مسألة التخصيص

Assignment Problem

مسألة التخصيص (الإسناد) (التعيين)

- إحدى تطبيقات البرمجة الخطية
- من مسائل الشبكات، وتعتبر حالة خاصة من مسألة النقل
  - يمكن تحويل مسألة التخصيص إلى مسألة نقل (ويمكن أيضا تحويل مسألة النقل إلى مسألة تخصيص).
  - طريقة سمبلكس النقل غير فعالة لتطبيقها على مسألة التخصيص.
- هي مسألة تخصيص (إسناد ، تعيين):
  - وظائف إلى موظفين
  - مهام إلى مكائن (آلات)
  - موظفي مبيعات إلى مناطق بيع
  - مشاريع إلى شركات

مسألة التخصيص

- هي مسألة تخصيص مجموعة n من المهمات إلى مجموعة n من المنفذين.
- كل منفذ يسند له تنفيذ مهمة واحدة فقط
- كل مهمة يسند تنفيذها لمنفذ واحد فقط
- عند إسناد المنفذ i لتنفيذ المهمة j يكون هناك تكلفة (أو ربح) c_{ij}.
- الهدف تقليل تكاليف (أو زيادة أرباح) التخصيص.

مثال

مدير قسم المحاسبة في إحدى الشركات لديه أربعة موظفين لتنفيذ أربعة مهام أساسية للقسم. زمن إنجاز المهمة يختلف من موظف لآخر حسب المهمة.

كل موظف سيعمل على تنفيذ مهمة واحدة فقط، وكل مهمة سيتم تنفيذها من قبل موظف واحد فقط.

الجدول التالي يبين زمن (بالأيام) تنفيذ كل مهمة لكل موظف:

مثال

	مهمة-1	مهمة-2	مهمة-3	مهمة-4
موظف-1	14	5	8	7
موظف-2	2	12	6	5
موظف-3	7	8	3	9
موظف-4	2	4	6	10

ما هو التخصيص (الإسناد) الأمثل لهذه المهام الأربع للموظفين الأربعة، وذلك ليكون مجموع زمن تنفيذ هذه المهام أقل ما يمكن.

البرنامج الرياضي الخطي

متغيرات القرار:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم تخصيص الموظف } i \text{ للمهمة } j \\ 0 & \text{إذا لم يتم تخصيص الموظف } i \text{ للمهمة } j \end{cases}$$

$$i = 1\,,\,2\,,\,3\,,\,4 \quad \text{and} \quad j = 1\,,\,2\,,\,3\,,\,4$$

يعتبر برنامج خطي عددي ثنائي القيمة

binary integer linear program

البرنامج الرياضي الخطي

$$
\begin{aligned}
\min\ z = \ & 14\,x_{11} + 5\,x_{12} + 8\,x_{13} + 7\,x_{14} \\
& + 2\,x_{21} + 12\,x_{22} + 6\,x_{23} + 5\,x_{24} \\
& + 7\,x_{31} + 8\,x_{32} + 3\,x_{33} + 9\,x_{34} \\
& + 2\,x_{41} + 4\,x_{42} + 6\,x_{43} + 10\,x_{44}
\end{aligned}
$$

s.t.

موظفين

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1
\end{aligned}
$$

كل موظف يسند لمهمة واحدة فقط

مهام

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1
\end{aligned}
$$

كل مهمة تسند لموظف واحد فقط

$x_{ij} = 0 \text{ or } 1 \quad i = 1, 2, \ldots, n \ , \quad j = 1, 2, \ldots, n$

البرنامج الرياضي الخطي بشكل عام

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{إذا تم تخصيص الموظف } i \text{ للمهمة } j \\ 0 & \text{إذا لم يتم تخصيص الموظف } i \text{ للمهمة } j \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{and} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\min \ z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

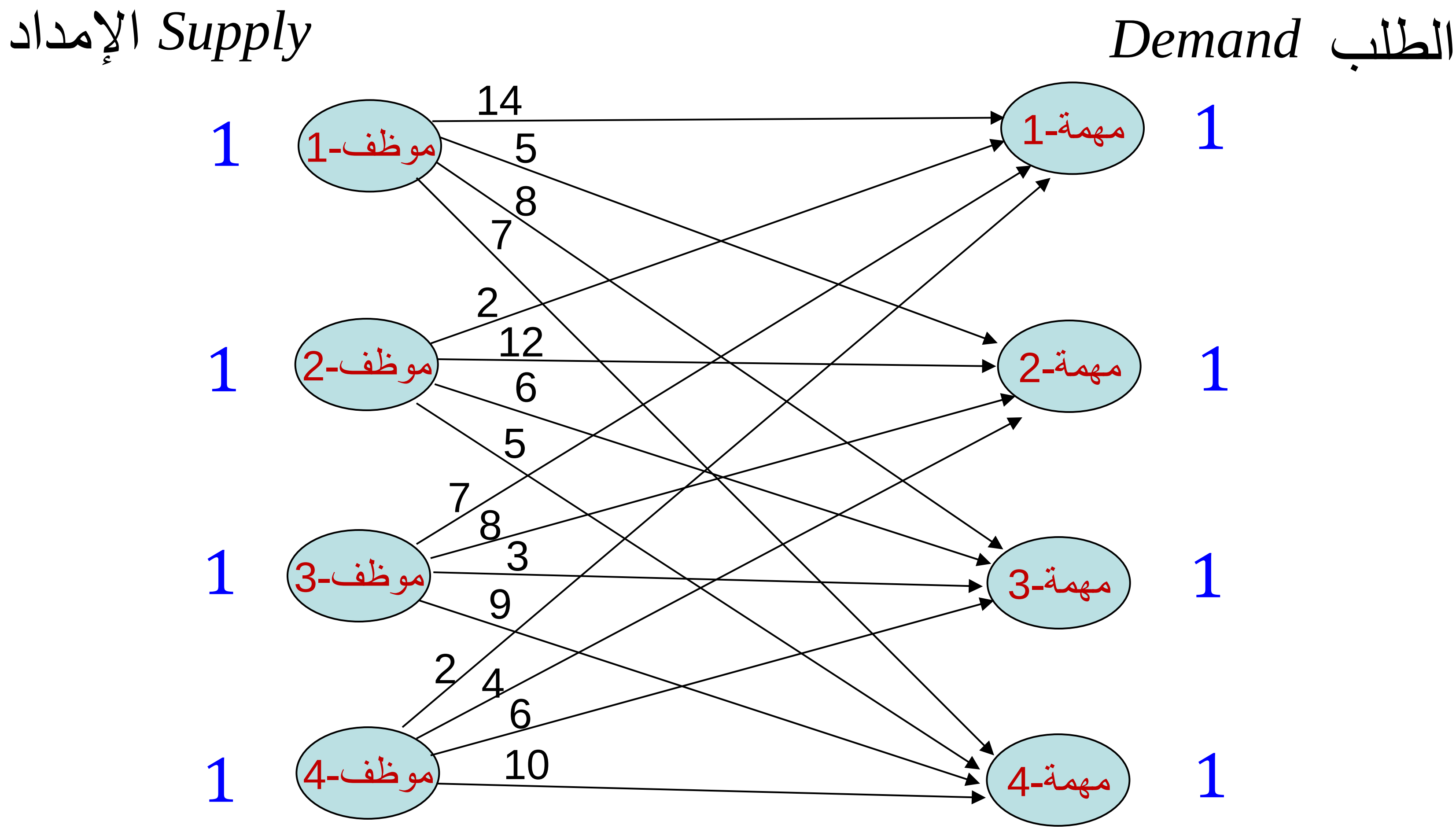
$s.t.$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} = 0 \text{ or } 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, n \ , \ j = 1, 2, \ldots, n$$

مسألة التخصيص – حالة خاصة من مسألة النقل



مسألة التخصيص – حالة خاصة من مسألة النقل

<u>البرامج الخطية</u>

تحقق خصائص البرنامج الخطي

<u>مسائل النقل</u>

معاملات المتغيرات في القيود 0 أو 1

<u>مسائل التخصيص</u>

معاملات المتغيرات في القيود 0 أو 1

الطرف الأيمن في القيود = 1

الطريقة الهنغارية (The Hungarian Method)

- خوارزمية لحل مسائل التخصيص.
- يجب ان تكون مسألة التخصيص <u>متزنة</u>:
  - عدد المهام = عدد المنفذين
  - قد نحتاج لافتراض مهمات وهمية أو منفذين وهميين لجعل المسألة متزنة، مع تكاليف تخصيص مساوية للصفر.
- تطبق على مسائل التخصيص من نوع : $\min \ z$
  - يمكن تطبيق الخوارزمية على مسائل التخصيص من نوع $\max \ z$ بعد ضرب عناصر مصفوفة الأرباح في -1 أو تحويل مصفوفة الأرباح لمصفوفة فرص ضائعة (لن ندرسها).

الطريقة الهنغارية

- تعتمد على مصفوفة التكاليف فقط.
- سنفترض أن تكلفة تخصيص المهمة i للمنفذ j غير سالبة.

أي أن : $c_{ij} \geq 0$

- تعمل باستخدام النظرية التالية:

إذا أضفنا أو طرحنا قيمة ثابتة من جميع القيم في أحد الصفوف أو في أحد الأعمدة في مصفوفة التكاليف ، فإن التخصيص الأمثل لا يتغير.

(تنطبق النظرية أيضا على مسألة النقل المتزنة)

الطريقة الهنغارية

لتكن مصفوفة تكاليف الإسناد كالتالي:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|l}
\hline
c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & \rightarrow p_1 \\
\hline
c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & \rightarrow p_2 \\
\hline
c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & \rightarrow p_3 \\
\hline
c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & \rightarrow p_4 \\
\hline
\end{array}$$

خطوة 1: لكل صف i حدد العنصر الأصغر وليكن p_i

$$p_i = \min \{c_{ij} : j = 1 , 2 , \dots , n\}$$

الطريقة الهنغارية

خطوة 2: لكل صف i اطرح العنصر الأصغر p_i من كل عنصر في الصف لتنتج المصفوفة الجديدة التالية:

$c_{11}-p_1$	$c_{12}-p_1$	$c_{13}-p_1$	$c_{14}-p_1$
$c_{21}-p_2$	$c_{22}-p_2$	$c_{23}-p_2$	$c_{24}-p_2$
$c_{31}-p_3$	$c_{32}-p_3$	$c_{33}-p_3$	$c_{34}-p_3$
$c_{41}-p_4$	$c_{42}-p_4$	$c_{43}-p_4$	$c_{44}-p_4$

الطريقة الهنغارية

لتكن المصفوفة الناتجة هي:

d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}
d_{21}	d_{22}	d_{23}	d_{24}
d_{31}	d_{32}	d_{33}	d_{34}
d_{41}	d_{42}	d_{43}	d_{44}
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
q_1	q_2	q_3	q_4

خطوة 3: لكل عمود j حدد العنصر الأصغر وليكن q_j

$$q_j = \min \{d_{ij} : i = 1 , 2 , \dots , n\}$$

الطريقة الهنغارية

خطوة 4: لكل عمود j اطرح العنصر الأصغر q_j من كل عنصر في العمود لتنتج المصفوفة الجديدة التالية:

$d_{11}-q_1$	$d_{12}-q_2$	$d_{13}-q_3$	$d_{14}-q_4$
$d_{21}-q_1$	$d_{22}-q_2$	$d_{23}-q_3$	$d_{24}-q_4$
$d_{31}-q_1$	$d_{32}-q_2$	$d_{33}-q_3$	$d_{34}-q_4$
$d_{41}-q_1$	$d_{42}-q_2$	$d_{43}-q_3$	$d_{44}-q_4$

الطريقة الهنغارية

خطوة 5: اختبار الأمثلية:

أوجد k = أقل عدد ممكن من الخطوط الأفقية والعمودية التي تغطي جميع الأصفار في المصفوفة.

إذا كان k = عدد الصفوف (أو عدد الأعمدة) $\Leftrightarrow$ الحل أمثل. <u>توقف</u>.

[يمكن إثبات أنه يمكن تخصيص k منفذ إلى k مهمة ، لذا نتوقف

عندما k = عدد المنفذين (الصفوف) = عدد المهمات (الأعمدة)]

الطريقة الهنغارية

خطوة 6: إذا كان k أقل من عدد الصفوف:

- حدد أقل عنصر من العناصر **الغير مغطاه** بخط أفقي أو عمودي وليكن h.
- اطرح العدد h من جميع العناصر **الغير مغطاه**.
- أضف العدد h إلى جميع العناصر **المغطاة بخطين** (خط أفقي وخط عمودي).
- انتقل إلى خطوة 5.

تحديد الحل الأمثل في المصفوفة النهائية

1. لكل صف: إذا وجدت خلية واحدة فقط في الصف ذات تكلفة صفر، ولتكن خلية $(i\ ,j)$ ، اجعل $x_{ij}^{*}=1$ ثم احذف الصف i والعمود j من التعيينات اللاحقة.

2. لكل عمود: إذا وجدت خلية واحدة فقط في العمود ذات تكلفة صفر، ولتكن خلية $(i\ ,j)$ ، اجعل $x_{ij}^{*}=1$ ثم احذف الصف i والعمود j من التعيينات اللاحقة.

3. في حالة عدم وجود صف أو عمود متبقي يحتوي على خلية واحدة فقط ذات تكلفة صفر، فيتم التخصيص في الصف أو العمود الأقل أصفارا. يتم التعيين بطريقة اختيارية لأحد الخلايا الموجودة ذات القيمة صفر، ويحذف الصف والعمود من التعيينات اللاحقة. ثم نعيد الخطوتين 1 و 2.

تحديد الحل الأمثل في المصفوفة النـهائيـة

الحل الأمثل الوحيد:

يكون الحل الأمثل وحيد إذا وجدت خلية صفرية وحيدة في أي صف أو عمود.

الحل الأمثل المضاعف أو المتعدد:

يكون الحل الأمثل مضاعف أومتعدد إذا وجدت أكثر من خلية صفرية في أي صف أو عمود.

مثال: الطريقة الهنغارية

المسألة
متزنة
عدد الصفوف
=
عدد الأعمدة

14	5	8	7	$\rightarrow p_1 = 5$
2	12	6	5	$\rightarrow p_2 = 2$
7	8	3	9	$\rightarrow p_3 = 3$
2	4	6	10	$\rightarrow p_4 = 2$

حدد العنصر الأصغر في كل صف ، ثم اطرحه من قيم الصف

9	0	3	2
0	10	4	3
4	5	0	6
0	2	4	8

مثال: الطريقة الهنغارية

9	0	3	2
0	10	4	3
4	5	0	6
0	2	4	8

$\downarrow$ $q_1 = 0$ $\quad\downarrow$ $q_2 = 0$ $\quad\downarrow$ $q_3 = 0$ $\quad\downarrow$ $q_4 = 2$

حدد العنصر الأصغر في كل عمود ، ثم اطرحه من قيم العمود

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

مثال: الطريقة الهنغارية

تغطية الخلايا الصفرية بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

الأفضل نبدأ بتغطية الصفوف أو الأعمدة التي تحتوي على أكثر عدد من الأصفار

عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة، إذن الحل ليس أمثل

مثال: الطريقة الهنغارية

حدد العنصر الأصغر في الخلايا غير المغطاة

9	0	3	0
0	10	4	1
4	5	0	4
0	2	4	6

h

مثال: الطريقة الهنغارية

اطرح العنصر الأصغر من العناصر غير المغطاة
أضف العنصر الأصغر على العناصر المغطاة بخطين

9 +1	0	3	0
0	10-1	4-1	1-1
4 +1	5	0	4
0	2-1	4-1	6-1

مثال: الطريقة الهنغارية

اطرح العنصر الأصغر من العناصر غير المغطاة

أضف العنصر الأصغر على العناصر المغطاة بخطين

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

مثال: الطريقة الهنغارية

تغطية الخلايا الصفرية بأقل عدد من الخطوط الأفقية والعمودية

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

عدد الخطوط = عدد الصفوف أو الأعمدة

وصلنا للحل الأمثل

مثال: الطريقة الهنغارية

تحديد الإسناد الأمثل

نبدأ بالصفوف أو الأعمدة التي تحتوي على أقل عدد من الأصفار، إذا وجدت خلية واحدة فقط في الصف أوالعمود ذات تكلفة صفر، ولتكن خلية $(i\ ,j)$ ، اجعل $x_{ij}^{*}=1$ ثم احذف الصف i والعمود j من التعيينات اللاحقة.

10	0	3	0
0	9	3	0
5	5	0	4
0	1	3	5

$$x_{33}^{*}=1,\ x_{41}^{*}=1,\ x_{12}^{*}=1,\ x_{24}^{*}=1$$

مثال: الطريقة الهنغارية

تحديد الإسناد الأمثل

نعود للجدول الأساسي للمسألة، ونحدد أماكن الأصفار، ثم نحسب دالة الهدف

14	5	8	7
2	12	6	5
7	8	3	9
2	4	6	10

$$x_{12}^{*} = 1 \quad x_{24}^{*} = 1 \quad x_{33}^{*} = 1 \quad x_{41}^{*} = 1$$

$$z = c_{12} + c_{24} + c_{33} + c_{41}$$

$$= 5 + 5 + 3 + 2 = 15$$ يوم

مثال: الطريقة الهنغارية

- قيمة دالة الهدف المثلى = 15

- لاحظ أن:

$$
\begin{aligned}
& p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + h \\
= \;& 5 + 2 + 3 + 2 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 \\
= \;& 15
\end{aligned}
$$

مسألة التخصيص: مثال 2

شركة تطوير عقاري أسند إليها تنفيذ خمسة مشاريع. تمتلك هذه الشركة خمس فرق إنشاء مختلفة تتفاوت فيما بينها بالمعدات والإمكانات وأعداد العمال. يستغرق كل فريق وقت (بالأشهر) لإنجاز أي من المشاريع حسب ما هو موضح في الجدول التالي:

	المشروع-1	المشروع-2	المشروع-3	المشروع-4	المشروع-5
الفريق-1	12	6	11	24	6
الفريق-2	15	9	13	17	5
الفريق-3	20	10	12	18	6
الفريق-4	20	10	12	18	6
الفريق-5	13	12	9	20	4

مسألة التخصيص: مثال 2

12	6	11	24	6	$\rightarrow p_1 = 6$
15	9	13	17	5	$\rightarrow p_2 = 5$
20	10	12	18	6	$\rightarrow p_3 = 6$
20	10	12	18	6	$\rightarrow p_4 = 6$
13	12	9	20	4	$\rightarrow p_5 = 4$

6	0	5	18	0
10	4	8	12	0
14	4	6	12	0
14	4	6	12	0
9	8	5	16	0
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$q_1 = 6$	$q_2 = 0$	$q_3 = 5$	$q_4 = 12$	$q_5 = 0$

مسألة التخصيص: مثال 2

0	0	0	6	0
4	4	3	0	0
8	4	1	0	0
8	4	1	0	0
3	8	0	4	0

عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف، إذن الحل ليس أمثل

0	0	0	**6+1**	**0+1**
4-1	**4-1**	**3-1**	0	0
8-1	**4-1**	**1-1**	0	0
8-1	**4-1**	**1-1**	0	0
3	8	0	**4+1**	**0+1**

مسألة التخصيص: مثال 2

0	0	0	7	1
3	3	2	0	0
7	3	3	0	0
7	3	0	0	0
3	8	0	5	1

عدد الخطوط أقل من عدد الصفوف، إذن الحل ليس أمثل

0	0	**0+3**	**7+3**	**1+3**
3-3	**3-3**	2	0	0
7-3	**3-3**	0	0	0
7-3	**3-3**	0	0	0
3-3	**8-3**	0	5	1

مسألة التخصيص: مثال 2

0	0	3	10	4
0	0	2	0	0
4	0	0	0	0
4	0	0	0	0
0	5	0	5	1

عدد الخطوط = عدد الصفوف

وصلنا للحل الأمثل

لذا نبدأ بتحديد الاسناد الأمثل

مسألة التخصيص: مثال 2

0	0	3	10	4
0	0	2	0	0
4	0	0	0	0
4	0	0	0	0
0	5	0	5	1

$x_{12}^* = 1$
$x_{21}^* = 1$
$x_{35}^* = 1$
$x_{44}^* = 1$
$x_{53}^* = 1$

$z = 54$

12	6	11	24	6
15	9	13	17	5
20	10	12	18	6
20	10	12	18	6
13	12	9	20	4

مسألة التخصيص: مثال 2

0	0	3	10	4
0	0	2	0	0
4	0	0	0	0
4	0	0	0	0
0	5	0	5	1

حل أمثل آخر

$$x_{11}^* = 1$$
$$x_{22}^* = 1$$
$$x_{34}^* = 1$$
$$x_{45}^* = 1$$
$$x_{53}^* = 1$$

$$z = 54$$

12	6	11	24	6
15	9	13	17	5
20	10	12	18	6
20	10	12	18	6
13	12	9	20	4

مسألة التخصيص: مثال 2

0	0	3	10	4
0	0	2	0	0
4	0	0	0	0
4	0	0	0	0
0	5	0	5	1

حل أمثل ثالث آخر

$x_{11}^* = 1$
$x_{25}^* = 1$
$x_{34}^* = 1$
$x_{42}^* = 1$
$x_{53}^* = 1$

$z = 54$

12	6	11	24	6
15	9	13	17	5
20	10	12	18	6
20	10	12	18	6
13	12	9	20	4

مسألة التخصيص: مثال 2

- قيمة دالة الهدف المثلى = 54

- في جميع الحلول المثلى قيمة دالة الهدف لاتتغير.

- لاحظ أن:

$$
\begin{aligned}
& p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + h_1 + h_2 \\
= \;& 6 + 5 + 6 + 6 + 4 + 6 + 0 + 5 + 12 + 0 + 1 + 3 \\
= \;& 54
\end{aligned}
$$