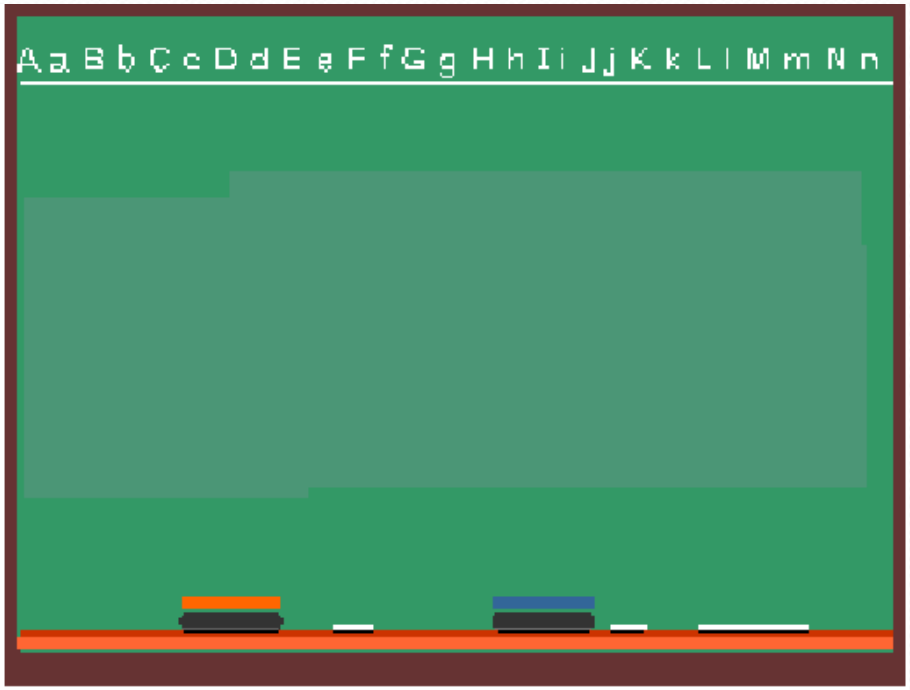
$$and$$

$$\frac{1}{3^{-2}} = 3^{2} = 9$$

(٨) الأس الصفري: أي أساس مرفوع للقوة صفر يساوي واحدا.

$$x^0 = 1$$

اوكي اذا رفعت اي
اساس لأس صفري
تكون النتيجة واحد!



أمثلة

1. $\left(2a^2b\right)^0 =$
2. $y^2 \times y^{-4} =$
3. $\left(a^5\right)^{-1} =$
4. $s^{-2} \times 4s^7 =$
5. $\left(3x^{-2}y^3\right)^{-4} =$
6. $\left(s^2t^4\right)^0 =$
7. $\left(\frac{2^2}{x}\right)^{-1} =$
8. $\left(\frac{3^9}{3^5}\right)^{-2} =$
9. $\left(\frac{s^2t^2}{s^4t^4}\right)^{-2} =$
10. $\left(\frac{36a^5}{4a^4b^5}\right)^{-2} =$

الحلول

1. $\left(2a^2b\right)^0 = 1$

2. $y^2 \times y^{-4} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$

3. $\left(a^5\right)^{-1} = \frac{1}{a^5}$

4. $s^{-2} \times 4s^7 = 4s^5$

5. $\left(3x^{-2}y^3\right)^{-4} = \left(3^{-4}x^8y^{-12}\right) = \frac{x^8}{81y^{12}}$

6. $\left(s^2t^4\right)^0 = 1$

الحلول

7. $\left(\frac{2^2}{x}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{x}\right)^{-1} = \frac{x}{4}$

8. $\left(\frac{3^9}{3^5}\right)^{-2} = \left(3^4\right)^{-2} = 3^{-8} = \frac{1}{3^8}$

9. $\left(\frac{s^2t^2}{s^4t^4}\right)^{-2} = \left(s^{-2}t^{-2}\right)^{-2} = s^4t^4$

10. $\left(\frac{36a^5}{4a^4b^5}\right)^{-2} = 9^{-2}a^{-2}b^{10} = \frac{b^{10}}{81a^2}$

حل مسائل العلاقات الأسية: أساسيات

- **في حالة الجمع والطرح:**
  - حلل الاساسات الى عواملها الأولية (٢،٣،٥,...).
  - فك الاقواس وتخلص من الجذور متبعا القوانين السالفة).
  - ادمج الاساسات المتشابهة في أساس واحد متبعا القوانين السالفة.
  - استخرج عامل مشترك باصغر اس.
  - اختصر المقدار
- **في حالة الضرب والقسمة:**
  - حلل الاساسات الى عواملها الأولية (٢،٣،٥,...).
  - ادمج الاساسات المتشابهة في أساس واحد متبعا القوانين السالفة.
  - اختصر المقدار

أمثلة (١):

- يبلغ مصروفك الشهري ١٠٠٠ ريال فإذا كان انفاقك على تسليتك المفضلة (Bowling?) هو:

$$\frac{(2)^{x+2}+(2)^{x}}{(2)^{x+2}+(2)^{x+4}}$$

أحسب قيمة انفاقك على هذه اللعبة.

الحل

- باتباع الاساسيات السالفة:
  - اولا نفكك مقاديركل من البسط والمقام الى عواملها الاولية:

$$\frac{2^2 * 2^x + 2^x}{2^x * 2^2 + 2^x * 2^4}$$

  - نأخذ عامل مشترك لكل من البسط والمقام:

$$\frac{2^x(2^2+1)}{2^x(2^2+2^4)}$$

• نختصر:

$$\frac{2^x(2^2+1)}{2^x(2^2+2^4)} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

وبذا يكون انفاقك على لعبتك المفضلة:

= ١/٤*١٠٠٠= ٢٥٠ ريال

مثال(٢):

مصروف محمد الشهري

$(64)^{\frac{1}{6}}$ ألف ريال بينما يحصل أحمد على $(125)^{\frac{1}{3}}$ ألف ريال، أي المصروفين أكبر؟

الحل:

$$(64)^{\frac{1}{6}} = (2^6)^{\frac{1}{6}} = 2000$$

$$(125)^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5000$$

تطبيقات اقتصادية: المنفعة الكلية/الحدية توازن المستهلك

- يطلب الفرد السلع المحددة بهدف اشباع حاجاته ورغباته أي بهدف الحصول على المنفعة التي تحصل باستهلاك السلع.
- يمكن قياس المنفعة المتحصلة من الاستهلاك بـ"وحدات المنفعة".
- يميز الاقتصاديون بين نوعين من المنفعة:

المنفعة الكلية (Total Utility) (TU):

"مجموع المنفعة التي يحصل عليها المستهلك نتيجة استهلاك كمية معينة من سلعة أو خدمة ما."

المنفعة الحدية (Marginal Utility) (MU)

"معدل التغير في المنفعة الكلية نتيجة تغير الكمية المستهلكة بوحدة واحدة، أي: منفعة الوحدة الأخيرة أو الوحدة الاضافية".

اذا رمزنا للكمية (Quantity) بالرمز (Q) يمكن التعبير عن المنفعة الحدية عند الوحدة النونية (n)كالتالي:

$$MU_n = \frac{TU_n - TU_{n-1}}{Q_n - Q_{n-1}} = \frac{\Delta TU}{\Delta Q}$$

حيث Δ تعني التغير

here344

لاحظ عندما تتغير الكمية بوحدة واحدة تكون المنفعة الحدية كالتالي:

$$MU_n = TU_n - TU_{n-1} = \Delta TU$$

مثال: الجدول يمثل المنافع المتحصلة (بالوحدة) جراء استهلاك سلعة ما:

الكمية المستهلكة	المنفعة الكلية	المنفعة الحدية
١	٣	-
٢	٥,٥	٢,٥
٣	٧,٥	٢
٤	٩	١,٥
٥	١٠	١
٦	١٠,٥	٠,٥
٧	١٠,٥	٠
٨	١٠	-٠,٥

ماهي ملاحظاتك على قيم المنفعة الكلية؟الحدية؟ أية علاقات بينهما؟

تابع

- تتزايد المنفعة الكلية لكن بمعدل متناقص؟ كيف و أين نقرأ ذلك في الجدول؟
- أقصى مستوى للمنفعة عند ٧ وحدات للسلعة؛ ثم تتناقص بعد ذلك.
- تتناقص المنفعة الحدية؛ تصبح صفرا ثم تصير سالبة بعد ذلك.
- عندما تكون المنفعة الحدية صفلرا تكون المنفعة الكلية عند أقصى حد لها.
- العلاقة بين المنفعة الكلية والكمية المستهلكة طردية الى حد (؟) ثم تصير عكسية.

تابع

- معدل الزيادة (؟؟) في المنفعة الكلية --الناتج عن زيادة استهلاك سلعة ما– يتناقص كلما زادت الوحدات المستهلكة– هذا ما يعرف بـ«قانون تناقص المنفعة الحدية Law of Diminishing Marginal Utility»

مثال

- من الجدول السابق : أحسب المنفعة الحدية عند استهلاك:
  - ٣ وحدات؟
  - ٦ وحدات؟

- الحل: من القانون:

$$MU_n = TU_n - TU_{n-1} = \Delta TU$$

- عوض n=3; n=6 :

$$MU_3 = TU_3 - TU_{3-1} = TU_3 - TU_2$$

$$MU_6 = TU_6 - TU_5$$

توازن المستهلك

- يتحقق توازن المستهلك عند حصوله على أقصى منفعة ممكنة في حدود دخله.
- يشترط عند التوازن:

المنفعة المكتسبة = الثمن المدفوع مقابلها

أي:

المنفعة الحدية = الثمن

أي:

MU=P

P=price

تابع

- لاحظ أن هذا يعتبر توازنا إذ أن أي تغيير بعيدا عنه في أي اتجاه لن يكون مرضيا للمستهلك:

MU>P

في هذه الحالة المنفعة الحدية تفوق الثمن المدفوع (يوجد فائض) والأفضل للمستهلك أن يستمر في شراء وحدات اضافية من السلعة

MU< P

في هذه الحالة المنفعة الحدية أقل من الثمن الدفوع (توجد خسارة) والأفضل للمستهلك أن يتوقف ويقلل الوحدات االمشتراة من السلعة

مثال

هذه بيانات لمستهلك ما

الوحدات المشتراة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
المنفعة الحدية (ريال)	٢٠	١٩	١٨	١٧	١٦	١٥	١٤	١٣
الثمن (ريال)	١٥	١٥	١٥	١٥	١٥	١٥	١٥	١٥
الثمن بعد الضريبة	١٨	١٨	١٨	١٨	١٨	١٨	١٨	١٨

بين توازن هذا المستهلك

متى يحقق المستهلك فائضا/خسارة؟ أحسب كل من الفائض والخسارة؟

كيف يتأثر المستهلك إذا فرضت الدولة ضريبة استهلاك قدرها ثلاثة ريال على الوحدة الواحدة؟

الحل

- يتحقق التوازن عند:

MU=p=15
أي عند استهلاك ٦ وحدات من السلعة

- يتحقق فائض للمستهلك (Surplus)عند:

MU >15
إي عند شراء الوحدات من (١) إلى (٥)

- ويتحقق خسارة (Loss) للمستهلك عند:

MU <15
إي عند شراء الوحدات من (٧) إلى (٨)

حساب الفائض:

- يمكن حساب الفائض للمستهلك من المعادلة:

$$Surplus = \sum_{i=1}^{n} (MU_i - p) \; \forall MU > p$$

- يمكن حساب الخسارة للمستهلك من المعادلة:

$$Loss = \sum_{i=1}^{n} (MU_i - p) \; \forall \; MU < p$$

من المثال السابق:

الوحدات المشتراة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
المنفعة الحدية (ريال)	٢٠	١٩	١٨	١٧	١٦	١٥	١٤	١٣
الثمن (ريال)	١٥	١٥	١٥	١٥	١٥	١٥	١٥	١٥
الثمن بعد الضريبة	١٨	١٨	١٨	١٨	١٨	١٨	١٨	١٨

حساب الفائض والخسارة قبل الضريبة:

الفائض= (٢٠-١٥)+(١٩-١٥)+(١٨-١٥)+(١٧-١٥)+(١٦-١٥)=١٥ ريال

الخسارة= (١٤-١٥)+(١٣-١٥)= -٣ ريال

من المثال السابق:

- أحسب الفائض والخسارة بعد الضريبة؟؟؟

تطبيقات اقتصادية: قانون Pareto لتوزيع الدخل here

- بحسب Pareto يتم توزيع الدخل كالتالي:

$$N = \frac{A}{x^{\alpha}}$$

$$\log N = \log A - \alpha \log x$$

- حيث: N هو عدد الافراد الذين يزيد دخل كل منهم عن x وحدة نقد في المجتمع، أي أن x هو مستوى الدخل
- A هو عدد سكان المجتمع وهو عادة معلوم (أو في حكم المعلوم)
- α معامل ثابت ويساوي ≈ ١,٥

لاحظ أن هذه معادلة في مجهولين: N و x متى ما عرف احدهما يمكن بسهولة ايجاد الآخر

مثال:

- لمجموعة معينة وجد أن قانون **Pareto** لتوزيع الدخل هو:

$$N = \frac{216 * 10^{10}}{x^{\frac{3}{2}}}$$

1. احسب عدد المليونيرات في ذلك المجتمع؟
2. أحسب عدد الأفراد الذين يتراوح دخلهم بين ٣٦٠٠ و ١٠٠٠٠ ريال
3. ماهو أقل دخل بين أغنى ٨٠ فردا في هذا المجتمع؟

الحل

عدد المليونيرات أي عدد الأفراد الذين يفوق دخلهم المليون:

$$N = \frac{216*10^{10}}{1000000^{\frac{3}{2}}} = \frac{216*10^{10}}{(10^6)^{\frac{3}{2}}} = \frac{216*10^{10}}{(10^9)} = 216*10 = 2160$$ مليونير

عدد الأفراد الذين يفوق دخلهم ٣٦٠٠ ريال:

$$N = \frac{216*10^{10}}{3600^{\frac{3}{2}}} = \frac{6^3*10^{10}}{(6^2*10^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{6^3*10^{10}}{(6^3*10^3)} = 10^7 = 10000000$$ شخص

عدد الأفراد الذين يفوق دخلهم ١٠٠٠٠ ريال:

$$N = \frac{216*10^{10}}{10000^{\frac{3}{2}}} = \frac{216*10^{10}}{(10^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{216*10^{10}}{(10^6)} = 2160000$$ شخص

تابع

بالتالي يكون عدد الأفراد الذين يتراوح دخلهم بين ٣٦٠٠ و ١٠٠٠٠ ريال:

١٠٠٠٠٠٠٠ - ٢١٦٠٠٠٠ = ٧٨٤٠٠٠٠ شخص

أقل دخل بين أغنى ٨٠ فردا في هذا المجتمع:

$$80 = \frac{216*10^{10}}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$x^{\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}} = \frac{216*10^{10}}{80} = \frac{216*10^{10}}{8*10} = (3^3*10^9)^{\frac{2}{3}} = (3^2*10^6)$$

$$x = (3^2*10^6) = 9000000 \text{ ريال}$$

- Test mid_2_44 upto here:Sun 14/5/2023 @11:45 bnoon

تطبيقات اقتصادية: الانتاج الكلي/المتوسط/الحدي344

الانتاج الكلي: (TP)Total Product: الانتاج
الناتج من استخدام كل عناصر الانتاج

الانتاج المتوسط Average Total Product (ATP)
متوسط انتاجية العنصر المتغير أي الاانتاج الكلي مقسوما على عدد وحدات العنصر المتغير

الانتاج الحدي Marginal Product (MP)
هو مقدار التغير في الانتاج الكلي إذا تغيرت وحدات العنصر المتغير بوحدة واحدة

إذا رمزنا للانتاج بـ (Y) وللعنصر المتغير بـ (x):

$$AP = \frac{y}{x}$$

$$MP = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

مثال

معطي:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	3	6	10	13	15	16	16	15	13

احسب كلا من الانتاج المتوسط والحدي عند وحدات العنصر المتغير: ٤؛٧؛ ١٠

$$AP_{x=4} = \frac{10}{4} = 2.5\,units \,|\, MP_{x=4} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} = \frac{10-6}{4-3} = 4$$

$$AP_{x=7} = \frac{16}{7} = 2.29\,units \,\|\, MP_{x=7} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_7 - y_6}{x_7 - x_6} = \frac{16-15}{7-6} = 1$$

$$AP_{x=10} = \frac{13}{10} = 1.3\,units \,\|\, MP_{x=10} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_{10} - y_9}{x_{10} - x_9} = \frac{13-15}{10-9} = -2$$

تطبيقات اقتصادية:الايراد الكلي/المتوسط/الحدي

الايراد الكلي :Total Revenue(TR) :اجمالي
عائدات الوحدة الانتاجية من بيع منتجاتها.

الايراد المتوسط Average Revenue (AR)
حاصل قسمة الالايراد الكلي على الوحدات المباعة (يساوي سعر الوحدة في حالة المنافسة الكاملة)

الايراد الحدي Marginal Revenue (MR)
هو مقدار التغير في الايراد الكلي إذا تغيرت الوحدات المباعة بوحدة واحدة

إذا رمزنا للانتاج بـ (Y) ولسعر الوحدة من الانتاج بـ (p)

$$TR = p * y$$

$$AR = \frac{TR}{y} = \frac{p * y}{y} = p$$

$$MR = \frac{\Delta TR}{\Delta y} = \frac{d(py)}{y} = p$$

موقع المادة على شبكة الـ Internet

http://fac.ksu.edu.sa/kbashir

مادة «التحليل الكمي التطبيقي»

النسب والكسور :بعض التطبيقات الاقتصادية

النسب المئوية (percentage--%): تكون في صورة كسر أو عدد بجانب علامة (%) –بالمائة: مثلا: ٥% أو ٠,٠٥

مثال: حسب لوائح جامعة الملك سعود غياب ٢٥% من المحاضرات يعرض الطالب للحرمان: كم محاضرة يجب أن تغيب لكي تحرم من دخول الامتحان اذا فرض ان الفصل الدراسي به ٤٨ محاضرة؟

0.25x48=12

مثال: يعطي المحاضر خمس درجات حافز حضور وذلك بحسب نسبة حضورك للمحاضرات؛ اذا كانت نسبة غياب أحمد خلال الفصل ١٠%، كم درجته من حافز الحضور؟

(1 -0.1)x5=0.9x5=4.5

حصل حمد على علاوة انجاز قدرها ١٥% من راتبه الشهري البالغ ٣٠٠٠ ريال، كم يصير راتبه بعد العلاوة؟

(1+0.15)x3000=3450 SR

عمليات الكسور: fractions

الجمع والطرح:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

القسمة والضرب :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

مثال

أجر العمليات التالية

$$\frac{x}{x+3}+\frac{3x}{4+2x}$$

$$\frac{x(4+2x)+3x(x+3)}{(x+3)(4+2x)}=\frac{4x+2x^2+3x^2+9x}{(x+3)(4+2x)}=\frac{13x+5x^2}{(x+3)(4+2x)}$$

الكسور: تطبيقات

الميل **slope**: هو مقياس للتغير الذي يحدث في المتغير التابع (y) نتيجة للتغير في المتغير المستقل (x) أي مساهمة الوحدة الاضافية من المتغير المستقل. الميل بين أي نقطتين:

$$slope = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

here الميل: الاستهلاك والادخار

دخل ((Income (I)) المستهلك القابل للصرف يتوزع بين الاستهلاك ((Consumption (C)) والادخار (Savings (S)):

$$I = C + S$$

الزيادة في الدخل تؤدي الى زيادة كل من الاستهلاك والادخار.

من المهم معرفة نسب الزيادة في هذين المتغيرين (لماذا؟؟)

نسبة الزيادة في كل من الاستهلاك والادخار تعتمد على متغيرات كثيرة (مثل ماذا؟؟).

الميل الحدي للاستهلاك/الادخار

الميل الحدي للاستهلاك : Marginal Propensity to Consume

التغير اللحظي في الاستهلاك نتيجة تغيير طفيف في الدخل:

$$MPC = \frac{\Delta C}{\Delta I}$$

الميل الحدي للادخار: Marginal Propensity to Save

التغير اللحظي في الادخار نتيجة تغيير طفيف في الدخل:

$$MPS = \frac{\Delta S}{\Delta I}$$

تابع الميل الحدي

لاحظ الآتي حول قيم هذين الميلين:

$$0 \le MPC \le 1$$
$$0 \le MPS \le 1$$

أي زيادة في أحدهما تعني نقصا في الآخر أي أن العلاقة بينهما كالتالي:

$$MPC + MPS = 1$$

مثال: فيما يلي بيانات الدخل والادخار القومي لاحدى الدول

السنة	الدخل (مليون دولار)	الادخار(مليون دولار)
2016	2000	1500
2017	4000	3000

أحسب الميل الحدي لكل من الاستهلاك والادخار

الحل:

للعام 2016 الاستهلاك = 2000 – 1500 = 500

للعام 2017 الاستهلاك = 4000 – 3000 = 1000

$$MPC = \frac{\Delta C}{\Delta I} = \frac{C_{2013} - C_{2012}}{I_{2013} - I_{2012}} = \frac{1000-500}{4000-2000} = \frac{500}{2000} = 0.25$$

$$MPS = \frac{\Delta S}{\Delta I} = \frac{S_{2013} - S_{2012}}{I_{2013} - I_{2012}} = \frac{3000-1500}{4000-2000} = \frac{1500}{2000} = 0.75$$

المرونات Elasticities

- المرونة (Elasticity (E))هي مقياس لدرجة استجابة المتغير التابع (y) للتغير في المتغير المستقل (x) وتحسب بقسمة التغير النسبي في المتغير المستقل على التغير النسبي في المتغير التابع

$$E = \frac{\%\Delta y}{\%\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)/y_1}{(x_2 - x_1)/x_1} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \times \frac{x}{y} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \times \frac{x}{y}$$

مثال: اذا زاد سعر احدى السلع بـ5% وقل الطلب عليها بـ3% ،
أحسب مرونة الطلب للسعر

$$E = \frac{\%\Delta y}{\%\Delta x} = \frac{-3}{5} = -0.6$$

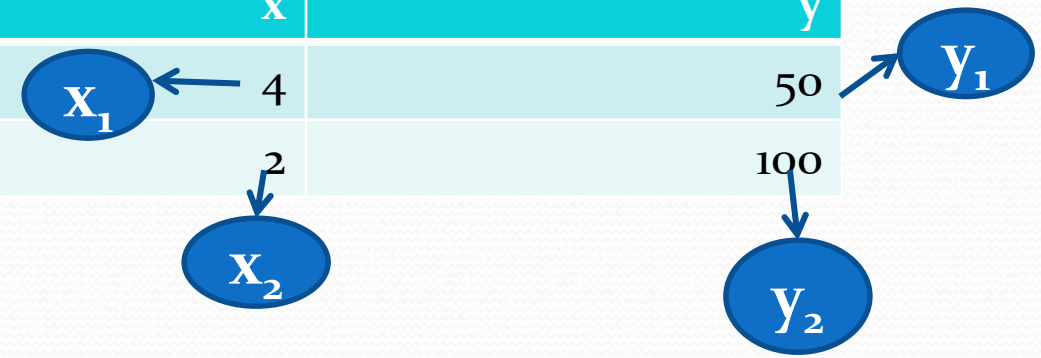
مثال

إذا تغير دخل المستهلك (I) من ٥ ألف إلى ٨ ألف ريال وتغير تبعا لذلك طلبه (Q_d) لإحدى السلع من 20 إلى 25 وحدة؛ أحسب مرونة الطلب بالنسبة للدخل؟

$$E_{QI} = \frac{(Q_{d2} - Q_{d1})/Q_{d1}}{(I_2 - I_1)/I_1} = \frac{(25-20)/20}{(8-5)/5} = \frac{1/4}{3/5} = \frac{1}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{12} = 0.42$$

مثال: من الجدول أدناه أحسب المرونة

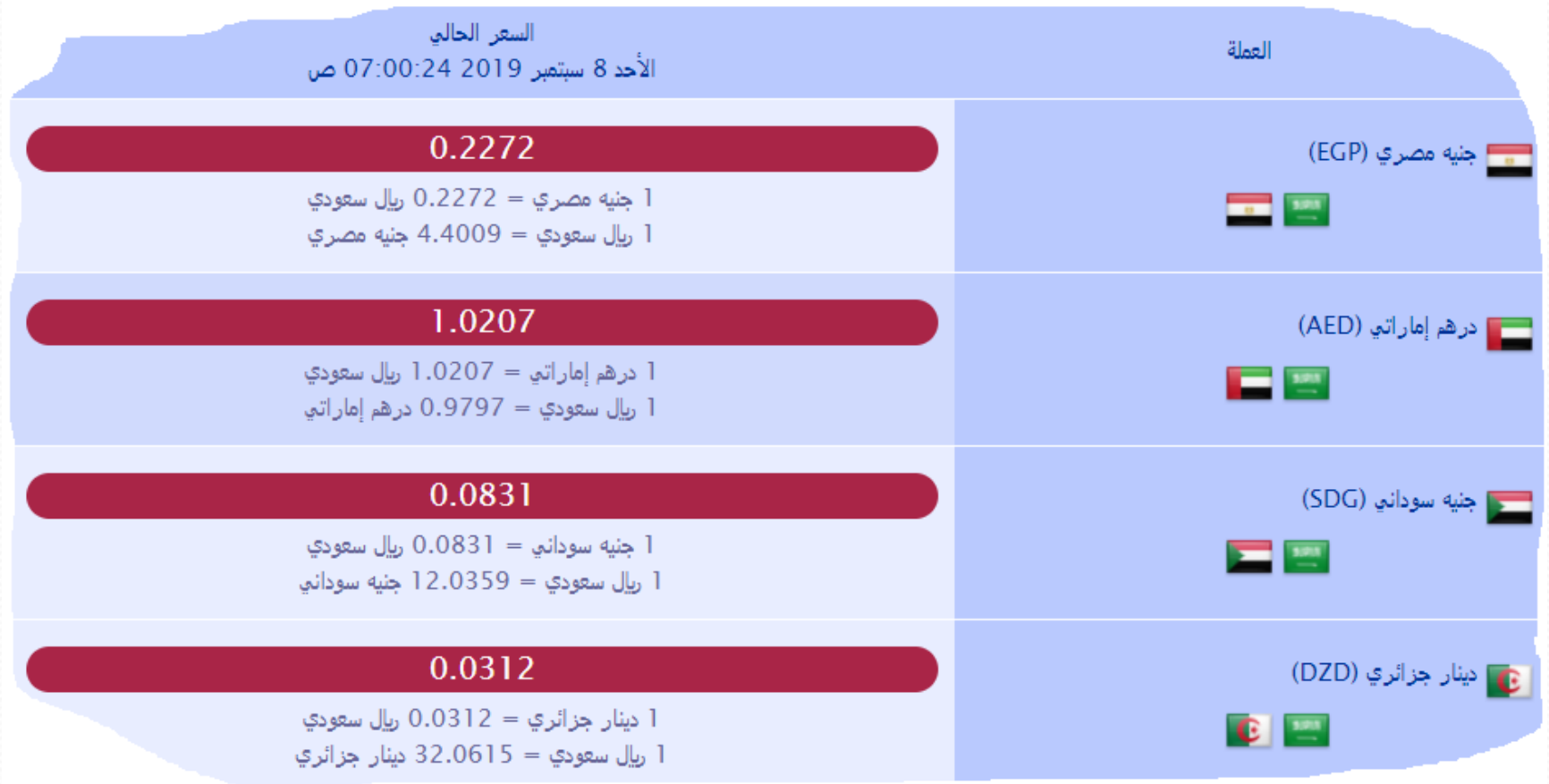
x	y
4	50
2	100



ملاحظات على المرونة

- المرونة من أهم المقادير الاقتصادية على الاطلاق
- لا تمييز للمرونة: يمكن مقارنة سلع مختلفة ومناطق جغرافية مختلفة.
- كلما زادت القيمة المطلقة للمرونة كانت السلعة أكثر مرونة

تطبيق: تحويل العملات



http://www.currency-price.com/currency-prices-saudi-arabia

تابع: تطبيق تحويل العملات

- للعملات SR و SDG اذا علم سعر صرف احداهما مقابل الاخرى يمكن بسهولة التحويل بينهما.
- مثال: اذا كان سعر صرف الريال السعودي 12.0359 أمام الجنيه السوداني، حول ألف جنيه سوداني الى ريالات سعودية.

$$1\,SR \Rightarrow 12.0359 SDG$$

$$x\,SR \Rightarrow 1000 SDG$$

بالضرب التبادلي:

$$1 \times 1000 = 12.0397x$$

$$\therefore x = {}^{1000}\!/_{12.0359} = 83.085\,SR$$

مثال

بلغت رسوم الاشتراك في دورة تدريبية 300 دولار امريكي (USD)؛ من البيانات أدناه احسب قيمة الرسوم بالريال السعودي (SR) واليورو (€) والين (¥).

العملة	السعر الحالي الأحد 8 سبتمبر 2019 07:00:24 ص
دولار أمريكي (USD)	3.7492 1 دولار أمريكي = 3.7492 ريال سعودي 1 ريال سعودي = 0.2667 دولار أمريكي
يورو (EUR)	4.1715 1 يورو = 4.1715 ريال سعودي 1 ريال سعودي = 0.2397 يورو
جنيه استرليني (GBP)	4.6057 1 جنيه استرليني = 4.6057 ريال سعودي 1 ريال سعودي = 0.2171 جنيه استرليني
دولار كندي (CAD)	2.8464 1 دولار كندي = 2.8464 ريال سعودي 1 ريال سعودي = 0.3513 دولار كندي
دولار أسترالي (AUD)	2.5675 1 دولار أسترالي = 2.5675 ريال سعودي 1 ريال سعودي = 0.3895 دولار أسترالي
ين ياباني (JPY)	0.0351 1 ين ياباني = 0.0351 ريال سعودي 1 ريال سعودي = 28.5221 ين ياباني

تطبيق: الزكاة

- أودع أحمد ١٠٠ ألف ريال في حسابه في ١٠/محرم ١٤٣٦ وفي ١/ ذو القعدة ١٤٣٩تذكر أنه لم يزكى، أحسب مقدار الزكاة الواجبة عليه؟

أولا الزكاة الواجبة ٢,٥% في السنة

ثانيا مضى ثلاث سنوات لم يزكي فيها أحمد

عليه تكون الزكاة الواجبة: ٠,٠٢٥*١٠٠٠٠٠*٣=٧٥٠٠ ريال

تطبيق: التحليل المالي

- يرتكز التحليل المالي على حساب وتحليل مجموعة من النسب المالية، منها:

النسبة	تعريفها
الهامش الكلي	(صافي الدخل (الربح))/الايراد الكلي)
العائد على الأصول	(صافي الدخل/اجمالي الأصول)
نسبة الدين	(اجمالي الدين/اجمالي الأصول)
معدل توزيع الأرباح	(توزيعات الأرباح/صافي الربح)
معدل الاحتفاظ بالارباح	(الأرباح المحتجزة/صافي الربح)

مثال

- لاحدى السنوات للمنشأة (س) بلغ صافي الربح ٩٥٠٠ ريال والايراد الكلي ٢١٢٥٦٠ ريال واجمالي الاصول ١٨٠٥٤٥ ريال كما بلغت الديون المستحقة على المنشاة ٣٠٠٠٠ ريال: أحسب كلا من النسب التالية: *الهامش الكلي؛ العائد على الأصول؛ نسبة الدين*

أولا: الهامش الكلي =(صافي الدخل (الربح))/الايراد الكلي)
=٩٥٠٠/٢١٢٥٦٠= ٠,٠٤٥
ثانيا: .....
ثالثا:.....

تطبيق: توزيع التركات (المواريث)

- تركت امرأة لورثتها (أب، أم، زوج، أبنان، بنت) مبلغ ١٠٠٠٠٠ ريال، كيف يتم توزيعها؟
  - يراعى التالي: السدس لكل من الأبوين، الربع للزوج، والباقي للأبناء (مع مراعاة للذكر مثا حظ الانثيين).
- الحل:

مجموع أنصبة الأبوين والزوج= ١/٦+١/٦+١/٤=٧/١٢

نصيب الأبناء=٥/١٢ (٢/١٢ لكل ولد و١/١٢ للبنت)

تقسم التركة لـ ١٢ سهما: كل سهم = ١٢/١٠٠٠٠٠ = ٨٣٣٣,٣٣

-كل من الأبوين سهممين (١٦٦٦٦,٦٧ ريال)

-الزوج ٣ أسهم (٢٥٠٠٠ ريال)

-كل ولد سهمين (١٦٦٦٦,٦٧ ريال)

-البنت سهم (٨٣٣٣,٣٣ ريال)

الدوال وتطبيقاتها الاقتصادية

قصر ٢١٦

د. كمال الدين علي بشير ابراهيم

- Edting to here

مفهوم الدالة

- قاعدة (قانون) محدد تربط بين مقدار (أو أكثر) متغير وآخر تابع.
- مثلا مساحة الدائرة ((Area (A)) تعتمد على نصف قطرها ((Radius (r)):
- فنقول:

$$A = \pi r^2$$

  - A و r هي متغيرات (π ثابت =؟؟).
  - المساحة (A) دالة لـ (أو في) نصف القطر (r)
  - هذه القاعدة (القانون) أو الدالة تعطي قيمة واحدة للمتغير (A) لكل قيمة للمتغير (r).
  - يسمى المتغير (A) تابعا (Dependent) والمتغير (r) مستقلا (Independent).

وبصورة عامة

- تكتب الدالة بين أي متغير تابع (y) وأي متغير مستقل (x) هكذا:
- وتقرأ: y equals f of x $y = f(x)$
- الحرف (f) هنا يشير الى (function) أي دالة.
- الصورة العامة توضح فقط أن هناك علاقة ما لكننا لا ندري كنه وطبيعة القانون الذي ينظم هذه العلاقة.
- فمثلا $y = x^2$ الة خاصة محددة من الدالة العامة أعلاه.

الصورة العامة	صور خاصة
$y = f(x)$ أو: ص = د(س)	ص+١٤ =٢س أو ص=س^{٢}+س أو: ...

يمكن تعريف الدالة رياضيا كالتالي:

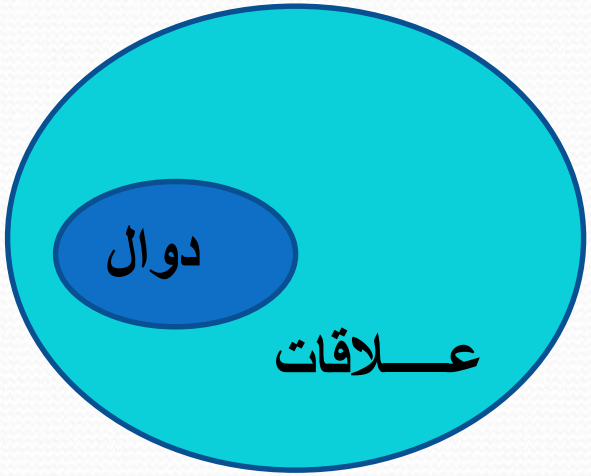
إذا كانت مل من x و y مجموعتين غير فارغتين (صفريتين)، فإن الدالة من x إلى y هي علاقة تربط كل عنصر من x بعنصر واحد فقط من y

اختبار سهل للدالة

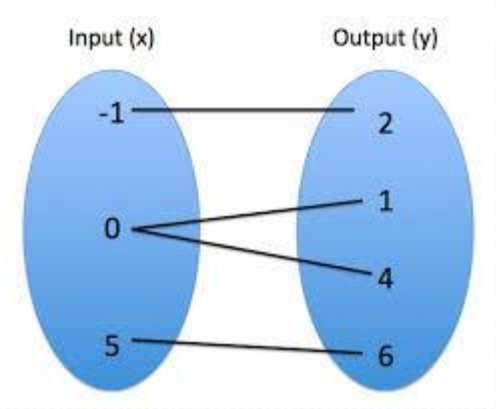
أي مجموعة من النقاط على المستوى الكارتيزي تمثل مسارا لدالة فقط إذا تحقق التالي:
عند رسم خط مستقيم أفقي فإنه يقطع ذلك المسار عند نقطة واحدة على الأكثر.

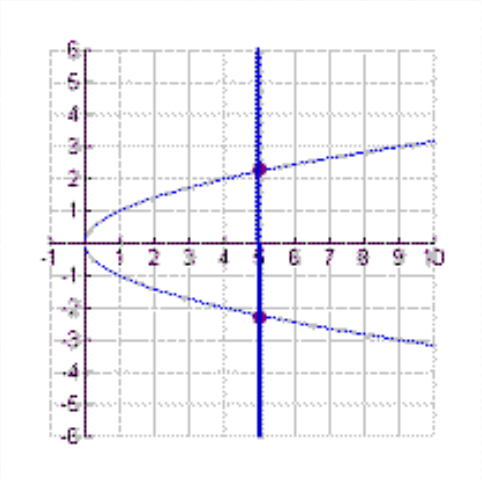
تمييز مهم: الدوال والعلاقات

- عندما يكون لكل قيمة تنتمي لمجموعة المتغير (x) *قيمة واحدة فقط تنتمي* لمجموعة المتغير (y) عندها فقط تكون (y) دالة في (x).
- أما إذا وجدت عدة قيم للمتغير (y) مقابل قيمة واحدة للمتغير (x) فيكون لدينا «علاقة» وليست دالة.
- بالتالي الدالة حالة خاصة من العلاقة: أي أن كل الدوال علاقات ولكن ليست كل العلاقات دوال.

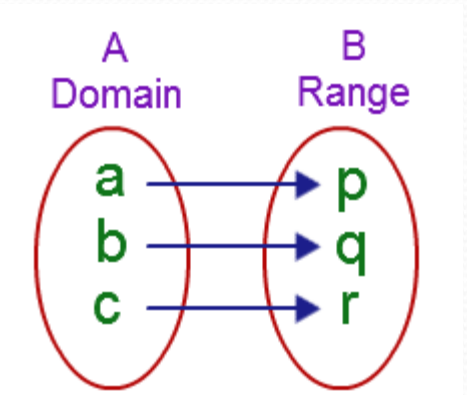


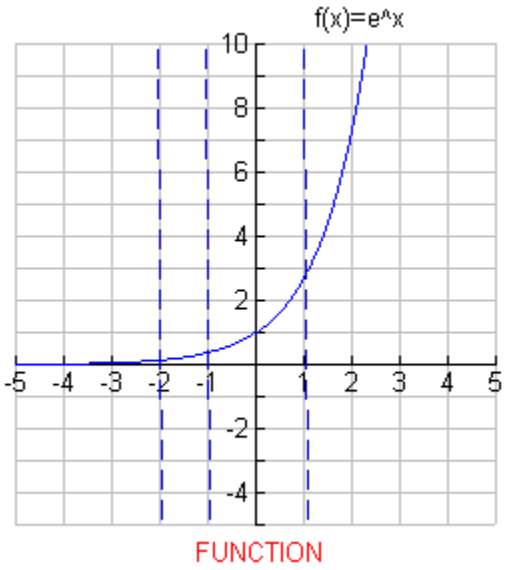
علاقة


Input (x)
Output (y)
-1
0
5
2
1
4
6

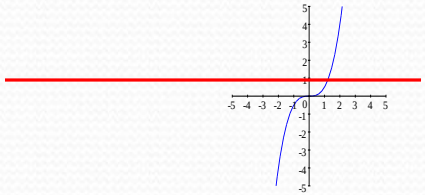


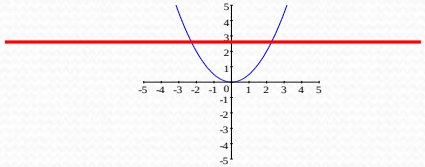
دالة

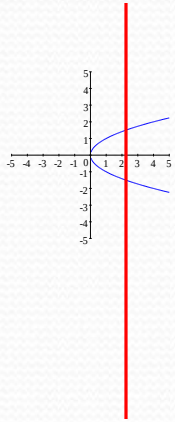

A
Domain
B
Range
a
b
c
p
q
r


f(x)=e^x
FUNCTION

ميز بين الرسومات التالية







$y = \frac{1}{2}x^3$

$y = \frac{1}{2}x^2$

$x = y^2$

دالة: واحد لواحد

دالة: ليست واحد لواحد

ليست دالة ليست واحد لواحد

التعبير عن الدالة

- توجد أربعة طرق للتعبيرعن الدالة:

1. لفظيا: الدالة كذا تربط بين كذا وكذا
2. رقميا (جدوليا): جدول يعطي القيم (الأزواج) المختلفة للمتغيرات.
3. بالرسم البياني
4. جبريا: صيغة رياضية

تمرين

المعادلة أدناه:

1. هل تمثل دالة؟ لماذا؟
2. ما هي نطاقات قيم المتغيرات ؟

$$f(x) = \sqrt{x}$$

أساسيات رسم بياني (مراجعة)

- يمكن تمثيل أي نقطة على المستوى (Cartesian)(ذو البعدين) .
- النقطة على ذلك المستوى تمثل بإحداثيين: الاحداث السيني (المحور الأفقي) والاحداث الصادي (الرأسي).
- المحورين يقسمان المستوى ألى أربعة أرباع: الأول، الثاني، الثالث والرابع
- تختلف اشارات إحداثي النقطة بحسب الربع الذي تقع فيه؟؟
- النقطة و(٠،٠) حيث يتقاطع المحوران تعرف بنقطة الأصل.
- الاحداث الصادي لكل نقطة على المحور السيني = صفر
- الاحداث السيني لكل نقطة على المحور الصادي = صفر

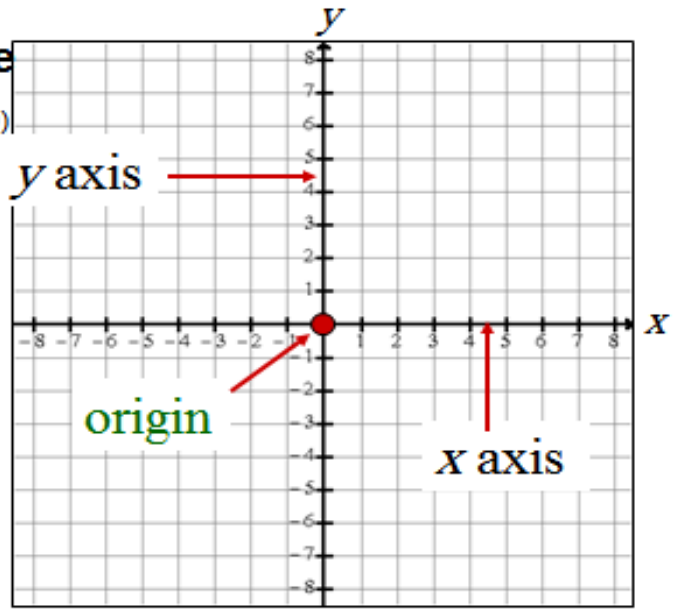
تابع

- الاحداث الصادي لأي نقطة هو بعدها من المحور السيني
- الاحداث السيني لأي نقطة هو بعدها من المحور الصادي

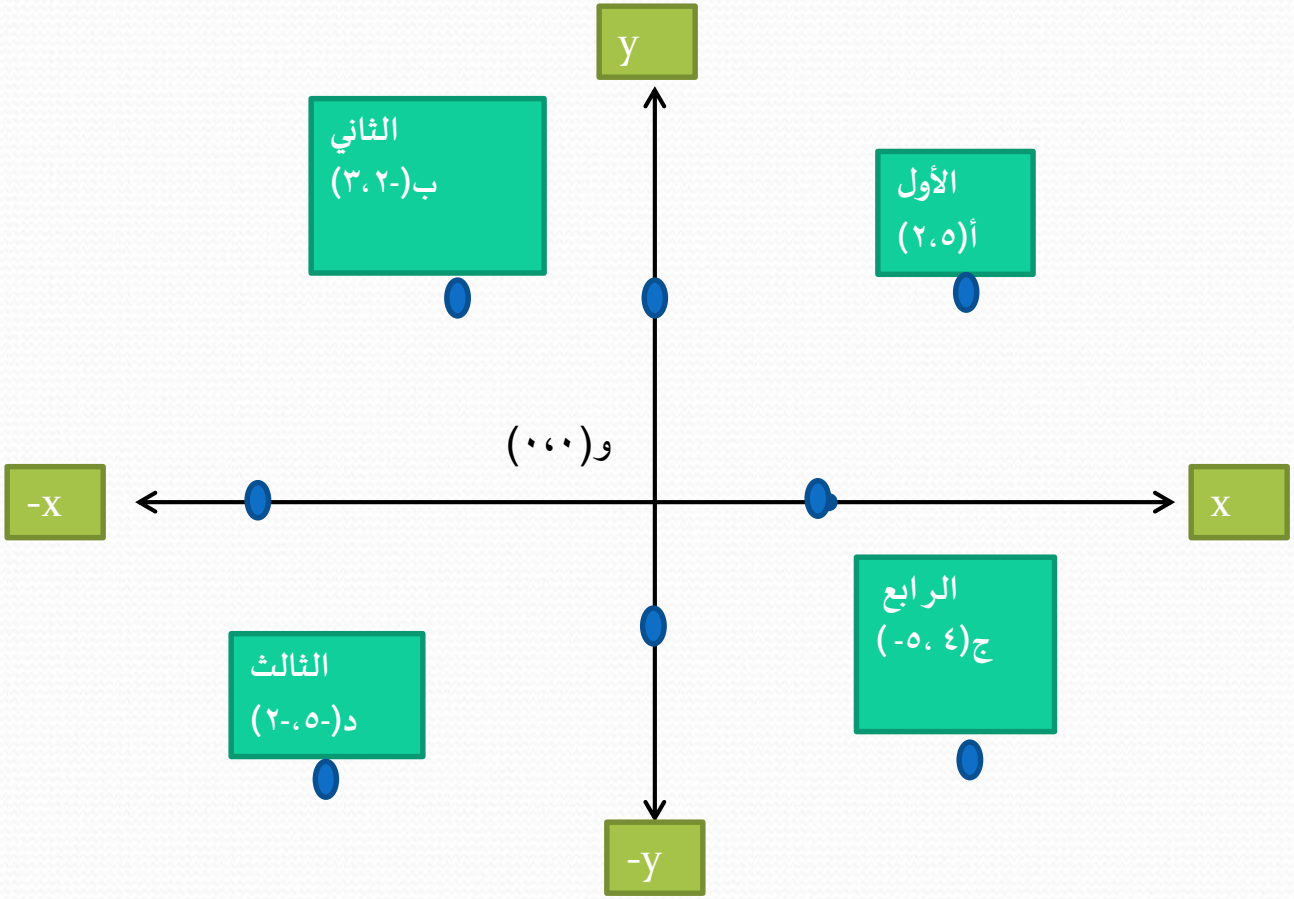
Points and their Coordinates

Cartesian Plane

René Descartes (1596-1650)



الأحداثين



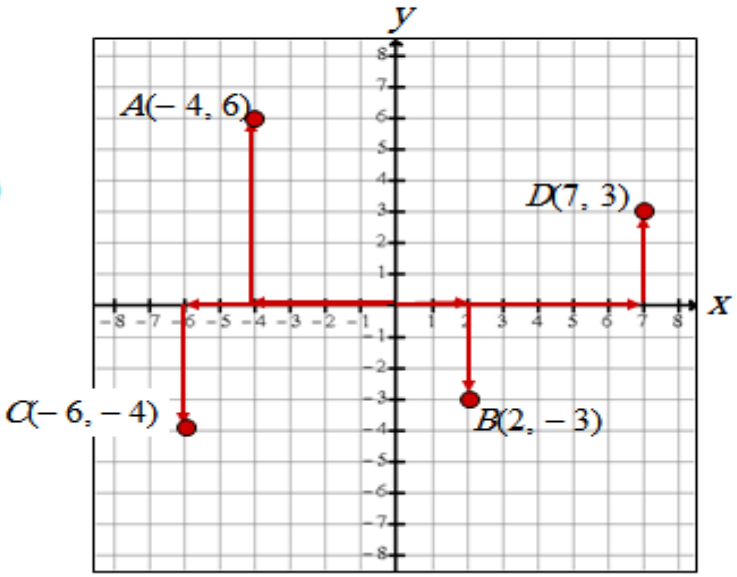
أرسم النقاط التالية: ملاحظاتك؟

$A(-4, 6)$

$B(2, -3)$

$C(-6, -4)$

$D(7, 3)$



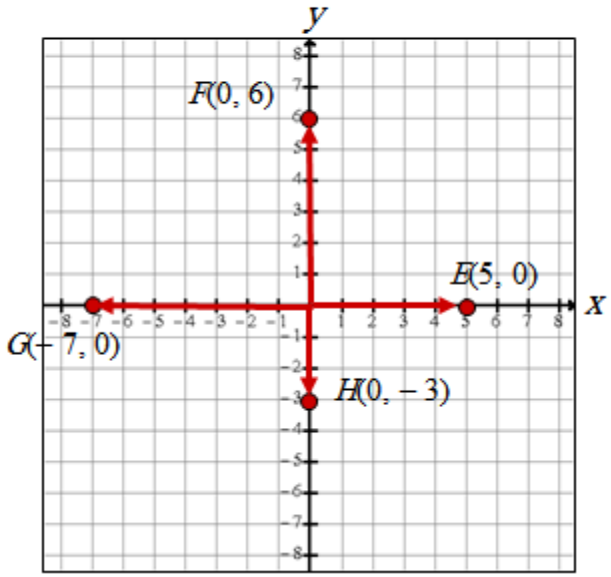
أرسم النقاط التالية: ملاحظاتك؟

E(5, 0)

F(0, 6)

G(– 7, 0)

H(0, – 3)



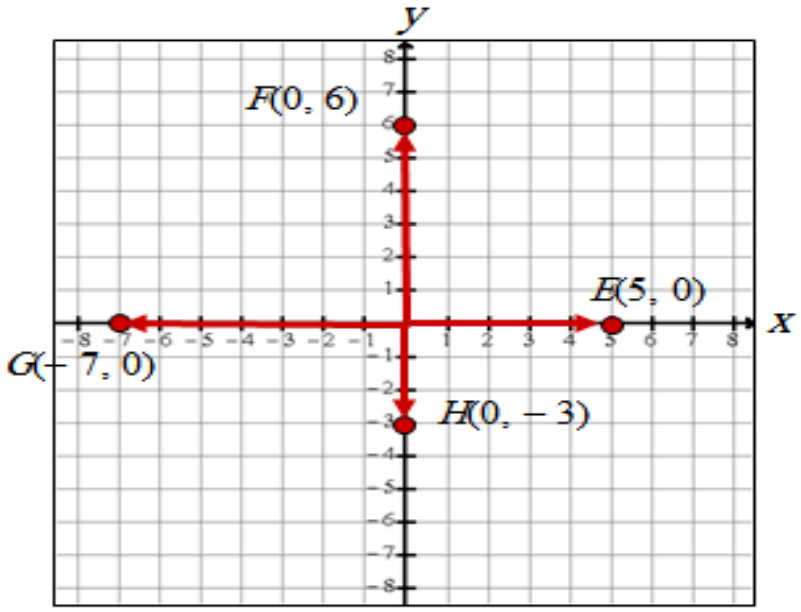
أرسم النقاط التالية: ملاحظاتك؟

E(5, 0)

F(0, 6)

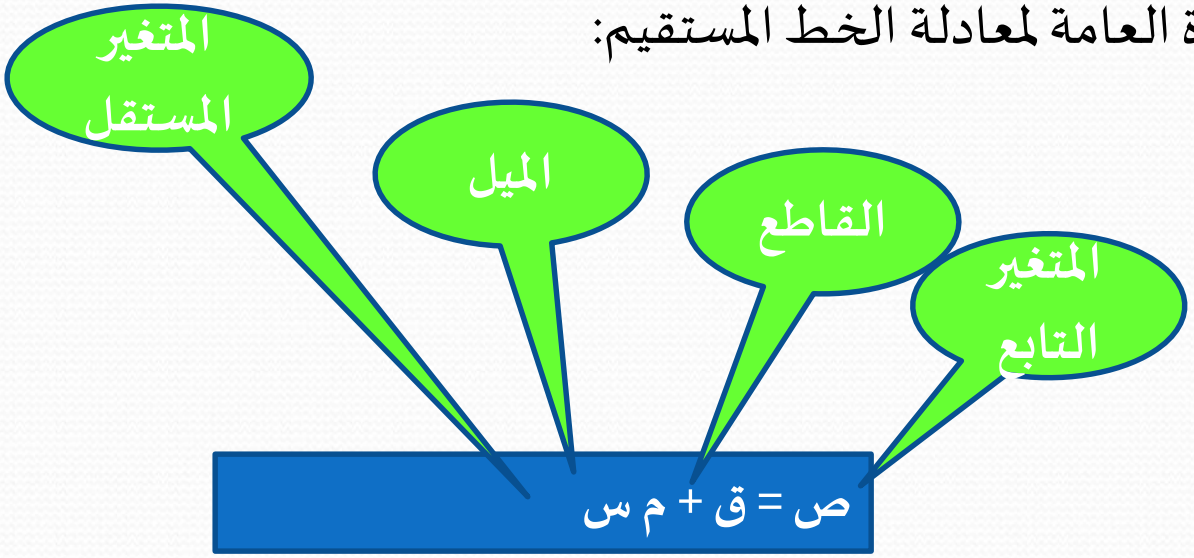
G(– 7, 0)

H(0, – 3)



الدالة الخطية (معادلة الخط المستقيم)

- الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم:



لاحظ :

- يشترط: (ق،م) عددان حقيقيان، م≠ صفر
- هذه معادلة من الدرجة الأولى أي أن أس (س) هو الوحدة
- القاطع يعطي قيمة ص عند س= صفر

أمثلة

- ص = د(س) = ٧ – ٥س (ق = ٧ ، م = - ٥)
- ص = د(س) = -٢١ + ٣س (ق = -٢١ ، م = ٣)
- ص = د(س) = س (ق = صفر، م = ١)

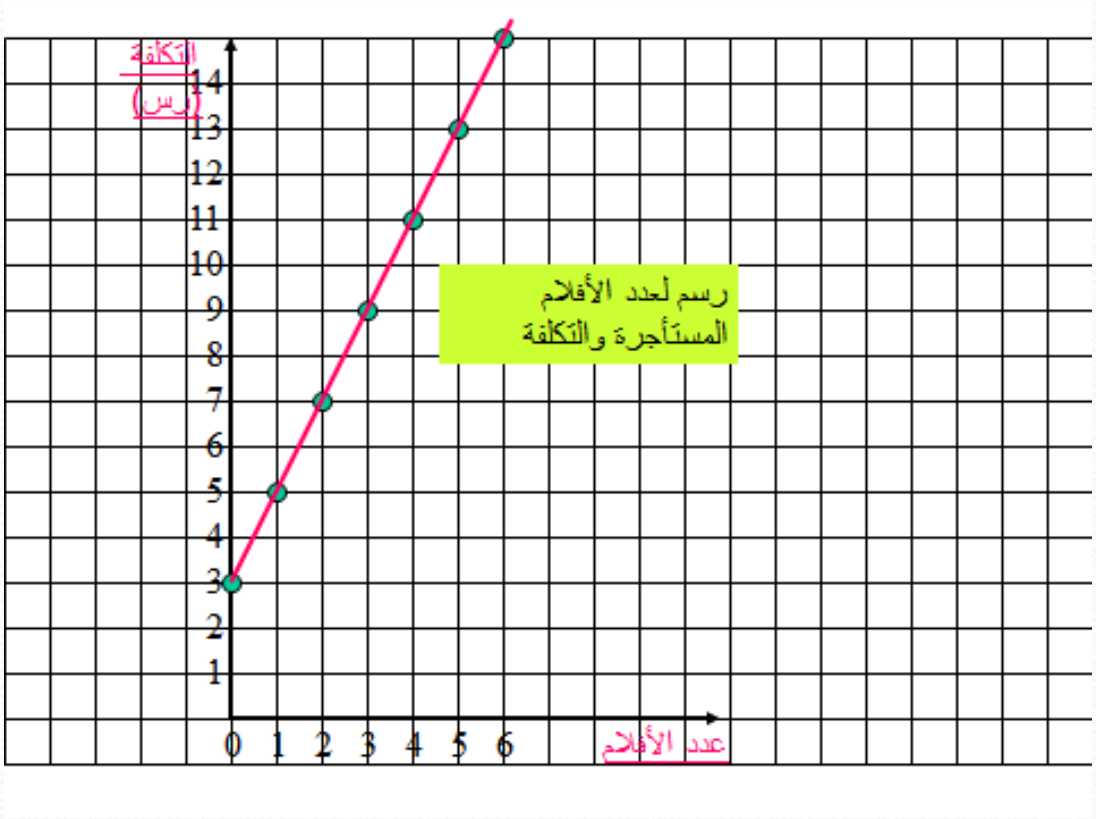
- ما رأيك في: ص = د(س) = ٦
  - (ق = ٦ ، م = صفر)
- هذا ليس خطا مستقيما و إنما فقط نقطة على المستوى (أو خط أفقي يمثل علاقة حيث كل قيم س تعطي نفس القيمة لـ ص)

مثال

انضم (أحمد) لناد للمشاهدة ودفع ٣ ريال رسم عضوية على أن يدفع ٢ ريال في كل مرة يستأجر فيها فيديو. الجدول يوضح تكاليف أحمد لمرات مختلفة.

مرات الاستخدام	0	1	2	3	4	5	6
التكلفة (ريال)	٣	٥	٧	٩	١١	١٣	١٥

مثل البيانات على الجدول برسم بياني


التكلفة
(ر.س)
14
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0 1 2 3 4 5 6
عدد الأفلام
رسم لعدد الأفلام
المستأجرة والتكلفة

تمرين

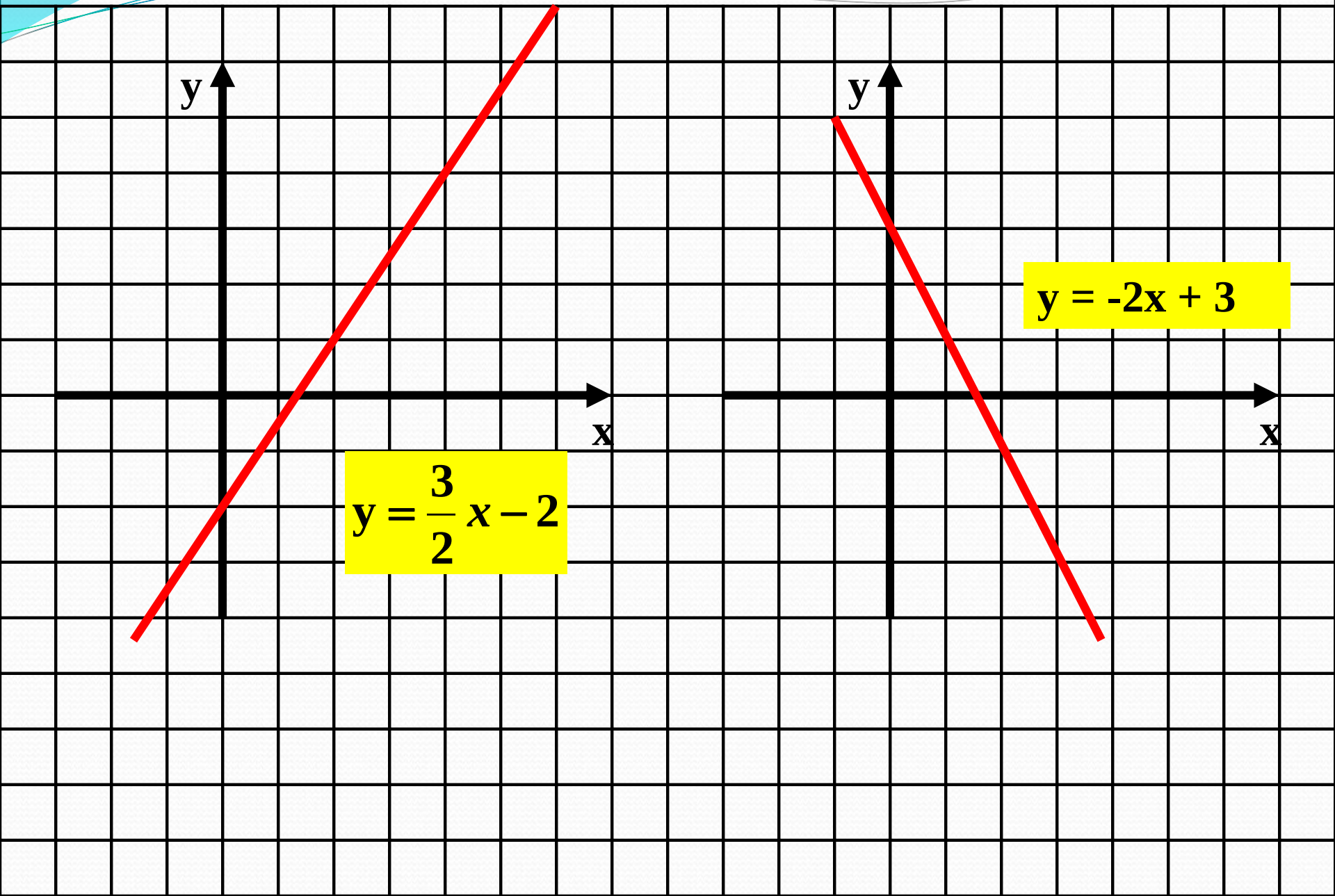
- ص = ق + م س

نلاحظ:

- ق هي قيمة (ص) عندما تكون قيمة المتغير المستقل (س) مساوية للصفر
- م تعطي مقدار التغير في قيمة (ص) عندما تتغير (س) بوحدة واحدة.

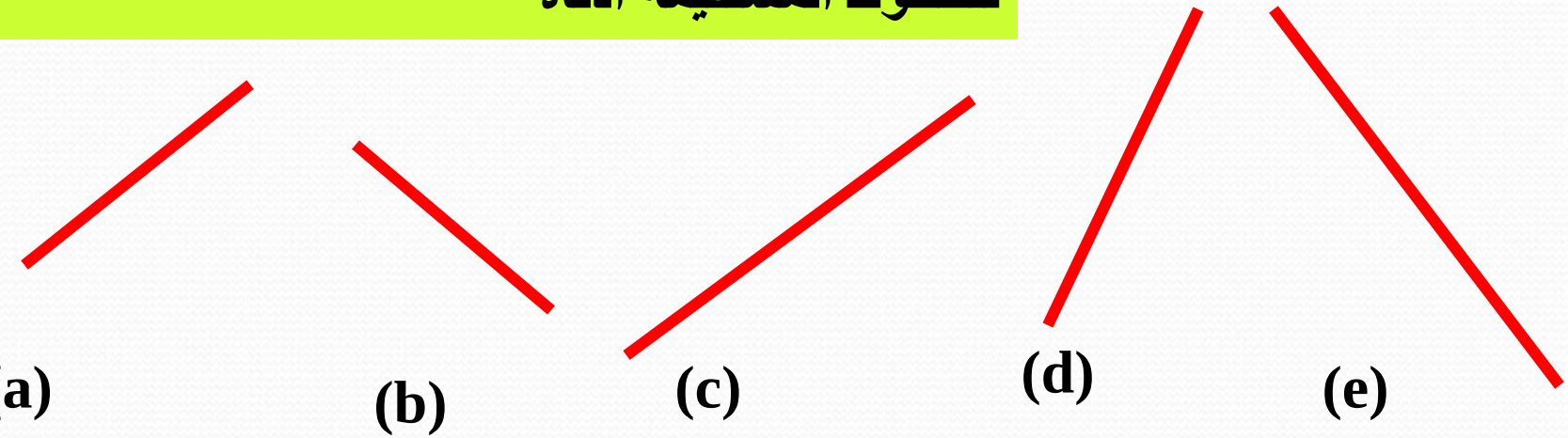
برهن ذلك عمليا ورياضيا؟؟؟؟

مالفروقات بين الخطين؟؟؟؟؟



الميل سالب/موجب؟

للخطوط المستقيمة أدناه



هل يمكنك تقسيمهم لمجموعتين؟ مالأساس للتقسيم؟

(c) (a) و (d) تنحدر من أسفل أعلى من اليسار لليمين — ميل موجب

(b)و (e) تنحدر من أعلى لأسفل من اليسار لليمين — ميل سالب

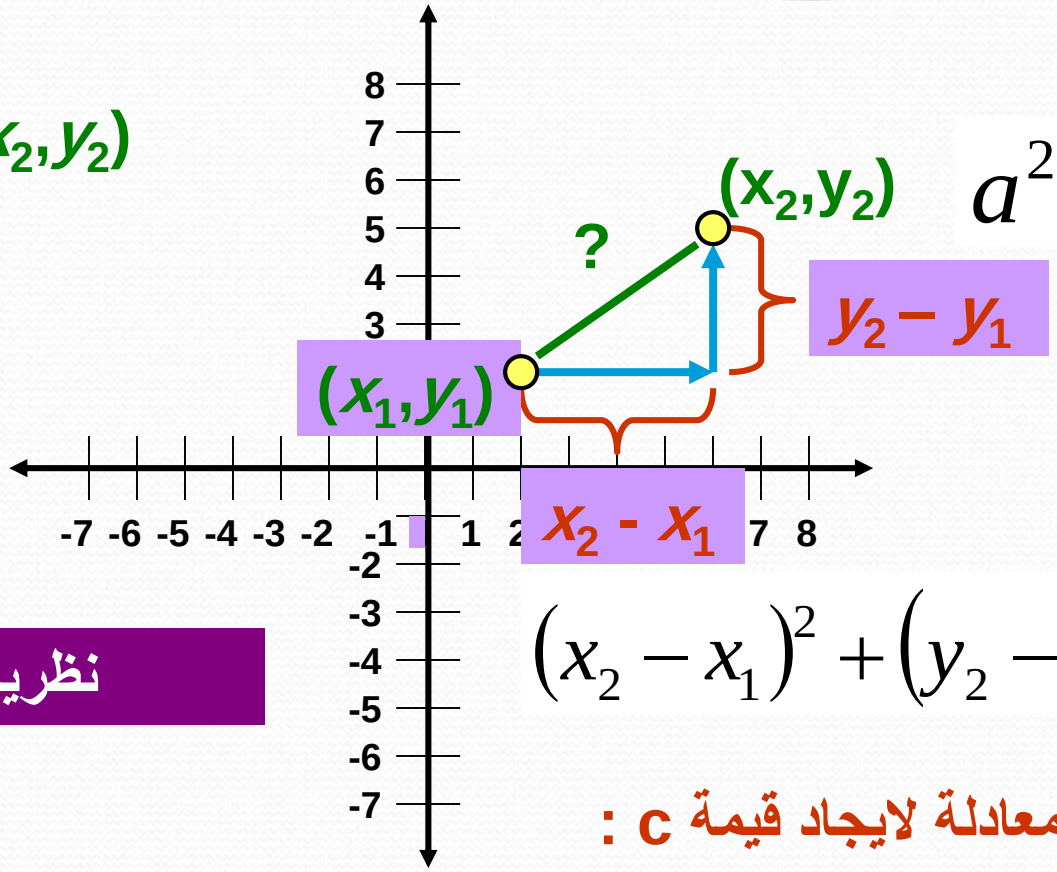
البعد بين نقطتين وميل الخط الواصل بينهما

- للنقطتين (x_1,y_1) و (x_2,y_2) يمكن حساب المسافة بينهما من القانون:

$$ab = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

المسافة بين نقطتين

للنقطتين (x_1,y_1) , (x_2,y_2)



$$a^2 + b^2 = c^2$$

نظرية بايثاغورس

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = c^2$$

نحل المعادلة لايجاد قيمة c :

$$c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

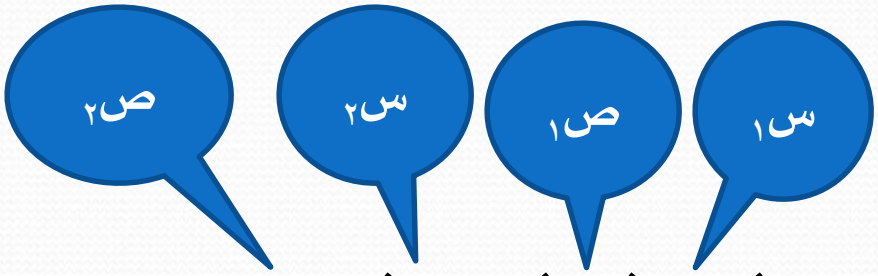
نكمل المثلث قائم الزاوية برسم الاضلاع

هذا هو قانون المسافة

ميل الخط بين نقطتين

من الرسم السابق فإن ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين (x_1,y_1) و (x_2,y_2) هو:

$$slope = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$



- للنقطتين: (-١،٣) ، (٤، ١٥):

- أحسب المسافة بينهما
- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بينهما

مثال

- الحل

1. المسافة بين نقطتين = ((س٢-س١)^{٢} +(ص٢-ص١)^{٢}) ^{½}

= ((٤-(-١)) ^{٢} +(١٥-٣)^{٢}) ^{½} = (٢٥+١٤٤) ^{½} = ١٦٩ ^{½} =١٣ وحدة مساحة

2. ميل الخط المستقيم الواصل بينهما م = (ص٢-ص١) / (س٢-س١)

=(١٥-٣) / (٤-(-١)) = ١٢ / ٥ = ٢,٤

(أرسم رسم تقريبي للخط؟؟)

الدالة الخطية بمعلومية نقطتين

- بمعلومية النقطتين: $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ يمكن كتابة معادلة الخط المستقيم AB كالتالي:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين: (٣،٥) و (٢،١)

الدالة الخطية بمعلومية الميل ونقطة واحدة

- المستقيم الذي ميله (م) ويمر بالنقطة $(س_١، ص_١)$ تكون معادلته كالتالي:

$$ص - ص_١ = م(س - س_١)$$

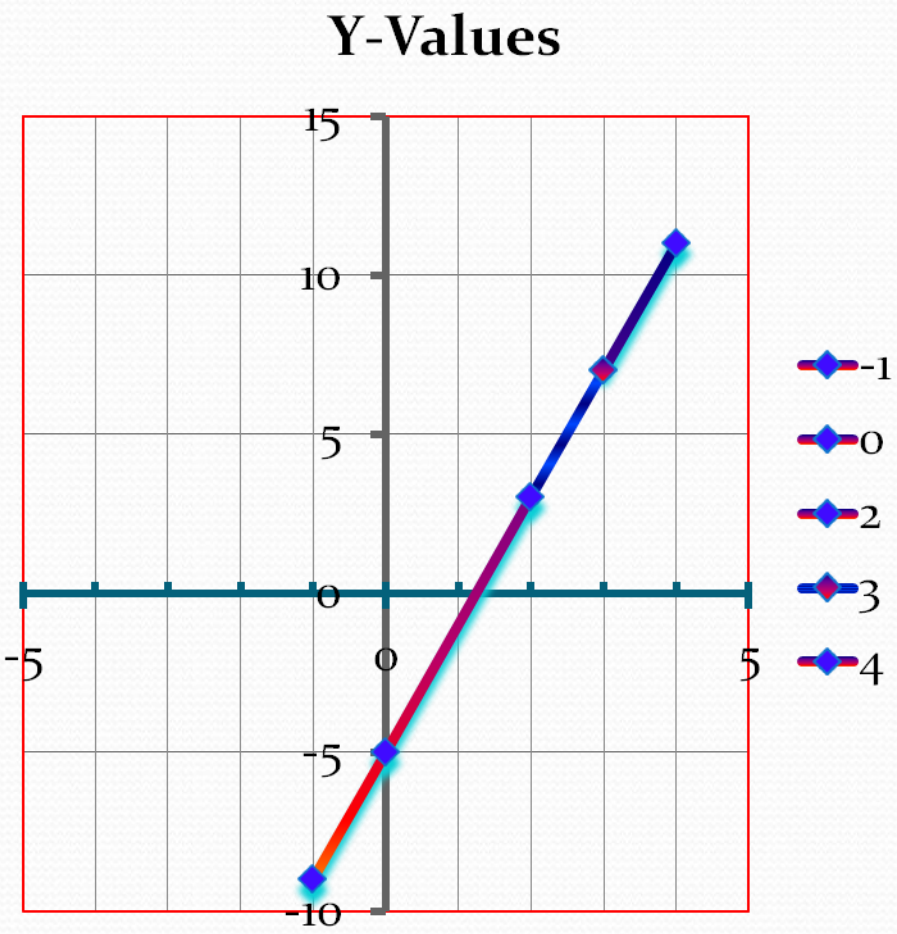
- أوجد معادلة المستقيم الذي يصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية ظلها (-٣) ويمر المستقيم بالنقطة (٣،-٢)

تمثيل الدالة الخطية بيانيا

- يتم ذلك كالآتي:
  - افتراض قيم للمتغير المستقل (س)
  - ومن ثم ايجاد قيم (ص) المناظرة،
  - وهكذا يكون لدينا عدة نقاط (احداثيات) تقع على المستقيم.
  - وبرسم هذه النقاط على المحورين بيانيا وتوصيلها ينتج الخط المستقيم المعطى معادلته.

- مثال: ارسم الدالة ٤س – ص – ٥ = صفر
  -

٤س – ص – ٥ = صفر ⟵ ص = ٤س – ٥



س	ص
١-	٩-
٠	٥-
٢	٣
٣	٧
٤	١١

مثال

- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته $2x+4y-7=0$

تطبيقات على الدالة الخطية

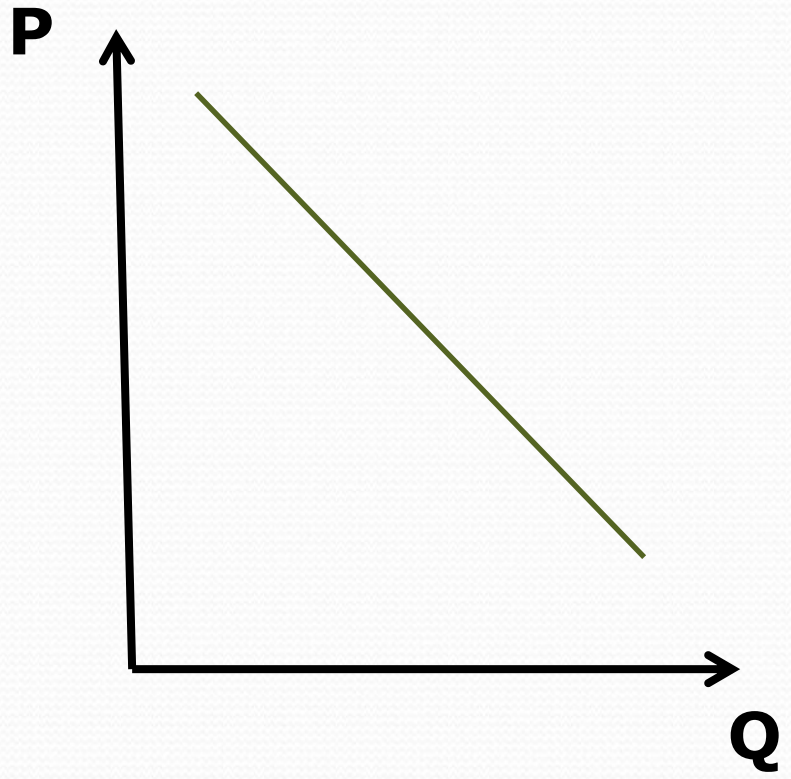
- دالة الطلب: ماهو الطلب؟ الكميات التي يرغب ويستطيع المستهلكون شراءها من السلعة في فترة معينة عند أسعار مختلفة.
- محددات الطلب: أي مجموعة العوامل المؤثرة عليه سلبا أو ايجابا وهي: (P, P_o, I, Pop, T)
- بالتالي يمكن اعتبار الكمية المطلوبة (Q_d) متغيرا تابعا والعوامل المؤثرة على الطلب متغيرات مستقلة
- يمكن التعبير عن الطلب كدالة في تلك المتغيرات المستقلة
- ويمكن التعبير عن دالة الطلب رياضيا كالآتي:

$$Q_d = f(P, P_o, I, Pop, T, E)$$

محددات الطلب

symbol	name
Q_d	Quantity demanded
P	Price (-)
P_o	Price of other goods (substitutes (+)/complements (-))
I	Income (+/-)
Pop	Population (+)
T	Taste (+)
E	Consumers' Expectations (+)

- دالة الطلب



- بافتراض ثبات كل العوامل السابقة ما عدا سعر السلعة يمكن الطلب كدالة في السعر كالآتي:

$$Q_d = f(P)$$

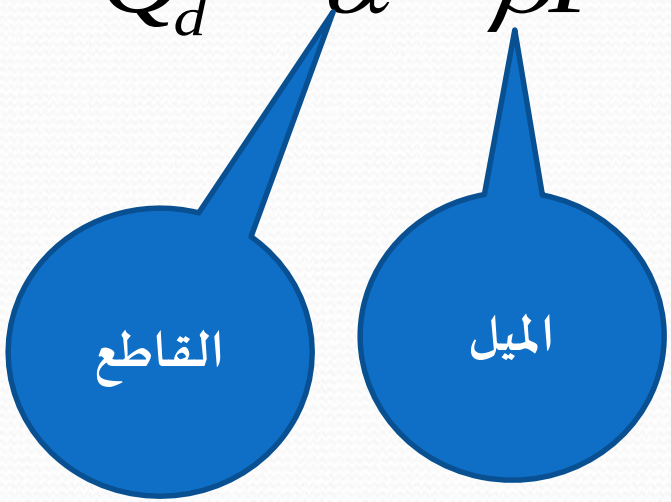
- وبحسب قانون الطلب توجد علاقة عكسية بين الكمية المطلوبة والسعر أي:

$$\frac{dQ_d}{dP} < 0$$

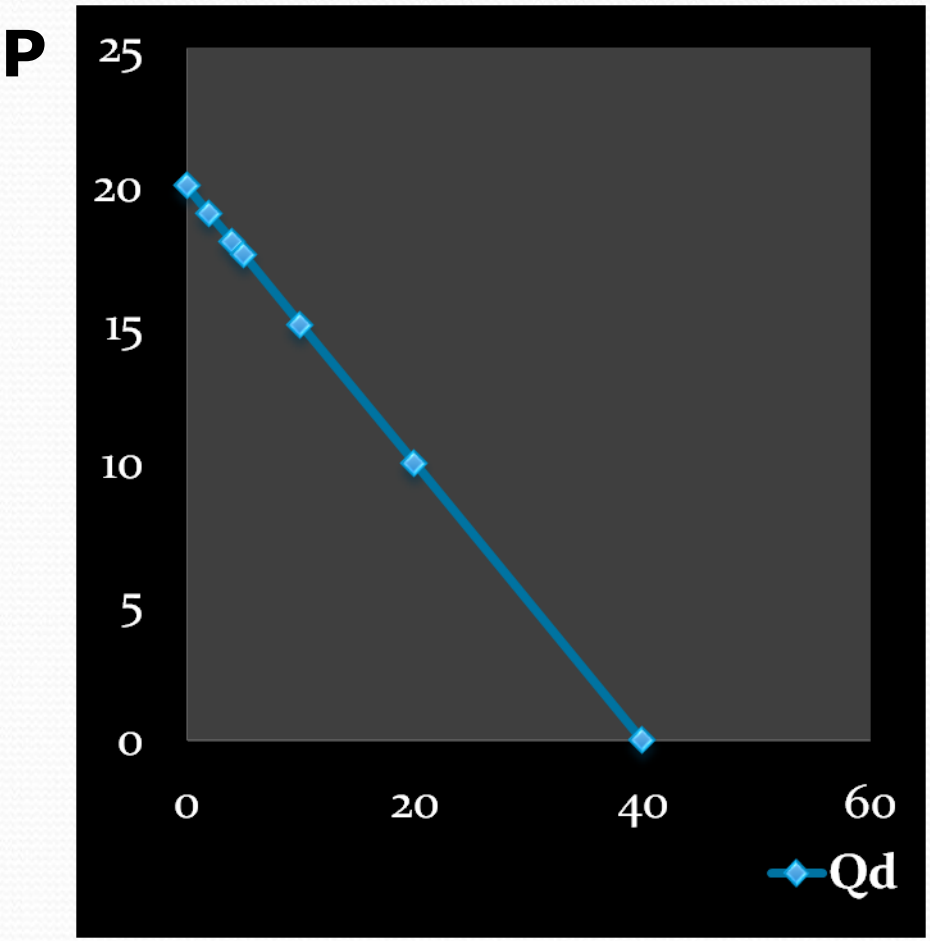
دالة الطلب الخطية

- يمكن كتابة الصيغة العامة لدالة الطلب الخطية كالتالي:

$$Q_d = \alpha - \beta P$$



لدالة الطلب: $Q_d = 20 - 0.5P$



P	Q_d
0	20
2	19
4	18
5	17.5
10	15
20	10
40	0

مثال

- العلاقة بين الكمية المطلوبة (Q_d) والسعر (P) لسلعة ما بالرياض خطية بحيث عندما كان السعر ١٥ ريال تم بيع ٢٠ وحدة وعندما انخفض السعر الى ١٠ ريال بيعت ١٠٠ وحدة:

- أوجد الدالة الخطية للطلب على هذه السلعة؟
- ماهي الكمية المطلوبة عند السعر ١٢ ريال؟

الحل

وبتطبيق قانون معادلة الدالة الخطية بمعلومية نقطتين يمكن ايجاد دالة الطلب بكل يسر:

$$\frac{Q-Q_1}{P-P_1}=\frac{Q_2-Q_1}{P_2-P_1}$$

$$\frac{Q-20}{P-15}=\frac{100-20}{10-15}=-16$$

$$Q-20=-16P+240$$

$$Q=260-16P$$

والآن ماهي الكمية المطلوبة عند السعر١٢ ريال؟

أمثلة أخرى

1. عند السعر ٥ ريال للوحدة كان الطلب لاحدى السلع ١٠٠ وحدة، فاذا علم أن دالة الطلب لهذه السلعة خطية وميلها يساوي ٤ : أوجد معادلة الطلب؟

2. معطى دالة الطلب: $Q = 6000 - 2P$:
   - أشرح طبيعة ومدلولات هذه الدالة
   - أوجد السعر الذي يحقق مبيعات بحجم ١٠٠٠ وحدة من هذه السلعة .

تطبيقات اقتصادية أخرى للدوال الخطيةhere

- دالة العرض : الكمية المعروضة (Q_s) دالة في السعر (p) ، أسعار عناصر الانتاج (r) ، أسعار السلع المنافسة (p_c) ، عدد المنتجين (N) ، وعوامل أخرى (O) .

$$Q_s = f(p, p_c, r, N, O)$$

- وفي الغالب التطبيقي نجد دالة العرض هكذا (بافتراض ثبات كل العوامل الأخرى):

$$Q_s = f(p)$$

- دالة العرض دالة خطية
- توجد علاقة طردية بين (Q_s) و (p).
- يمكن التعبير عنها كالتالي:

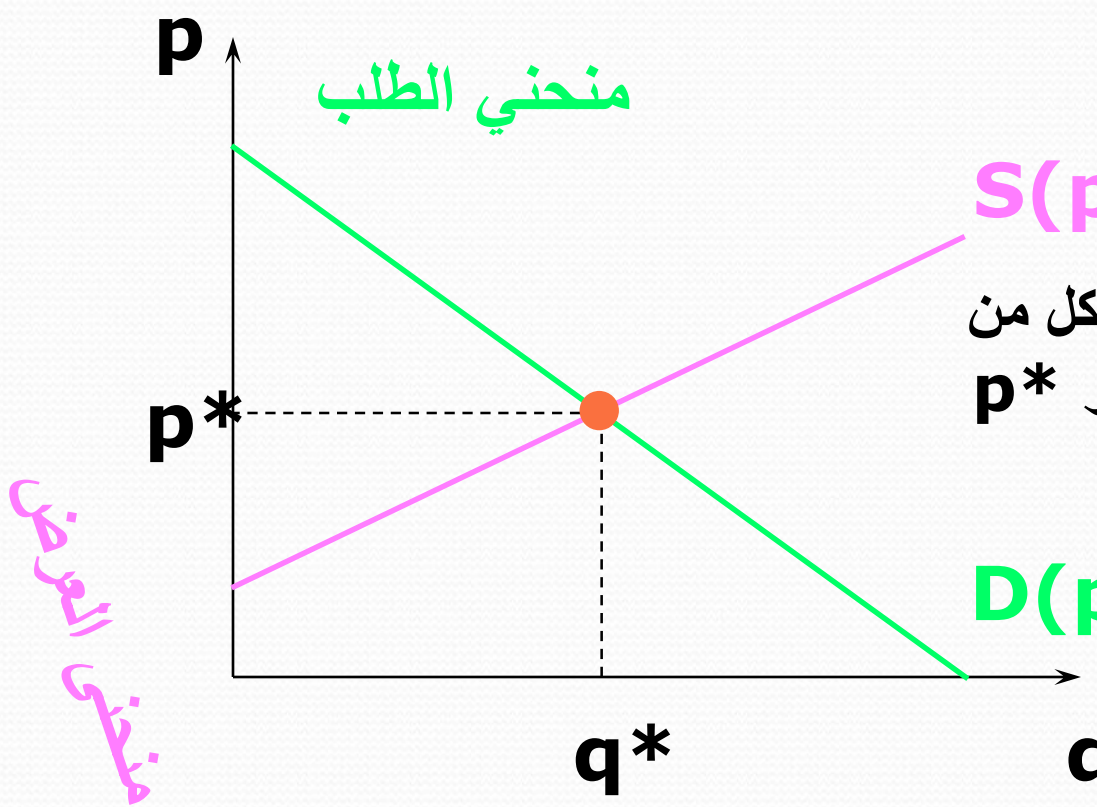
$$Q_s = a + bP$$

- مثال: الكمية المعروضة من السلعة (ص) وسعرها (ع) مرتبطان بعلاقة خطية بحيث إذا كان السعر ٤٠ ريالا للوحدة يتم عرض ٢٠ طن من السلعة وإذا كان السعر ١٦٠ ريالا يتم عرض ١٠٠ طن من السلعة. المطلوب
  - أوجد دالة العرض ؟
  - أحسب سعر البيع إذا بلغت الكمية المعروضة ٢٠٠ طن؟

ايجاد سعر وكمية التوازن في السوقhere

- التوازن نقطة تعادل الطلب والعرض في السوق وعندها يتحدد الكمية والسعر التوازنيين.
- يمكن ايضا ايجاد نقطة التوازن:
  - بيانيا: يتحدد التوازن عند تقاطع منحني الطلب والعرض للسوق.
  - رياضيا (جبريا) بحل معادلتي الطلب والعرض.

توازن السوق بيانيا



$S(p) = c+dp$

ماهي قيم كل من
q^* و p^*?

$D(p) = a-bp$

توازن السوق جبريا

- اذا كانت دالتي الطلب والعرض لسوق إحدى السلع كالآتي:
  - العرض: ض = ٦س + ١٠
  - الطلب: ط = ٥٠ – ٢س
- أوجد سعروكمية التوازن

الحل

عند التوازن يتساوى العرض والطلب: ض = ط

أى: ٦س + ١٠ = ٥٠ – ٢س وبضم الحدود المتشابهة :

٨س = ٤٠ ⟸ س = ٥ وحدة نقد؛ وبتعويض قيمة س في احدى المعادلات:

ض = ٦*٥ + ١٠ = ٤٠ وحدة

- Test2_2_43_ stu. 17/4/2022

دوال التكاليف والانتاج

- دالة الانتاج صيغة رياضية توضح العلاقة بين:
  - المخرجات (كمية السلعة أو الخدمة المنتجة – المتغير التابع (y)) .

و

  - المدخلات (كمية عناصر الانتاج – المتغيرات المستقلة: $(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$
- ويمكن التعبير جبريا عن دالة الانتاج كالتالي:

$$y = f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$$

- يمكن صياغة هذه الدالة لكل من:
- المدى القصير: بعض عناصر الانتاج يمكن تغييرها والبعض (واحد على الأقل) ثابت
- المدى الطويل: كل عناصر الانتاج يمكن تغييرها

تابع دوال الانتاج

- فمثلا بافتراض وجود ثلاث عناصر: رأس المال (K) العمل (L) والأرض (A) وباعتبارثبات عنصر الأرض في المدى القصير، تكون الدالة في المدى القصير هكذا:

$$y = f(K,L)$$

- وكما سبق يمكن تعريف كل من الناتج الحدي/المتوسط لهذه الدالة.

دوال التكاليف

- يمكن تعريف التكاليف لكل من المدى القصيروالطويل.
- التكاليف الكلية للانتاج (Total Cost TC) هي مجموع:
  - التكاليف الثابتة الكلية (Total Fixed Cost TFC)
  - و
  - التكاليف المتغيرة الكلية (Total Variable Cost TVC) :
  - $TC = TFC + TVC$
- كل مكون من هذه التكاليف يعتمد على حجم الانتاج وبالتالي هو دالة في حجم الانتاج: $TC = f(y)$
- يمكن لهذه الدالة أن تأخذ صيغا رياضية مختلفة: الخطية؟ التربيعية؟ التكعيبية؟؟

دوال الاستهلاك والادخار

- كما تقدم:
- كل من الاستهلاك والادخار القوميين-- دالة في (يعتمد على) الدخل القومي القابل للصرف.
- هذه الدوال خطية

الدوال غير الخطية

- إذا كانت قوة المتغير المستقل أعلى من الدرجة الأولى (١<) تكون الدالة ص = د(س) غير خطية.
- تسمى الدالة بأكبر أس (قوة) فيها: (تربيعية، تكعيبية، فما فوق).
- الصورة العامة: الدالة $y=f(x)$ دالة من كثيرة الحدود من الدرجة (n):

$$y = f(x) = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$$

- $(a_o, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ أعداد حقيقية
- متى تكون هذه الدالة خطية؟ تربيعية؟ تكعيبية؟ من الدرجة العاشرة؟

الدالة التربيعية (معادلة من الدرجة الثانية):

- حالة خاصة من الدوال غير الخطية، كيف؟؟؟
- الصورة العامة: $ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$
- هذه معادلة في مجهول واحد (x)
- مالشرط اللازم لتكون هذه الدالة من الدرجة الثانية؟
- a هو معامل (x^2)؛ (b) هو معامل (x) ؛ (c) هو الحد المطلق.

حل المعادلة من الدرجة الثانية (د. علاء)

- حل أي معادلة يعني ايجاد قيمة المجهول فيها: (x) هنا.
- قيم (x) التي تحقق المعادلة تعرف بجذري المعادلة.
- توجد طرق عدة منها:
  - طريقة التحليل:
  - طريقة اكمال المربع
  - طريقة القانون

طريقة التحليل:

- أوجد جذري المعادلات بطريقة التحليل:
- $x^2 - 2x - 15 = 0$
- $x^2 - 8x + 15 = 0$
- $3x^2 - 4x - 15 = 0$
- هل يمكنك استنتاج بعض الضوابط لاختيار الجذور؟

طريقة اكمال المربع

- أوجد جذري المعادلة بطريقة اكمال المربع:
- $x^2 - 2x - 15 = 0$

طريقة القانون

- للصورة العامة $ax^2 + bx + c = 0$
- يمكن استنباط هذا القانون من طريقة اكمال المربع؛ كيف؟؟
- من القانون جذري المعادلة هما:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

تمرين – نشاط ٥ درجات

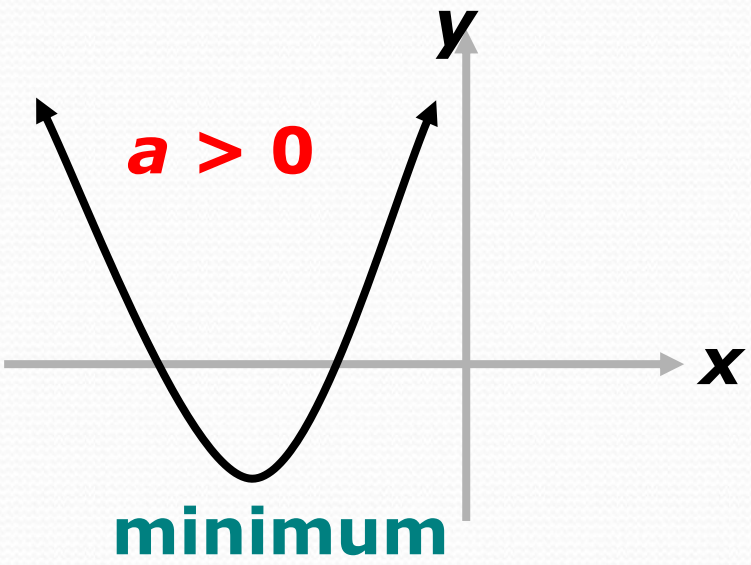
- مستخدما الصورة العامة: $ax^2 + bx + c = 0$ استنبط القانون العام لحل معادلات الدرجة الثانية.

- التسليم يوم لمن أراد الـ ٥ درجات

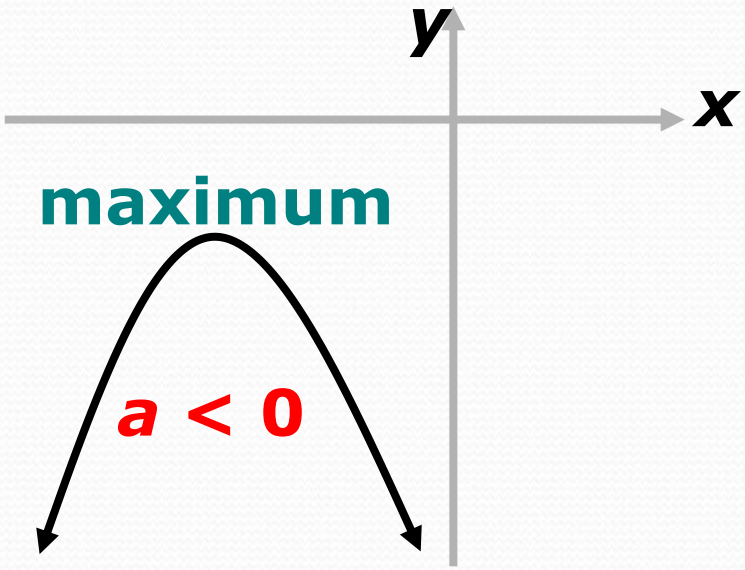
تمثيل الدالة التربيعية بيانيا؛ خصائص مهمةhere

تمثيل الدالة التربيعية بيانيا؛ خصائص مهمة $ax^2 + bx + c$

عندما تكون (a >0) أي موجبة
يكون المنحنى مقعرا (في اتجاه
المحور السيني) وله نهاية دنيا



عندما تكون (a <0) أي سالبة
يكون المنحنى محدبا (في اتجاه
المحور السيني) وله نهاية عظمى



تطبيقات اقتصادية على الدالة التربيعية

- توجد العديد من المسائل الاقتصادية التي يمكن صياغتها في صورة دالة تربيعية (معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد).
- حل مثل هذه المعادلات يمكننا من تحديد .قيمة المتغير موضوع الدراسة.

مثال:

- لفترة ما اذا كان السعر (p) لسلعة ما دالة في الكمية المباعة (Q) كالتالي:

$$P = 2 - Q$$

- وكانت تكاليف الانتاج الكلية (Total Cost (TC)) دالة في الكمية المنتجة كالتالي:

$$TC = 0.3 + 0.5Q$$

- المطلوب:
  - اكتب تعبيرا جبريا لدالة الايراد الكلي ?(Total Revenue (TR))
  - اكتب معادلة تصف الربح (π) ؟
  - أحسب كمية الانتاج اللازمة لتحقيق ربحا قدره ٥٠٠ ألف ريال
  - أحسب السعر الذي يحقق ربحا قدره ٥٠٠ ألف ريال

الحل

- معلوم أن الإيراد الكلي (TR) = حاصل ضرب السعر في الكمية المباعة:

دالة الايراد الكلي: $TR = PQ = (2 - Q)*Q = 2Q - Q^2$

- كذلك ندري أن الربح هو الفرق بين الإيراد الكلي (TR) والتكاليف (TC):
- معادلة الربح:

$$\pi = TR - TC = (2Q - Q^2) - (0.3 + 0.5Q)$$

$$= 2Q - Q^2 - 0.3 - 0.5Q = 1.5Q - Q^2 - 0.3$$

مثال ٢

- إذا كان العرض (Q_s) والطلب لسلعة ما في فترة ما في مكان ما كالاتي:

$$Q_s = p^2 + p - 3$$

$$Q_d = 3p^2 - p - 27$$

- أوجد نقطة توازن السوق؟؟؟

- Final 3_44_upto here

المعادلات الخطية: الحلول والتطبيقات الاقتصادية

قصر ٢١٦

د. كمال الدين علي بشير ابراهيم

المعادلات الخطية: أنواعها، تطبيقاتها

- المعادلة كما هو معلوم تعبير رياضي جبري يعبر عن تساوي مقدارين (الجانب الأيسر والأيمن) معبر عنهما بمجموعة متغيرات (مجهولات)
- حل المعادلة يقتضي ايجاد قيمة المجهولات فيها (جذور المعادلة).
- يمكن تقسيم المعادلات الخطية إلى:
  - المعادلات الخطية في متغير واحد
  - المعادلات الخطية في متغيرين (أو أكثر)

أمثلة:المعادلات الخطية في متغير واحدhere

- قررئيس القسم منح جائزة مقدارها ٤٨ ألف ريال لأحسن ثلاث طلاب بالقسم على أن تكون قيم الثلاث جوائز متتالية (متزايدة بوحدة واحدة) في المقدار. كون معادلة لحساب قيمة هذه الجوائز؟
- مررجل بمجموعة شباب وحياهم : «السلام عليكم أيها المائة»؛ رد أحدهم: لسنا مائة ولكن نحن ومثلنا ونصف عددنا وربع عددنا ومعنا أنت سنكون مائة. كون معادلة جبرية واحسب منها عدد الشباب؟

أمثلة: المعادلات الخطية في متغيرين (الآنية)

- يمكن حل مثل هذه المعادلات بعد رسمهما بيانيا: احداثيات نقطة التقاطع.
- ماعيوب هذه الطريقة للحل؟
- أساليب أخرى لحل هذه المعادلات:
- طريقة التعويض
- طريقة الحذف
- طرق الجبر الخطي

أ. أحمد

لاحقا

طريقة التعويض

- كيف تكون هذه الطريقة؟؟
- معطى المعادلتين:

$$٣س + ٦ص = ٣٠$$

$$٤س - ٨ص = ٤٠$$

- حلهما بالتعويض؟؟

طريقة الحذف

- كيف تكون هذه الطريقة؟؟
- أوجد نقطة تقاطع المستقيمين مستخدما طريقة الحذف:

$$٢س + ٥ص - ٢١ = صفر$$

$$٣س - ٢ص = ١٨$$

- مزايا /عيوب الطريقة؟

Test2 upto here مثال30/4/2017 sun

- موظفان يتزايد راتب كل منهما بألف ريال سنويا. إذا كان مجموع دخلهما الآن ٢٠ ألاف ريال وبعد ثلاث سنوات يصير دخل أحدهما ثلاث أضعاف الآخر. كون معادلة جبرية واحسب منها دخل كل منهما الآن؟

الجبر الخطي: Linear Algebra
المصفوفات وتطبيقاتها الاقتصادية

قصر ٢١٦

د. كمال الدين علي بشير ابراهيم

الجبر الخطي: Linear Algebra

- الجبر الخطي من الطرق الرياضية المستخدمة في حل المعادلات الآنية.
- يتفوق الجبر الخطي على طرق الحل السابق دراستها (الحذف/التعويض/الرسم البياني) عندما يكون عدد المتغيرات/المعادلات كبيرا

المصفوفاتMatrices

المصفوفة هي مجموعة عناصر مرتبة على شكل صفوف وأعمدة وتحصر بين أقواس ( ) أو [ ].

الصيغة العامة:

$$A_{m\times n}=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

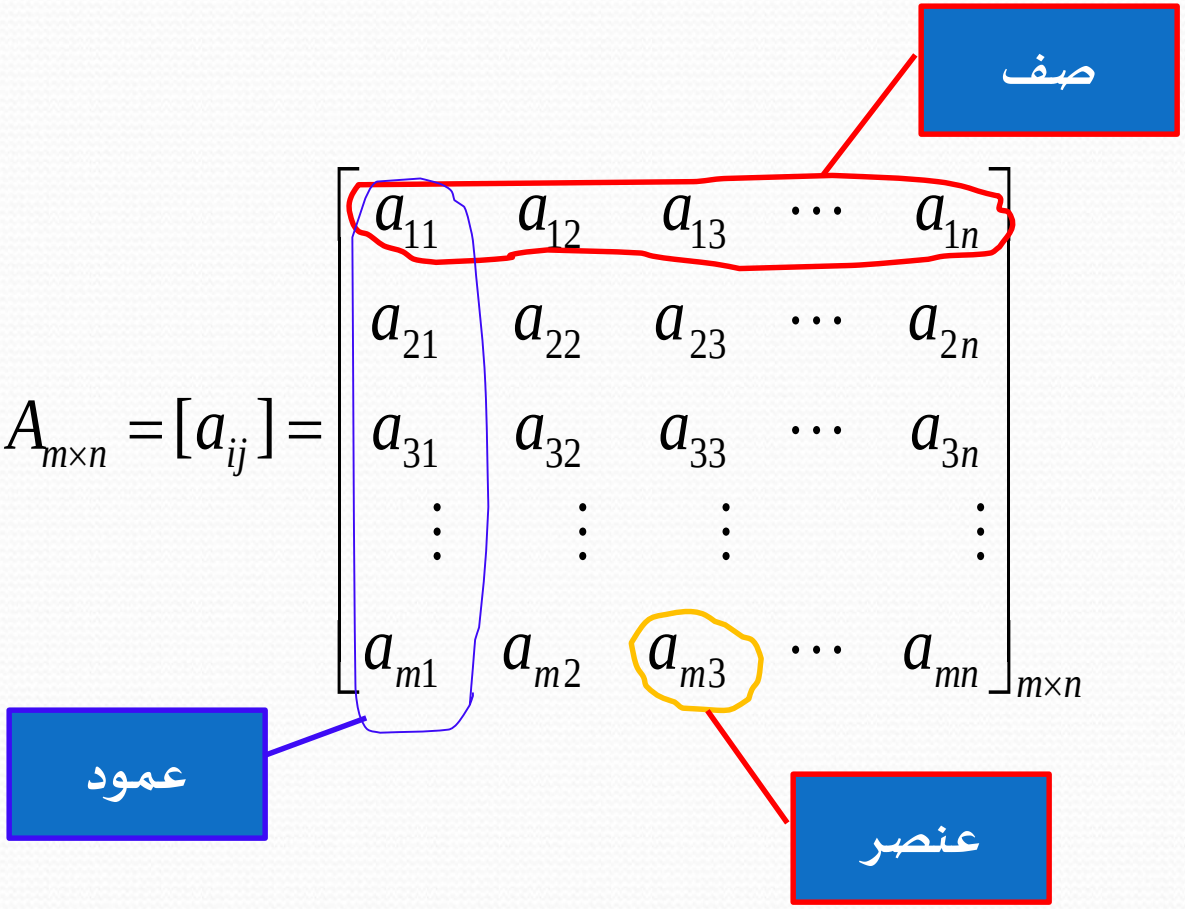
a_{ij} هو العنصر في الخانة (ij)

حيث (i) الصف و (j) العمود

(m) عدد الصفوف

(n)عدد الأعمدة

حجم (أبعاد/درجة) المصفوفة mxn


صف
$A_{m\times n}=[a_{ij}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$
عمود
عنصر

مثال

ما هو حجم هذه المصفوفات:

$$B=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 & -2 \\ 3 & 6 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

حجم هذه المصفوفة هو B_{3x4}

حيث عدد الصفوف =٣
وعدد الأعمدة =٤

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وهذه؟؟؟؟

أنواع المصفوفات Stu here

- حسب خصائص المصفوفات (الأبعاد؟نوع العناصر...) يمكن تصنيفها الى عدة أنواع.
- المصفوفة المربعة **square matrix**
- المصفوفة القطرية **diagonal matrix**
- مصفوفة الوحدة **identity matrix**
- مصفوفة المتجهة **vector matrix**
- المصفوفة الصفرية **null or zero matrix**
- المصفوفة المجزأة **partitioned matrix**

المصفوفة المربعة square matrix

- هي مصفوفة يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة: $m = n$
- يطلق عليها أيضا مصفوفة من الرتبة أو الدرجة (A_n)
- العناصر القطرية في المصفوفة المربعة تسمى القطر الرئيسي

المصفوفة القطرية diagonal matrix

- هي مصفوفة مربعة تكون كل عناصرها صفرية ماعدا العناصر الواقعة على القطر الرئيسي:

$$A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

مصفوفة الوحدة identity matrix

- مصفوفة مربعة قطرية تكون كل عناصر قطرها الرئيسي مساوية للوحدة ويرمز لها بـ (I_n). مثلا:

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة المتجه vector matrix

- هي مصفوفة تحتوي على عمود واحد فقط أو صف واحد فقط
- فهي اذا إما مصفوفة صفية أو مصفوفة عمودية.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{1\times 4}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}_{5\times 1}$$

المصفوفة الصفرية null or zero matrix

- هي مصفوفة مربعة تكون كل عناصرها مساوية للصفرويرمزلها بـ (O_n):

$$O_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المجزأة partitioned matrix مصفوفة يمكن تقسيم

عناصرها الى مصفوفات فرعية مبسطة

مصفوفات فرعية

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A=\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}$$

$$A=\left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

أحمد، عيسى، وداؤود هم أزواج مها، فاطمة، وسمية. عيسى والذي هو أخ لفاطمة مستقر في تبوك مع زوجته. داؤود والذي يعمل طبيبا أكبر سنا من زوج سمية. مها تعيش مها مع زوجها في الرياض.

أما فاطمة وزوجها فيعملان في أحد البنوك. من متزوج من من؟؟ قد تجد هاتين العلامتين ذوات فائدة؟

√ X

جمع وطرح المصفوفاتhere

- تجمع وتطرح المصفوفات اذا كانت لها نفس الدرجة /الابعاد (*شرط التطابق*) أي أن:
  - عدد الصفوف في المصفوفة الاولى يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية.
  - عدد الأعمدة في المصفوفة الاولى يساوي عدد الأعمدة في المصفوفة الثانية.
- يجمع كل عنصر في المصفوفة الاولى مع العنصر المناظر له في المصفوفة الثانية
- المصفوفة الناتجة لها نفس درجة المصفوفتين المجموعتين.
- ما سبق ينطبق على الطرح

التطابق و التساوي

- التطابق لا يعني التساوي
- لكي تتساوى مصفوفتين يشترط:
  - التطابق (سبق).
  - أن يساوي كل عنصر في المصفوفة الاولى العنصر المطابق له في المصفوفة الثانية.

شرط التساوي

Let $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$

$A=B$ if and only if $a_{ij}=b_{ij}\ \forall\ 1\le i\le m,\ 1\le j\le n$

مثال

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

If $A=B$

$a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4$

تابع جمع وطرح المصفوفات

$$A_{m\times n} \pm B_{m\times n} = C_{m\times n}$$

مثال (١)

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1 & 2+3 \\ 0-1 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ -3+3 \\ -2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أسس عامة للجمع

- [A] + [B] = [B] +[A] الترتيب لايفرق في حالة الجمع
- [A] + [o] = [o] + [A] = [A] المصفوفة الصفرية تقابل الصفر

مثال (٢)

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 7 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات

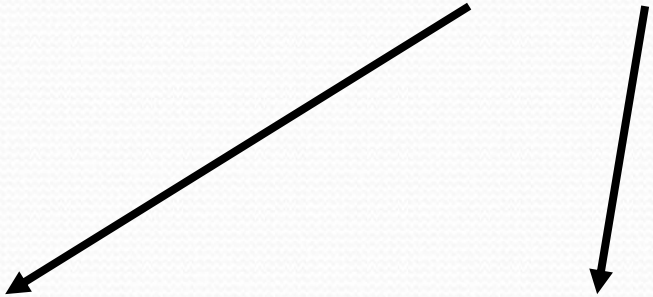
- ضرب مصفوفة في معامل كمي (عدد)

ضرب مصفوفة في معامل كمي (عدد)

- يمكن للعدد أن يكون عدد صحيح/كسر/سالب/موجب/
- عند ضرب مصفوفة بعدد يضرب كل عنصرفي المصفوفة في ذلك العدد.

ضرب مصفوفتين heremw

المصفوفتين: A , B بالابعاد التالية:



[r x c] and [s x d]

تابع

يمكن ضرب المصفوفتين A, B إذا:

[r x c] and [s x d]

c = s

تابع

والمصفوفة الناتجة تكون بالابعاد التالية:

[r x c] and [s x d]

r x d

طريقة الضرب A x B = C :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \textbf{[2 x 2]}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \quad \textbf{[2 x 3]}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{bmatrix}$$

[2 x 3]

مثال

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

[3 x 2] **[2 x 3]**

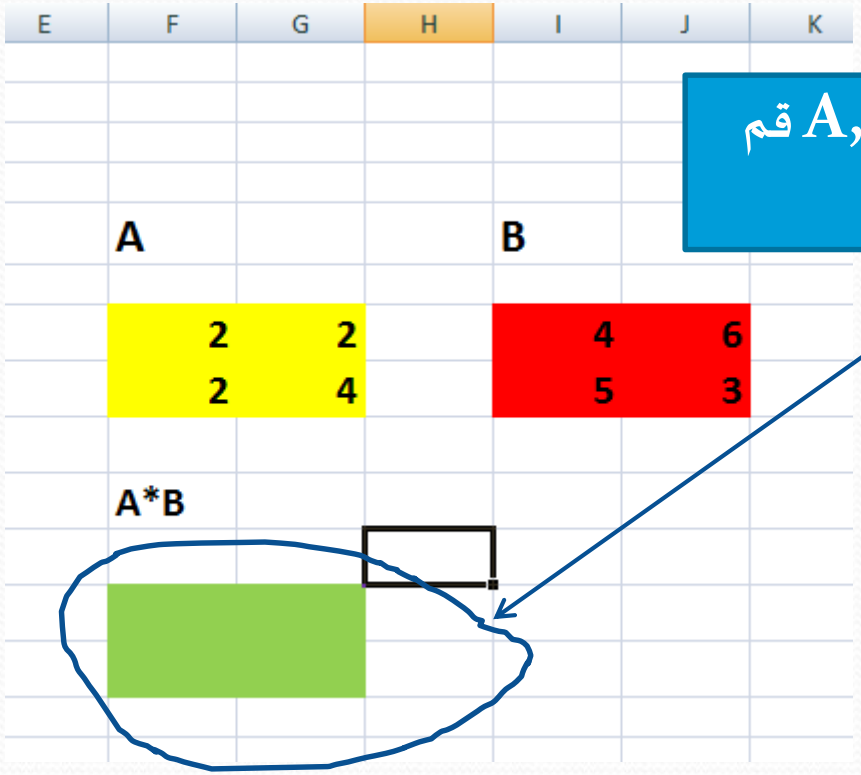
ينطبق شرط الضرب

$$C = \begin{bmatrix} 2*1+3*1=5 & 2*1+3*0=2 & 2*1+3*2=8 \\ 1*1+1*1=2 & 1*1+1*0=1 & 1*1+1*2=3 \\ 1*1+0*1=1 & 1*1+0*0=1 & 1*1+0*2=1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

[3 x 3]

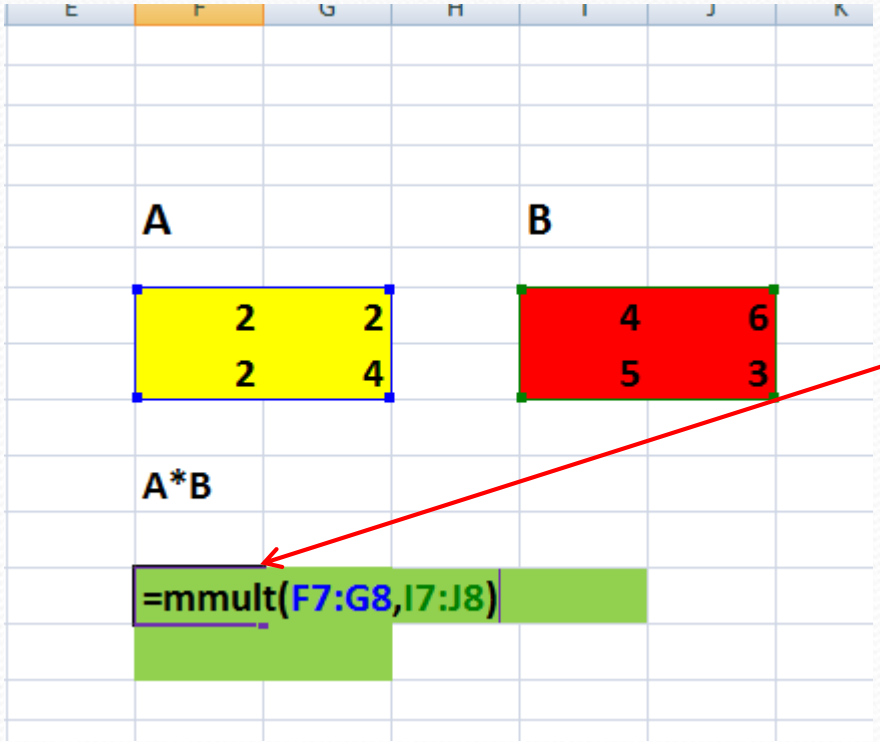
- Final test _1_3839_upto here

الضرب علىExcel



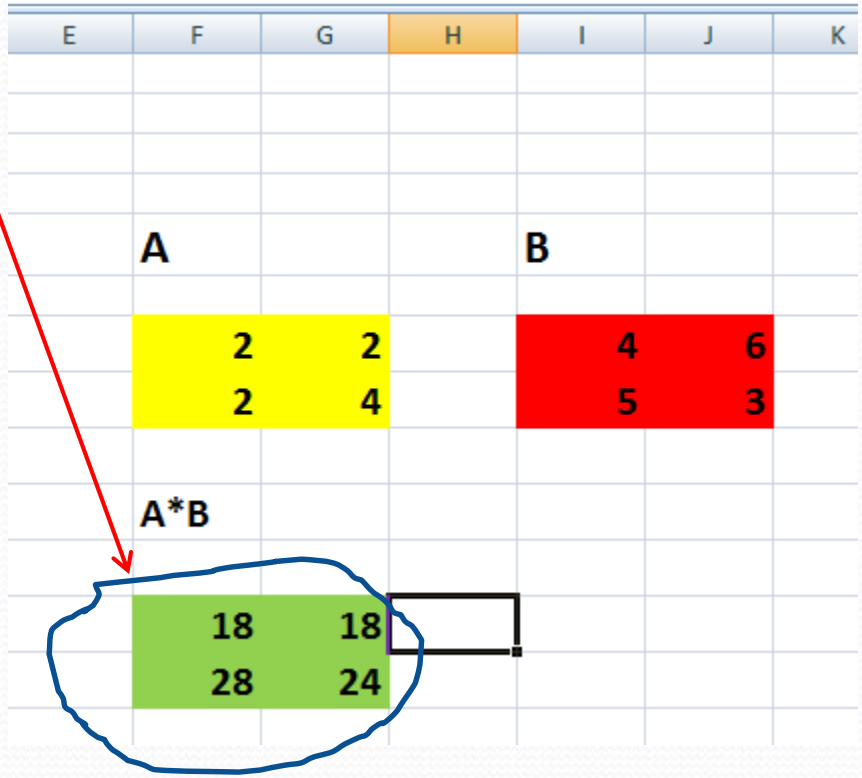
بعد كتابة المصفوفتين A,B قم باختيارمكان الاجابة

تابع



1. اكتب: "mmult("
2. قم باختيار خلايا المصفوفة A
3. أكتب فاصلة ","
4. قم باختيار خلايا المصفوفة B
5. اقفل القوس ")"
6. اضغط على: Ctrl,Shift, Enter مع بعض

And voila!



مقلوب المصفوفة: inverse of a matrix

- نعلم من الجبر أنه «لكل عدد حقيقي (ب) لا صفري يوجد عدد حقيقي (١/ب) بحيث أن ب *(١/ب) = ١.»
- بالنسبة للمصفوفات فإن مضروب المصفوفة المربعة في مقلوبها (إن وجد) هو مصفوفة الوحدة: $I = BB^{-1}$ حيث B^{-1} هو مقلوب المصفوفة B
- إذا كان هناط مصفوفتان: A , B وكلاهما بحجم (nxn) وكان: $AB = I$ و $BA = I$ فإن كلا من A , B هو مقلوب الآخر.
- هل لكل مصفوفة مقلوب؟ متى يمكن (ما هي شروط) وجود/امكانية حساب المقلوب لأي مصفوفة

شروط وجود مقلوب للمصفوفة

- شرطان:
  - أن تكون المصفوفة مربعة.
  - أن يوجد محدد للمصفوفة (أي أن المحدد غير صفري)

تابع

- أثبت أن **B** هو مقلوب **A** معطى:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- أوجد مقلوب: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$
- الحل: حل هذه المعادلة: لاحظ أن $(X=A^{-1})$

$$\begin{matrix} A & X & I \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} x_{11} + 4x_{21} & x_{12} + 4x_{22} \\ -x_{11} - 3x_{21} & -x_{12} - 3x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

طريقة حساب مقلوب المصفوفة ٢X٢

- خطوة (١): أحسب المحدد للمصفوفة ad-bc

- خطوة (٢): أعكس عناصر القطر الرئيس

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longleftarrow \begin{bmatrix} d & b \\ c & a \end{bmatrix}$$

- خطوة (٣): خذ سالب عناصر القطر الآخر:

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- خطوة (٤): قم بضرب مقلوب المحدد في هذه المصفوفة:

$$\frac{1}{ad-cb}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال:

- أحسب مقلوب المصفوفة: $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

1. المحدد: 4x3-8x1 = 4
2. عكس عناصر القطر الرئيس: $\begin{pmatrix}3 & 8\\ 1 & 4\end{pmatrix}$
3. عكس اشارات عناصر القطر الآخر: $\begin{pmatrix}3 & -8\\ -1 & 4\end{pmatrix}$
4. ضرب مقلوب المحدد في المصفوفة الأخيرة: $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -8\\ -1 & 4\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0.75 & -2\\ -0.25 & 1\end{bmatrix}$$

للتأكيد:

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}4 & 8\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.75 & -2\\ -0.25 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3-2 & -8+8\\ 0.75-0.75 & -2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

المحددات (Determinants)
وتطبيقاتها الاقتصادية

قصر ٢١٦

د. كمال الدين علي بشير ابراهيم

مقدمة/اصطلاحات: المحدد/المحيدد/المرافق

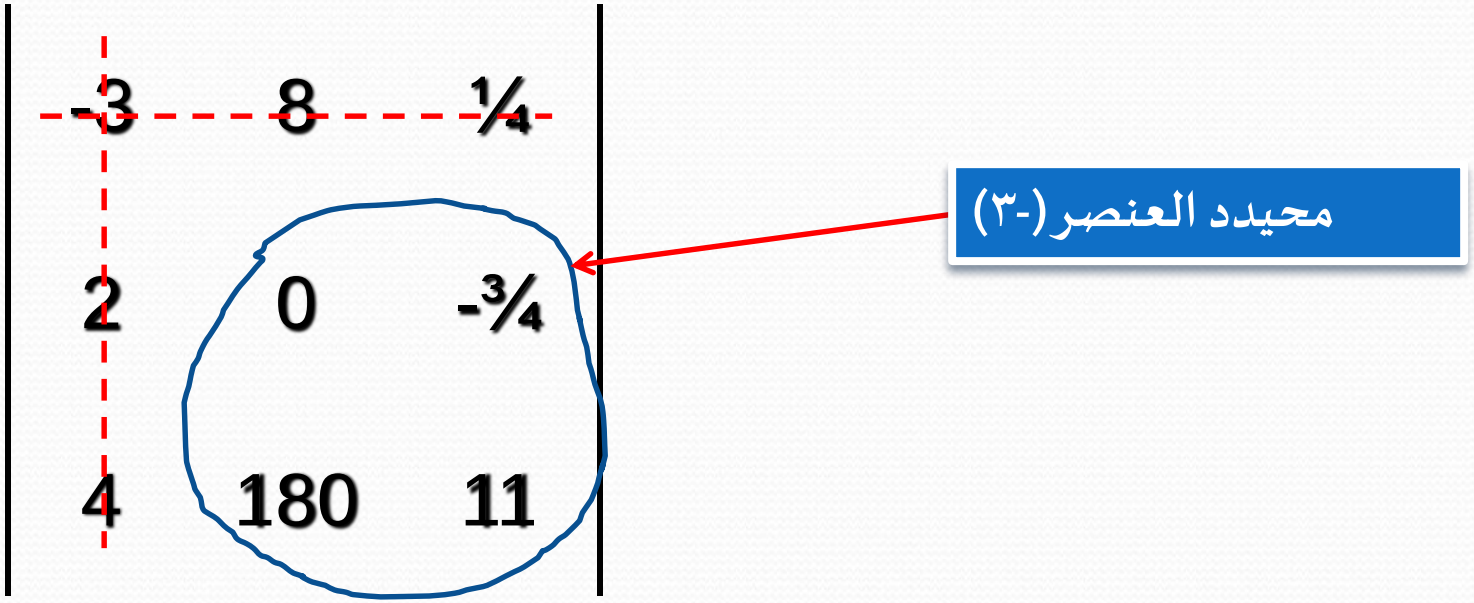
- المحدد: لكل مصفوفة مربعة عدد (معامل كمي) يسمى (المحدد).
- للمصفوفة A ، للتعبيرعن المحدد نستخدم الرموز:
  - |A| أو
  - det(A)، أو
- يمكن كذلك التعبيرعن المحدد باسقاط الاقواس في المصفوفة واستبدالها بخطوط مستقيمة، فمثلا:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix} \qquad \det(A)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}$$

تابع

- محيدد العنصر: هو المصفوفة المتبقية بعد حذف الصف والعمود الموجود بهما ذلك العنصر
- مرافق العنصر: هو حاصل ضرب $(-1)^{i+j}$ في محدد محيدد ذلك العنصر

حيث i هو رقم الصف و j هو رقم العمود للعنصر

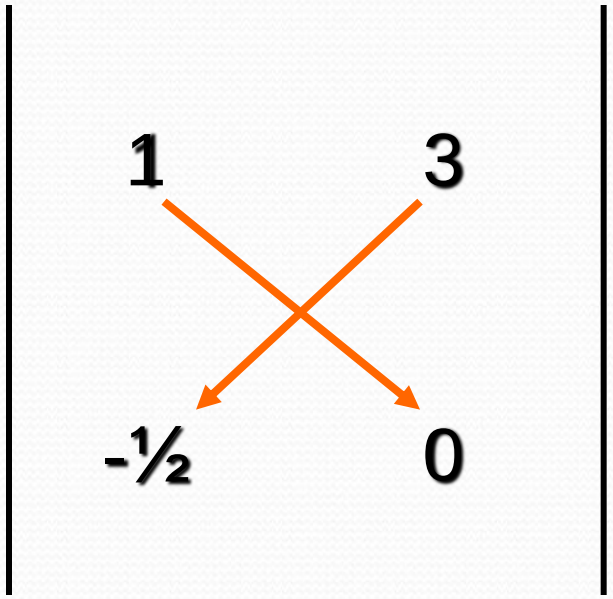


طرق حساب المحدد

- محدد المصفوفة 1×1 [a] هو العدد: a
- محدد المصفوفة 2×2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هو العدد: ad-bc

أمثلة: محدد المصفوفة A_2 و A_3

المصفوفة A_2

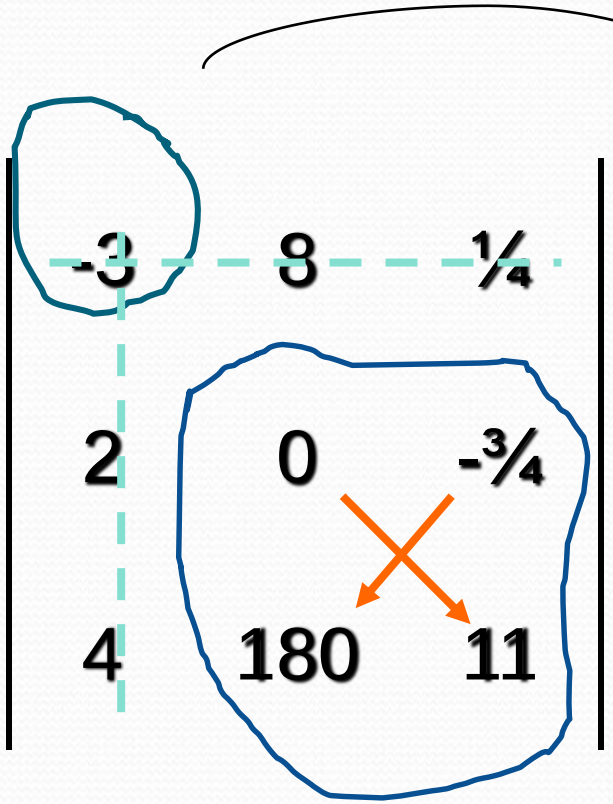


$$= (1)(0) - (3)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

محدد المصفوفة3x3: La Place expansion

(١) أحذف الصف والعمود الأوليين

(٢) اضرب العنصر المشترك في $(-1)^{i+j}$ ثم في محدد المصفوفة المتبقية



$$= 3(\quad)$$

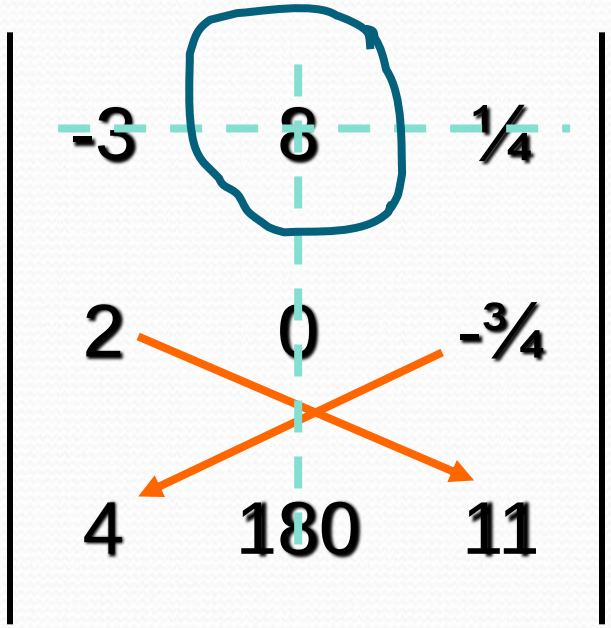
$$= 3\left((0)(11) - \left(-\frac{3}{4}\right)(180)\right)$$

تابع

(٣) أحذف الصف الأول والعمود الثاني.

(٤) خذ العنصر المشترك واضربه في محدد المصفوفة المتبقية.

(٥) أضف الناتج للنتيجة السابقة (٢)



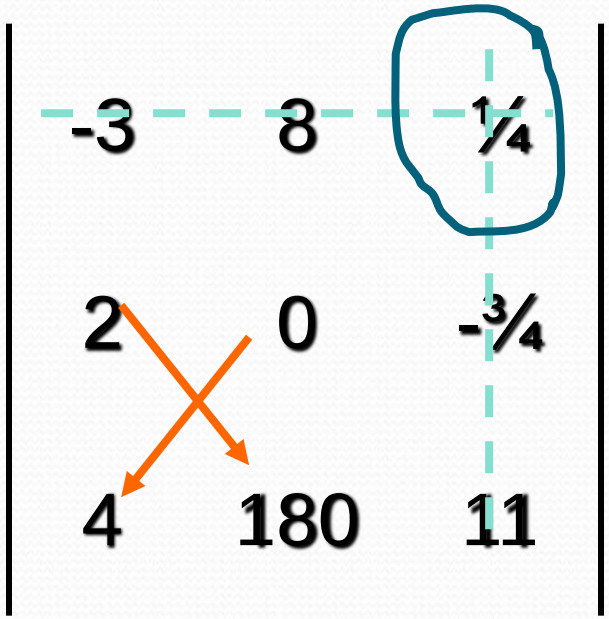
$$=3\left((0)(11)-\left(-\tfrac{3}{4}\right)(180)\right)-8\left((2)(11)-\left(-\tfrac{3}{4}\right)(4)\right)$$

تابع

(٦) أحذف الصف الأول والعمود الثالث

(٧) خذ العنصر المشترك واضربه في محدد المصفوفة المتبقية.

(٨) أضف الناتج للنتيجة السابقة



$$= 3\left((0)(11) - \left(-\tfrac{3}{4}\right)(180)\right) - 8\left((2)(11) - \left(-\tfrac{3}{4}\right)(4)\right)$$

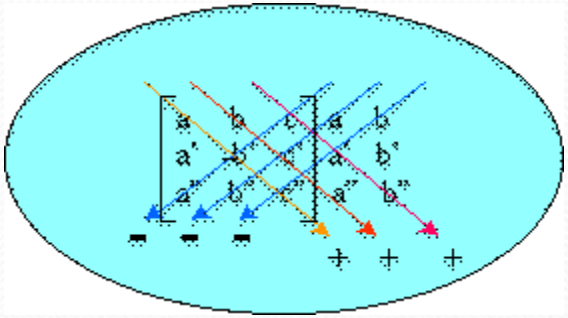
$$+\left(\tfrac{1}{4}\right)\left((2)(180) - (0)(4)\right) = 695$$

تابع

- ماذا عن محددات المصفوفات الأعلى درجة/ الأكبر A_n $(n>3)$ ؟؟؟
- نطبق نفس النسق (LaPlace expansion) السابق.
- هل توجد طرق أخرى لحساب المحددات؟

تابع

طريقة أخرى لحساب المحدد لـ A_3:



صف هذه الطريقة؟

مثال

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{matrix}$$

18 60 16

-20 -24 36

$$= [36+(-24)+(-20)] - [18+60+16]$$

$$= (-8) - (94) = -102$$

خواص المحددات final here

- إذا كانت جميع عناصر صف أو عمود صفرية تكون قيمة المحدد صفر
- تبديل صف بصف آخر يعكس علامة المحدد
- للمصفوفة القطرية المحدد هو مضروب عناصر القطر الرئيس
- عند وجود صفين متطابقين أو متناسبين تكون قيمة المحدد صفرا (علاقة خطية)
- إذا تم الحصول على المصفوفة (B) بضرب عناصر المصفوفة (A) بالعدد α يكون: $\det(B) = \alpha \det(A)$
- اذا كانت المصفوفتين A, B بنفس الرتبة:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

- Final_2_2_3839

تطبيقات المحددات

- **أولا: حل أنظمة المعادلات الخطية (مجموعة معادلات آنية) Cramer's Rule:**
- **في حال وجود منظومة معادلات آنية عددها (n) في (n) متغير: Ax=b وكان محدد مصفوفة المعاملات det(A)≠0 فإن جذور المنظومة تكون:**

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)},$$

حيث:

A هي مصفوفة المعاملات (nxn)

A_i مصفوفة مشتقة من A وذلك باستبدال العمود (i) بالمتجهة b

تابع

مثلا لمنظومة الثلاث معادلات أدناه:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

يمكن اعادة كتابتها كمصفوفات كالتالي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

وتكون جذورهذه المعادلات كالتالي

$$x_1 = \frac{|A_3|}{|A|} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

أمثلة:

- (١)حل المعادلة التالية باستخدام Cramer's Rule:

$$٣س+٤ص = ١٢$$
$$٤س+٥ص = ٢٠$$

(٢) شركة تستخدم ثلاث مواد خام كمياتها بالاطنان حسب المعادلات أدناه، احسب كميات هذه المواد:

$$س+ص+ع-٦ = صفر$$
$$٢س+ص-٢ع+٢ = صفر$$
$$س+ص+٦ = ٣ع$$

تابع تطبيقات المحددات

- ثانيا: حل مشكلات تطبيقية:
- مصنع ينتج نوعين من السلع. انتاج الوحدة من السلعة الاولى يحتاج الى ساعتين عمالة ماهرة وساعتين عمالة غيرماهرة. انتاج الوحدة من السلعة الثانية يحتاج لساعتين عمالة ماهرة و٣ ساعات عمالة غيرماهرة. يملك المصنع ٢٠٠ ساعة عمالة ماهرة و ٢٥٠ ساعة عمالة غيرماهرة. استخدم المحددات لايجاد الوحدات التي يلزم انتاجها من كل سلعة بحيث توظف كل العمالة.

تابع

- للخطوط السعودية ثلاثة أنواع من طائرات النقل تستخدم في نقل ثلاث سلع. الطائرة الأولى يمكنها نقل وحدة من السلعة الأولى، وحدة واحدة من السلعة الثالثة ولاشيئ من السلعة الثانية. الطائرة الثانية تنقل وحدتين من السلعة الأولى ووحدة واحدة من كل من السلعة الثانية والثالثة. الطائرة الثالثة تستطيع نقل وحدة واحدة من السلعة الأولى ووحدتين من كل كن السلعة الثانية والثالثة. استخدم لتحديد عدد الرحلات التي يجب أن تقوم بها كل طائرة لنقل: ١٦، ١٠، و١٢ وحدة من السلع الثلاث على الترتيب؟

البرمجة الخطية وتطبيقاتها الاقتصادية

قصر ٢١٦

د. كمال الدين علي بشير ابراهيم

- البرمجة الخطية من الأساليب الكمية التى تستخدم فى مجال التخطيط و إتخاذ القرار.
- تقوم هذه الطريقة على أساس مدى إمكانية صياغة المشكلة محل البحث فى شكل نموذج رياضى.
- وبحل النموذج الرياضى نحصل على عدة بدائل متاحة يتم إختيار بديل منها يسمى الحل الأمثل .

النموذج الرياضى للبرمجة الخطيّة

- يتكون النموذج الرياضى من الآتى :

1. دالة الهدف .
2. مجموعة من القيود فى شكل متراجحات .
3. القيود المنطقيّة.

- يهدف نموذج البرمج الخطيّة إلى تعظيم (الربح أو العائد مثلا) أو تخفيض (التكلفة) والتى تمثل دالة االهدف فى ظل قيود معينة تنشأمن حقيقة محدوديّة الموارد والإمكانيات والتى لابد من إستغلالها الإستغلال الأمثل .
- ومن خلال مجموعة القيود المفروضة نصل إلى بدائل أو حلول متاحة يتم بحث تأثيركل منها على دالة الهدف ومن ثم إختيار أفضلها (الحل الأمثل) .

الصورة العامة لنموذج البرمجة الخطيّة

- **دالة الهدف :**

- أوجد ر $= ر_1 س_1 + ر_2 س_2 + ... + ر_ن س_ن$

- أو أوجد ت $= ت_1 س_1 + ت_2 س_2 + ... + ت_ن س_ن$

- طبقا للقيود الهيكليّة الآتية :

- $أ_{11} س_1 + أ_{21} س_2 + ... + أ_{1ن} س_ن \leq$ أو $\geq ب_1$
- $أ_{12} س_1 + أ_{22} س_2 + ... + أ_{2ن} س_ن \leq$ أو $\geq ب_2$
- $أ_{م1} س_1 + أ_{م2} س_2 + ... + أ_{من} س_ن \leq$ أو $\geq ب_م$

القيود المنطقيّة أو شروط اللاسالبية

- تتمثل فى أن قيم المتغيرات $س_1$ ، $س_2$ ،....$س_ن$ ≥ صفر ، وبعبارة أخرى يجب أن تكون قيم المتغيرات موجبة .

طريقة الرسم البيانى لحل نموذج البرمجة الخطية

- تستخدم هذه الطريقة فى حالة وجود متغيرين .
- تتلخص الطريقة فى أننا نقوم برسم القيود على شكل خطوط ثم نوجد منطقة التقاطعات أو المنطقة المشتركة والتى تحتوى على عدة بدائل . وعن طريق إيجاد قيمة دالة الهدف عند هذه البدائل يمكن إختيار البديل أو الحل الأمثل الذى يعظم أو يخفض قيمة دالة الهدف .

مثال (١)– مشكلة تعظيم ارباح

$$Z=10X_1+15X_2 \text{ Max.}$$

S.T.:-

$$30000 \text{ ----------(1)} \leq 6X_1+4X_2$$

$$20000 \text{ ----------(2)} \leq 2X_1+4X_2$$

$$7000 \text{ ----------(3) } X_1 \leq$$

$$8000 \text{ ----------(4) } \leq X_2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحـــــــــل

نحوَل القيود من الصيغة العامة (standard form) أي (canonical form) الى الصيغة القياسية

نحول القيود من صيغة متباينات الى صيغة معادلات. وكما يلي:-

القيد الاول $6X_1 + 4X_2 \leq 30000 \rightarrow 6X_1 + 4X_2 = 30000$

القيد الثاني $2X_1 + 4X_2 \leq 20000 \rightarrow 2X_1 + 4X_2 = 20000$

القيد الثالث $X_1 \leq 7000 \rightarrow X_1 = 7000$

القيد الرابع $X_2 \leq 8000 \rightarrow X_2 = 8000$

ثم نجد قيمة X_1 و X_2 لكل قيد من القيود الاربعة اعلاه.

لإيجاد قيمتي X_1 وX_2 للقيدين الأول والثاني أولا سنفترض بان قيمة $X_1 = 0$

لإيجاد قيمة X_2 ، ثم نفترض ان قيمة $X_2 = 0$ لإيجاد قيمة X_1، وكما يلي :-

القيد الأول $6 X_1 + 4 X_2 = 30000$

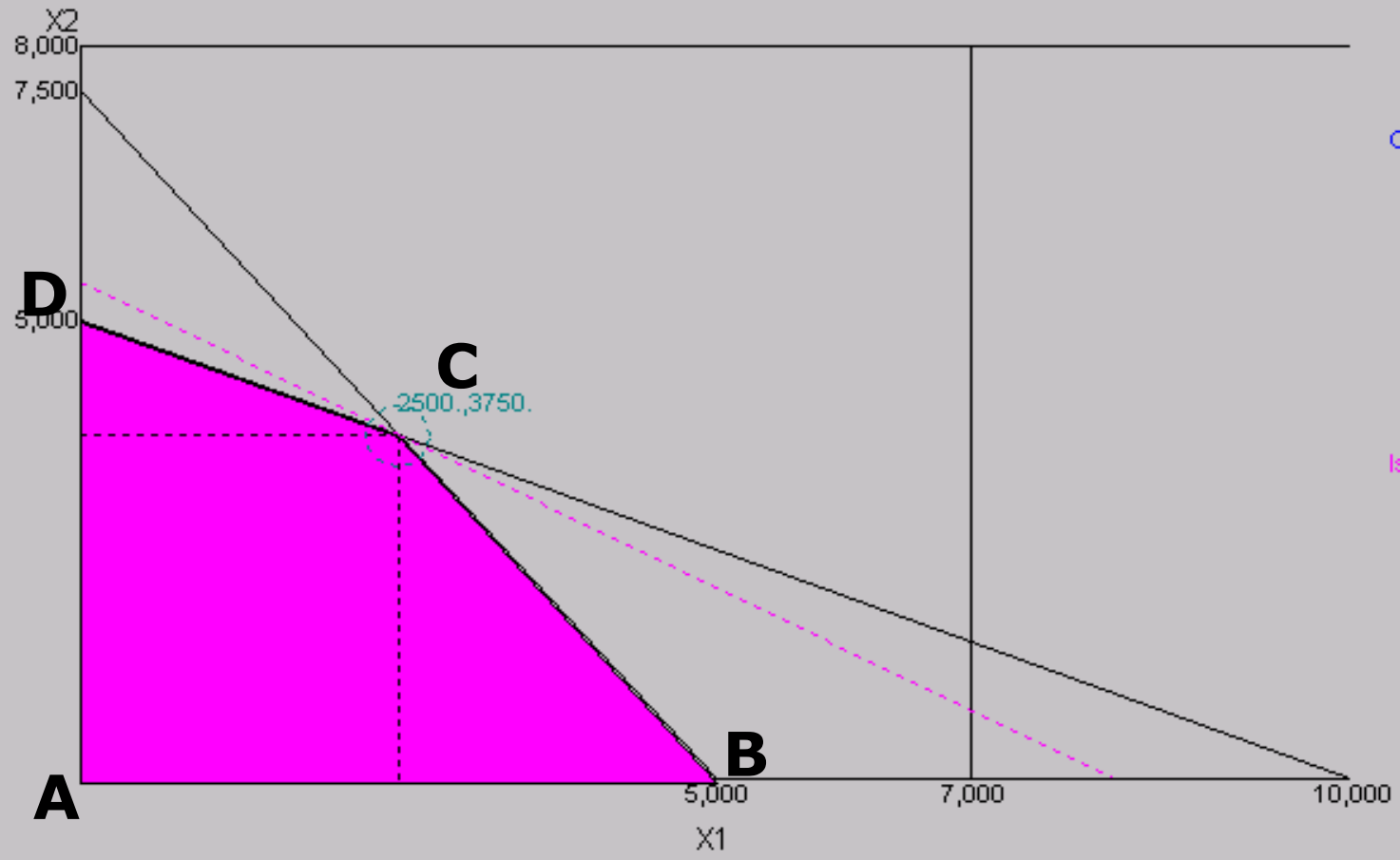
X_1	X_2
0	7500
5000	0

القيد الثاني $2 X_1 + 4 X_2 = 20000$

X_1	X_2
0	5000
10000	0

- ملاحظات:-
- عندما تكون جميع القيود في المشكلة من نوع اصغر من او يساوي فان منطقة الحل الممكن تكون باتجاه نقطة الاصل (الفراغ الذي لا يمر فيه اي مستقيم).
- تقاطع اي مستقيمين حول منطقة الحل الممكن يعطي احد نقاط الحلول الممكنة .
- القيود التي تحتوي على متغير واحد فقط ترسم عموديا على محورها ، كما هو الحال للقيدين (3 و4).

الرسم البياني



الحلول الممكنة Feasible solutions

- من الرسم نجد ان منطقة الحلول الممكنة هي المنطقة المحصورة بين النقاط A,B,C,D
- النقطة A تمثل نقطة الاصل اي ان قيمتي X_1, X_2 ستكون (0,0).
- النقطة B تقع على المحور السيني وهذا يعني ان قيمة $X_2=0$ اما X_1 =5000 اي (5000,0).
- النقطة D تقع على المحور الصادي ،لذا فان قيمة $X_1=0$ ، اما $X_2=5000$ اي (5000,0).
- النقطة C هي نقطة تقاطع القيدين الاول والثاني والذي يمكن ايجاد قيمتها و كما يلي:

يمكن ايجاد قيمة النقطة C بطريقتين:

- ويمكن ايجادها من انزال اعمدة على المحورين الافقي والعمودي من النقطة C.
- أو من خلال حل معادلتي القيدين الأول و الثاني و وكما يلي :

$$6X_1 + 4X_2 = 30000$$
$$\pm 2X_1 \pm 4X_2 = \pm 20000$$

$$4X_1 = 10000$$
$$X_1 = 10000/4$$
$$= 2500$$

لإيجاد قيمة X_2 نعوض في احدى المعادلتين عن قيمة X_1 وكما يأتي :

$$6X_1 + 4X_2 = 30000$$
$$(6 \times 2500) + 4X_2 = 30000$$
$$15000 + 4X_2 = 30000 \rightarrow 4X_2 = 30000 - 15000$$
$$4X_2 = 15000 \rightarrow X_2 = 15000/4 = 3750$$

وهذا يعني ان النقطة C ستكون (2500,3750)

- بعد ذلك نعوض النقاط اعلاه في معادلة دالة الهدف

$$\text{Max. } Z=10\,X_1+15X_2$$

وكما يلي :

A (0,0) = (10×0)+ (15×0)= 0

B (5000,0) = (10×5000)+(15×0)= 50000

C (2500,3750) = (10×2500)+(15×3750)= 81250

D (0,5000) =(10×0)+(15×5000)= 75000

ولما كانت الشركة تهدف الى تعظيم الارباح لذا سيكون البديل الافضل عند النقطة C اي ان على الشركة انتاج 2500 وحدة من X_1 و 3750 وحدة من X_2، لتحقق عائد مقداره 81250 دينار.

مثال

- مصنع ينتج سلعتين وفقا للظروف الآتية :
- هناك عمليتين إنتاجيتين : تجميع وتشطيب .
- الحد الأقصى لساعات العمل كالتالي :
- عملية التجميع = ٣٠٠ ساعة
- عملية التشطيب = ٣٢٠ ساعة
- يحتاج إنتاج الوحدة من السلعة الأولى : ٦ساعات تجميع و8 ساعات تشطيب.
- يحتاج إنتاج الوحدة من السلعة الثانية : ٦ساعات تجميع و4 ساعات تشطيب.

- ربح الوحدة من السلعة الأولى = 120 ريال
- ربح الوحدة من السلعة الثانية = 100 ريال

- أوجد نموذج البرمجة الخطية بإفتراض أن المصنع يرغب فى تحقيق أقصى ربح فى ظل ظروف التشغيل السابقة (أقصى حد لساعات العمل فى عمليتى التجميع والتشطيب)

- نفترض أن الكمية من السلعة الأولى $س_1$ ومن السلعة الثانية $س_2$
- دالة الهدف هي أقصى ربح:
- $ر = ١٠٠ س_1 + ١٢٠ س_2$
- القيود:
- $٦ س_1 + ٦ س_2 \geq ٣٠٠$ (١)
- $٤ س_1 + ٨ س_2 \geq ٣٢٠$ (٢)

بشرط أن : $س_1 ، س_2 \geq$ صفر

الحل

- أولا :تحويل المتباينات إلى معادلات ورسمها
- ثانيا :تحديد منطقة الحلول والبدائل من الرسم
- ثالثا : تحديد البديل الأمثل أي كميتي $س_{1}$ و $س_{2}$ اللتان تحققان أقصى ربح في ظل وجود القيود السابقة . ($س_{1}$ = ٢٠ و $س_{2}$ = ٣٠)

مثال ٥ – ٣ ص ٢١٨

- يتم تقديم وجبتين للمريض فى مستشفى الملك عبد العزيز الجامعى بحيث:
- الوحدة الواحدة من الوجبة الأولى تعطى ٤ سعر حرارى وبها ٤ وحدات فيتامين
- الوحدة الواحدة من الوجبة الثانية تعطى ٦ سعر حرارى وبها ٣ وحدات فيتامين

تابع المثال

- إذا كان المطلوب للمريض ٣٦ سعر حرارى على الأقل و٢٤ وحدة فيتامين .
- وكان سعر الوحدة من الوجبة الأولى = ١٠ ريال
- وسعر الوحدة من الوجبة الثانية = ١٢ ريال

- المطلوب تحديد عدد الوجبات من النوعين التى تحقق أقل تكلفة للمستشفى وفى نفس الوقت تعطى المريض متطلباته الأساسية من السعرات والفيتامين .

النموذج

- دالة الهدف :

ت = ١٠ س + ١٢ ص

حيث س هى عدد الوحدات من الوجبة الأولى

حيث ص هى عدد الوحدات من الوجبة الثانية

باقى النموذج

- القيود :
- ٤ س + ٦ ص ≤ ٣٦ (١)
- ٤ س + ٣ ص ≤ ٢٤ (٢)

بشرط أن : س ، ص ≤ صفر

الحل

- أولا :تحويل المتباينات إلى معادلات ورسمها
- ثانيا :تحديد منطقة الحلول والبدائل من الرسم
- ثالثا : تحديد البديل الأمثل أى كميتى س و ص اللتان تحققان أقل تكلفة فى ظل وجود القيود السابقة (تحقيق متطلبات المريض الأساسية من السعرات والفيتامين).
- (س= ٣ وجبات من النوع الأول و ص = ٤ وجبات من النوع الثانى)

مثال ٣

- أوجد هـ (س) = ٣ $س_{١}$ + ٢ $س_{٢}$
- طبقا للقيود

$س_{١}$ + ٢ $س_{٢}$ ≥ ٢ (١)

٢ $س_{١}$ + $س_{٢}$ ≥ ٢ (٢)

بشرط أن : $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ≥ صفر

- مثال ٦ صفحة ٢٣١

- أوجد $\downarrow$ هـ (س) = ٢ $س_{١}$ + $س_{٢}$

- طبقا للقيود

$س_{١}$ + $س_{٢}$ ≥ ٤ (١)

- $س_{١}$ + $س_{٢}$ ≥ ٢ (٢)

$س_{٢}$ ≤ ٢ (٣)

بشرط أن : $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ≤ صفر

تطبيقات على البرمجة الخطيّة

- ينتج مصنع للساعات حجمين مختلفين ، أحدهما كبير والآخر صغير. يتطلب الحجم الأول ٢ ساعة عمل تجميع و ساعة عمل واحدة للاختبار، ويتطلب الحجم الثاني ساعة عمل واحدة للتجميع و ٢ ساعة عمل للاختبار، وكان الحد الأقصى لساعات العمل اليومي في كل من قسمي التجميع والاختبار هو ٧ ساعات و ٨ ساعات على التوالي .
- فإذا أفترض أن المصنع يريد تعظيم ربحه وكان ربح الحجم الكبير هو ٨ ريال للوحدة وللصغير ٦ ريال للوحدة ، أوجد ما يلي :

1) نموذج البرمجة الخطية .
2) منطقة الحلول الممكنة من خلال الرسم البيانى .
3) المزيج السلعى الأمثل حتى يحقق المصنع أكبرربح ممكن.

مسألة أخرى

- منشأة تقوم بإنتاج أربعة (٤) منتجات باستخدام ثلاثة (٣) موارد محدودة هي: (i)ساعات عمل الماكينة ويوجد منها ١٨٠ ساعة، (ii) ساعات العمالة البشرية ويوجد منها ٤٠ ساعة، (iii) مساحة التخزين المتوفرة وتبلغ ١٤٨ قدما مربعا. لديك المعلومات التالية:
  - الوحدة الواحدة من المنتج الأول تحتاج إلى: ساعتين من الماكينة، و١,٥ قدم مربع للتخزين، و٠,٨ ساعة عمالة بشرية.
  - الوحدة الواحدة من المنتج الثاني تحتاج إلى: ٦,٣ ساعة من الماكينة، و٢ قدم مربع للتخزين، و٠,٦ ساعة عمالة بشرية.
  - الوحدة الواحدة من المنتج الثالث تحتاج إلى: ١,٨ ساعة من الماكينة، و٤ قدم مربع للتخزين، و٠,٩ ساعة عمالة بشرية.
  - الوحدة الواحدة من المنتج الرابع تحتاج إلى: ٦ ساعات من الماكينة، و٥ قدم مربع للتخزين، و٠,٤ ساعة عمالة بشرية.
  - أسعار بيع الوحدة الواحدة للمنتجات الأربع على التوالي: ٣، ٥، ٤، و٤,٥ ريال سعودي.

تابع تطبيقات على البرمجة الخطيّة

- أراد مستثمر استثمار أمواله في شركتي سابك والاتصالات، تكوين محفظة استثمار من مبلغ مقداره ١٢٠٠٠٠ ريال . فإذا كان سعر السهم في شركة سابك هو ٣٠٠ ريال للسهم والعائد السنوي له ٣٦ ريال، على حين كان سعر السهم في شركة الاتصالات ٤٠٠ ريال للسهم والعائد السنوي له ٥٠ ريال .
- كيف يقوم المستثمر بتحقيق أكبر عائد ممكن وفى نفس الوقت يقوم بنوع من التوازن لتقليل المخاطر وذلك بأن يستثمر في كل شركة على حدة ما لا يقل عن ٣٠٠٠٠ ريال ؟

- Final test_1_43 upto here

التفاضل وتطبيقاته الاقتصادية

قصر ٢١٦

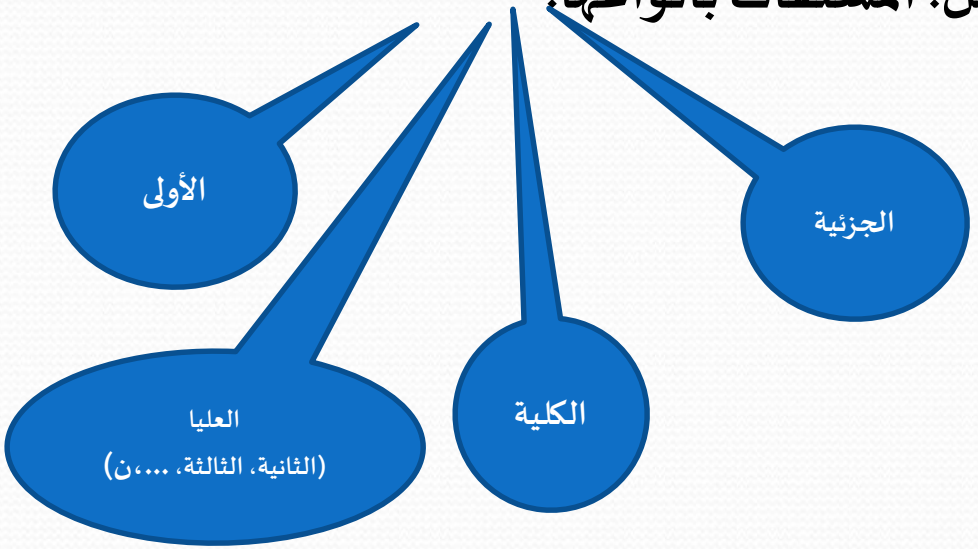
د. كمال الدين علي بشير ابراهيم

في هذا الباب

- مفهوم التفاضل (جبريا وهندسيا)
- قواعد التفاضل
- المشتقات(الأولى/الجزئية/العليا) /الدوال (متغيرواحد/اكثرمن متغير).
- التطبيقات

مفهوم التفاضل

- هو احد مجالات الرياضيات ويعنى بدراسة تغيرات الدوال (أي قيم المتغير التابع) عند حدوث تغيرات في مدخلاتها (المتغيرات المستقلة فيها).
- من أهم العناصر في علم التفاضل: المشتقات بأنواعها.



دوال المتغير الواحد y = f(x)

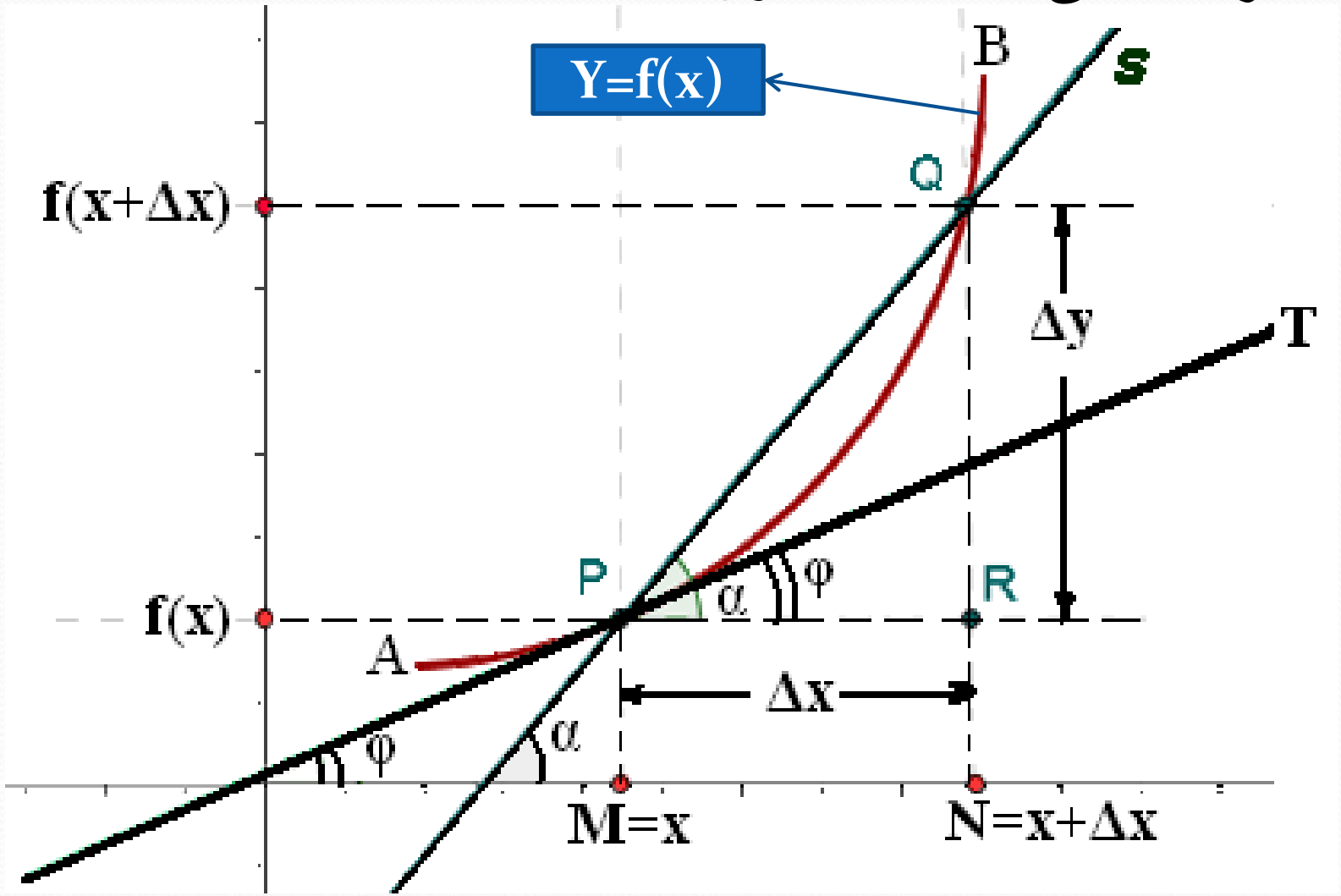
مشتقة الدالة: جبريا وهندسيا

- جبريا للدالة: $y = f(x)$:
  - إذا رمزنا للتغير في x بـ: Δx
  - وفي y بـ Δy
  - تكون المشتقة الأولى (dy/dx) هي نهاية حاصل قسمة التغير في y على التغير في x عندما يؤول التغير الأخير للصفر أي:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

  - اذا وجدت هذه النهاية تكون الدالة قابلة للتفاضل **differentiable**
  - هناك رموز أخرى للمشتقة الأولى: أو y' أو $f'(x)$ Dy $\dot{y}$

التفسير الهندسي للمشتقة الأولى للدالة:



قواعد التفاضل

1. **تفاضل الثابت:**

إذا كانت ص = ك حيث ك ثابت فإن:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

2. **تفاضل القوى:**

إذا كانت ص = س^{ن} حيث (ن) عدد صحيح فإن:

$$\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$$

3. **تفاضل ثابت مضروب في قوى:**

إذا كانت ص = أس^{ن} حيث (ن) عدد صحيح فإن:

$$\frac{dy}{dx} = a n x^{n-1}$$

4. **تفاضل الضرب:** للدالتين $f(x)$ و $g(x)$ فإن:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) * g(x)\right] = f(x) * \frac{d}{dx}\left[g(x)\right] + g(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]$$

ت فاضل
حاصل ضرب

أمثلة

- للدالة: $f(x)=5$ ⟵ $f'(x)=0$

- للدالة: $f(x)=x^5$ ⟵ $f'(x)=5x^4$

- للدالة: $f(x)=5x^4$ ⟵

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f(x)) &= \frac{d}{dx}(5x^4)\\ &= 5\frac{d}{dx}(x^4)\\ &= 5(4x^3)\\ &= 20x^3\end{aligned}$$

تابع أمثلة:

- أحسب y' للدالة: $f(x)=(2x^2-1)(3x+4)$

الحل:

$$f'(x)=(2x^2-1)\cdot\frac{d}{dx}(3x+4)+(3x+4)\cdot\frac{d}{dx}(2x^2-1)$$

$$f'(x)=(2x^2-1)\cdot 3+(3x+4)\cdot 4x$$

$$f'(x)=6x^2-3+12x^2+16x$$

$$f'(x)=18x^2+16x-3$$

هل هناك طريقة أخرى غير قانون الضرب لحل هذه المسألة؟

تابع

5. **تفاضل القسمة**: للدالتين f(x) و g(x) فإن:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right]=\frac{g(x)*\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]-f(x)*\frac{d}{dx}\left[g(x)\right]}{\left[g(x)\right]^2}$$

تفاضل حاصل قسمة

$$\frac{\text{مقام *تفاضل البسط - البسط*تفاضل المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال: القسمة

- أوجد المشتقة الأولى للدالة: $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$
- **الحل:**

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)\cdot\frac{d}{dx}(x)-(x)\cdot\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{(x^2+1)\cdot 1-(x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

تابع قوانين

6. **تفاضل السلسة**: للدالة: $y = [f(x)]^n$

قانون السلسلة

$$\frac{dy}{dx} = n[f(x)]^{n-1} * \frac{d}{dx}[f(x)]$$

أي

تفاضل القوس*تفاضل ما بداخل القوس

مثال: للدالة: $f(x)=(x^2+3)^3$

فإن: $f'(x)=3(x^2+3)^2\cdot(2x)$

تابع قوانين

7. للدالة الأسية: $y = e^x$

$$\frac{d}{dx}\left[e^x\right] = e^x$$

- ومن قانون السلسلة:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{[f(x)]}\right] = e^{f(x)} * \frac{d}{dx}[f(x)]$$

أي

الدالة نفسها في تفاضل الأس

مثال

- أوجد المشتقة الاولى لهذه الدالة:

$$f(x) = x^2 e^x$$

- **الحل:** من قانون الـ....؟

$$f'(x) = x^2 e^x + e^x 2x$$

- للدالة $y = \ln x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

- ومن قانون السلسلة:

$$\frac{d}{dx}\ln[f(x)] = \frac{1}{f(x)}\frac{d}{dx}[f(x)]$$

- مثال: فاضل الدالة للمتغير المستقل بها

$$y = \ln\left(1+x^2\right)$$

- الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(1+x^2\right)} * 2x = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)}$$

مسائل:

- أوجد المشتقة الأولى للدوال:

$$h(x)=\sqrt[3]{3x^2-1}$$

$$f(x)=x^3\left(\sqrt{x}-1\right)$$

$$f(x)=\sqrt{3x^2+4x}=\left(3x^2+4x\right)^{1/2}$$

$$\boldsymbol{f(t)=\left(e^t+2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)=\mathrm{e}^{\sqrt{5\mathrm{x}}}$$

الدوال في أكثر من متغير واحد:

$$y = f(x_1, x_2, x_3 \dots, x_n)$$

- عندما تكون الدالة في أكثر من متغير واحد تسمى المشتقة الأولى لها:

المشتقة الأولى الجزئية

- ويرمز لها بالرمز:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}$$

- وللحصول على هذه المشتقة نثبت المتغيرات الأخرى (أى نعاملها معاملة الثابت عند اجراء عملية التفاضل).

مثال

- للدالة: $w = x^2 - xy + y^2 + 2yz + 2z^2 + z,$
- أوجد كلا من:

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \text{and} \quad \frac{\partial w}{\partial z}.$$

- الحل: لايجاد هذه المشتقات الجزئية نعامل المتغيرين الآخرين كثوابت:
- لايجاد $\frac{\partial w}{\partial x}$ نعامل كلا من (y) و (z) معاملة الثابت:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x - y$$

تابع

- ولايجاد $\frac{\partial w}{\partial z}$ نتبع نفس الاسلوب: $\frac{\partial w}{\partial y}$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -x + 2y + 2z$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2y + 4z + 1$$

المشتقات العليا (متغير واحد)

- لبعض الدوال يمكن ايجاد أكثر من مشتقة (أي يمكن مفاضلتها عدة مرات).
- وهذه بعض الرموز المستخدمة للاشارة للمشتقات العليا (أي بعد المشتقة الأولى)

المشتقة	الرمز	
الثانية	f''	$\frac{d^2y}{dx^2}$
الثالثة	f'''	$\frac{d^3y}{dx^3}$
الرابعة	$f^{(4)}$	$\frac{d^4y}{dx^4}$
النونية	$f^{(n)}$	$\frac{d^ny}{dx^n}$

تابع

- لاحظ أن كل مشتقة عليا تأتي من اجراء عملية التفاضل مرة أخرى على المشتقة قبلها، فمثلا للدالة: $y = f(x)$:

$$f' = \frac{dy}{dx}$$

$$f'' = \frac{d^2y}{dx^{:2}} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]$$

$$f''' \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^2x}{dx^{:2}}\right]$$

$$f^n = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right]$$

مثال

- للدالة: $y = 4x^3 - \frac{2}{x}$
- أوجد المشتقات: الأولى، الثانية والثالثة:
- الحل: يمكن كتابة هذه الدالة كالآتي: $y = 4x^3 - 2x^{-1}$
- وتكون المشتقات الثلاث كالتالي:

$$y' = 12x^2 + 2x^{-2}$$

$$y'' = 24x - 4x^{-3}$$

$$y''' = 24 + 12x^{-4}$$

المشتقات العليا الجزئية لدالة في متغيرين

المشتقات العليا الجزئية (الدرجة الثانية) للدالة $g = f(x,y)$ هي كالآتي:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

أمثلة

- أوجد **كل** المشتقات الجزئية الثانية للدالة: $f(x,y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y$
- الحل:

$f(x,y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y$

$f_x(x,y) = 3y^2 + 10xy$

$f_{xx}(x,y) = 10y$ ← 1

$f(x,y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y$

$f_y(x,y) = 6xy - 2 + 5x^2$

$f_{yy}(x,y) = 6x$ ← 2

$f(x,y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y$

$f_x(x,y) = 3y^2 + 10xy$

$f_{xy}(x,y) = 6y + 10x$ ← 3

$f(x,y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y$

$f_y(x,y) = 6xy - 2 + 5x^2$

$f_{yx}(x,y) = 6y + 10x$ ← 4

لاحظ: $f_{xy} = f_{yx}$