مسألة النقل

Transportation Problem

مسألة النقل

- إحدى تطبيقات البرمجة الخطية
  - منتشرة في المجالات: الصناعية ، الزراعية ، العسكرية ، ...
- من مسائل الشبكات.
- هي مسألة نقل (منتجات ، أفراد ، طاقة كهربائية ، بيانات انترنت ، ...) من أماكن (تسمى أماكن الإمداد) إلى أماكن أخرى (تسمى أماكن الطلب).
- الهدف تقليل تكاليف النقل من أماكن الإمداد إلى أماكن الطلب.

مثال: توزيع الكهرباء

شركة كهرباء لديها ثلاث محطات لتوليد الكهرباء في مناطق متفرقة لتأمين طلب استهلاك الكهرباء لأربع مدن.

الطاقة الانتاجية من الكهرباء من محطة-1 تبلغ 35 مليون كيلووات يوميا

الطاقة الانتاجية من الكهرباء من محطة-2 تبلغ 50 مليون كيلووات يوميا

الطاقة الانتاجية من الكهرباء من محطة-3 تبلغ 40 مليون كيلووات يوميا

ومن خلال بيانات الاستهلاك السابقة تبين أن:

الاستهلاك اليومي في وقت الذروة لـ مدينة-1 يبلغ 45 مليون كيلووات يوميا

الاستهلاك اليومي في وقت الذروة لـ مدينة-2 يبلغ 20 مليون كيلووات يوميا

الاستهلاك اليومي في وقت الذروة لـ مدينة-3 يبلغ 30 مليون كيلووات يوميا

الاستهلاك اليومي في وقت الذروة لـ مدينة-4 يبلغ 30 مليون كيلووات يوميا

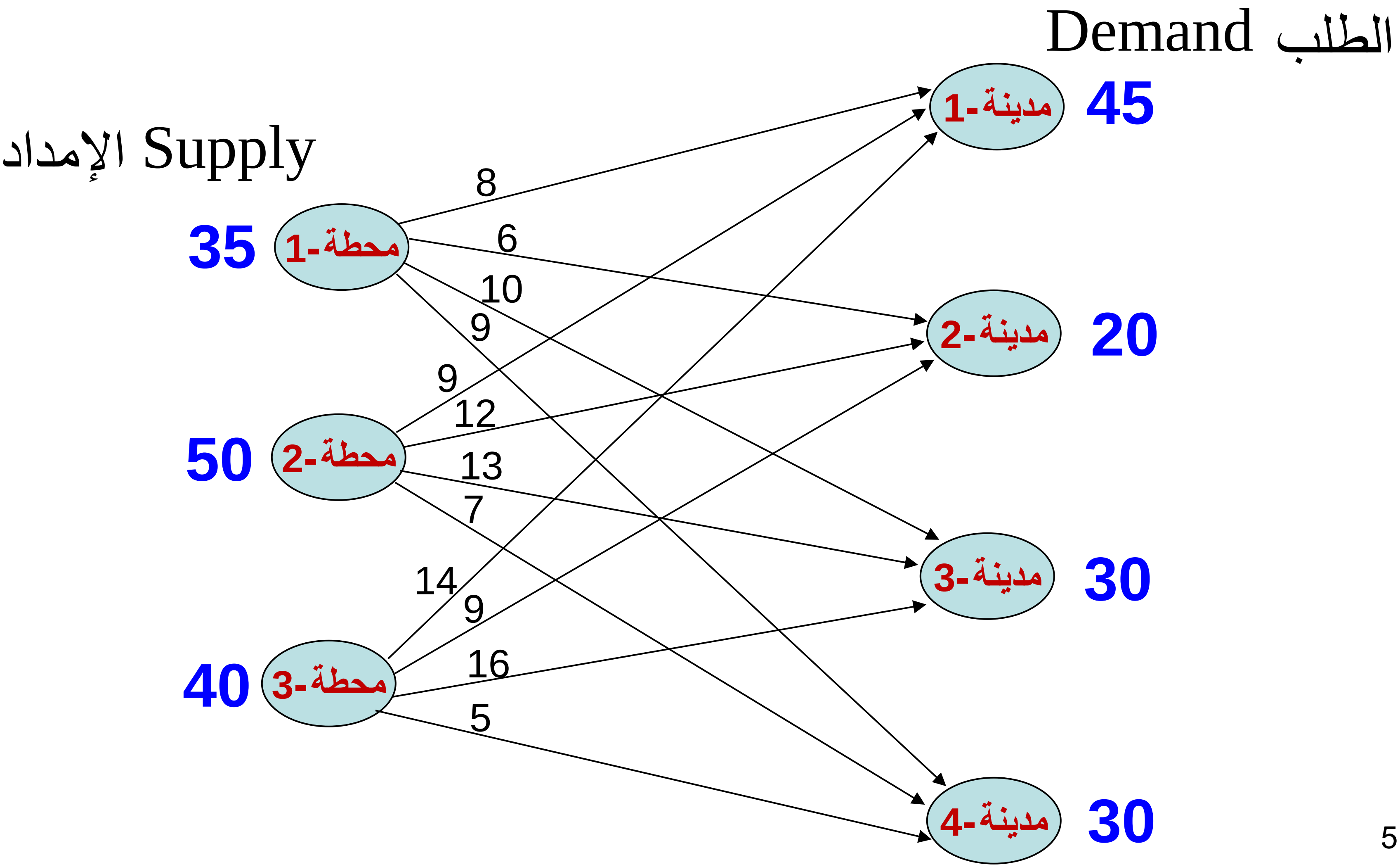
ولتباعد مواقع المحطات عن المدن يوجد تكلفة مقترنة بتأمين كل مليون كيلووات لأي مدينة من أي محطة من المحطات ، موضحة في الجدول التالي:

مثال: توزيع الكهرباء

التكاليف (ريال/مليون كيلووات)				
	إلى			
من	مدينة-1	مدينة-2	مدينة-3	مدينة-4
محطة-1	8	6	10	9
محطة-2	9	12	13	7
محطة-3	14	9	16	5

أوجد أفضل توزيع للكهرباء من محطات توليد الكهرباء الثلاث لتوفير استهلاك المدن الأربع من الكهرباء بأقل التكاليف.

رسم توضيحي


Demand الطلب
Supply الإمداد
35
محطة-1
50
محطة-2
40
محطة-3
مدينة-1
45
مدينة-2
20
مدينة-3
30
مدينة-4
30
8
6
10
9
9
12
13
7
14
9
16
5

البرنامج الرياضي الخطي

x_{ij} : ملايين الكيلووات المرسلة من محطة i إلى مدينة j يومياً

$$\begin{aligned}
\min\ z = \ & 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} \\
& + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} \\
& + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34}
\end{aligned}$$

s.t.

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &\le 35 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &\le 50 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &\le 40
\end{aligned}$$

كل محطة لا ترسل أكثر من طاقتها القصوى

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} &\ge 45 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &\ge 20 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &\ge 30 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} &\ge 30
\end{aligned}$$

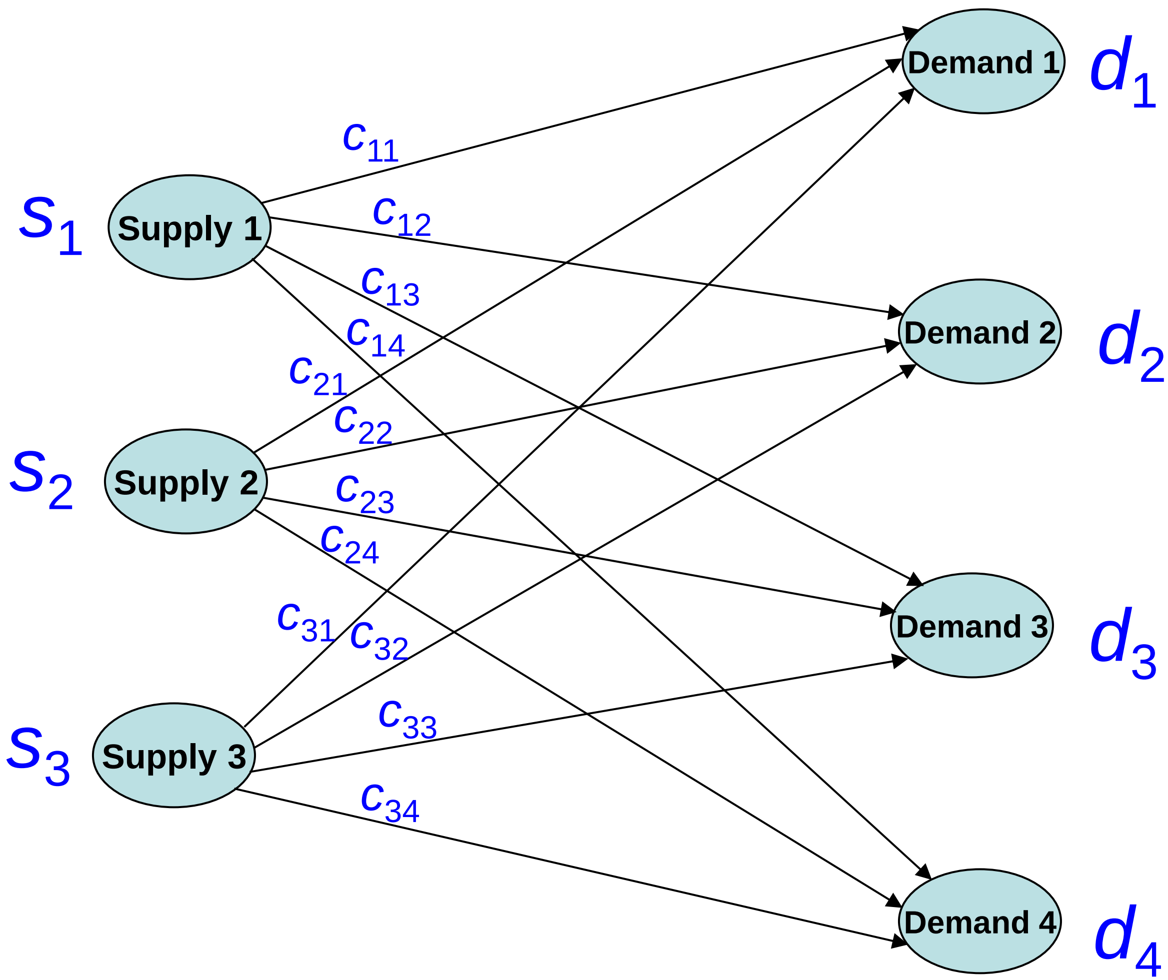
كل مدينة تستلم على الأقل طلبها

$$x_{ij} \ge 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \qquad j = 1, 2, 3, 4$$

العناصر الأساسية في مسألة النقل

1. مجموعة من عقد الإمداد (Supply Nodes) عددها m عقدة
2. مجموعة من عقد الطلب (Demand Nodes) عددها n عقدة
3. الطاقة القصوى للإمداد عند عقدة الإمداد i تساوي s_i
4. إجمالي الطلب عند عقدة الطلب j يساوي d_j
5. تكلفة نقل الوحدة من عقدة الإمداد i إلى عقدة الطلب j تساوي c_{ij}

مسألة النقل



ما هي الطريقة المثلى التي يتم بها نقل الوحدات من عقد الإمداد إلى عقد الطلب ؟؟

الصيغة العامة للنموذج الرياضي

x_{ij} = عدد الوحدات المنقولة من عقدة الإمداد i إلى عقدة الطلب j

$$i = 1 , 2 , \dots , m \quad , \quad j = 1 , 2 , \dots , n$$

- تكلفة نقل x_{ij} من عقدة الإمداد i إلى عقدة الطلب j = $c_{ij}\, x_{ij}$
- كل عقدة طلب يجب أن تحصل على الأقل على ما يغطي الطلب لديها
- كل عقدة إمداد يجب أن يرسل منها على الأكثر طاقتها القصوى للإمداد

الصيغة العامة للنموذج الرياضي

x_{ij} = عدد الوحدات المنقولة من عقدة الإمداد i إلى عقدة الطلب j

$$i = 1, 2, \ldots, m \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$s.t.$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

مسألة النقل

مسائل النقل

مسائل النقل المتزنة

إجمالي الطلب = إجمالي الإمداد

مسائل النقل غير المتزنة

إجمالي الطلب ≠ إجمالي الإمداد

عجز

إجمالي الطلب > إجمالي الإمداد

فائض

إجمالي الطلب < إجمالي الإمداد

مسألة النقل المتزنة

– الشرط الكافي لوجود حل أساسي ممكن هو أن يكون:

إجمالي الطلب = إجمالي الإمداد أي أن $\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$

– جميع قيود المتراجحات تصبح معادلات (رابطة).

– البرنامج سيكون في الصيغة القياسية.

$$\min z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

تمثيل مشكلة النقل على شكل جدول

					Supply
	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	$\cdots$	c_{1n} x_{1n}	s_1
	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	$\cdots$	c_{2n} x_{2n}	s_2
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	$\cdots$	c_{mn} x_{mn}	s_m
Demand	d_1	d_2	$\cdots$	d_n	

قيمة الخلية $(i\ ,\ j)$ في جدول النقل تمثل قيمة المتغير x_{ij}

مثال توزيع الكهرباء

				Supply
8 x_{11}	6 x_{12}	10 x_{13}	9 x_{14}	**35**
9 x_{21}	12 x_{22}	13 x_{23}	7 x_{24}	**50**
14 x_{31}	9 x_{32}	16 x_{33}	5 x_{34}	**40**
Demand **45**	**20**	**30**	**30**	

حل مسألة النقل

- يمكن حلها بطريقة السمبلكس
  - ليست الطريقة المناسبة
  - عدد المتغيرات والقيود كبير جدا في الغالب
  - قد تستغرق عدد كبير من المراحل للوصول إلى الحل الأمثل

- طريقة سمبلكس مسائل النقل:
  - جميع معاملات متغيرات القرار في القيود إما **0** أو **1**
    هذا يسهل الحسابات
  - يجب أن تكون المسألة متزنة

طريقة سمبلكس مسائل النقل

1. إيجاد حل أساسي ممكن مبدئي:
   يمكن أن نستخدم أي من الطرق الثلاث التالية:
   - طريقة الركن الشمالي الغربي (North-West Corner Method)
   - طريقة اقل التكاليف (Minimum Cost Method)
   - طريقة فوجل (Vogel's Method)

2. تحسين الحل الأساسي الممكن حتى الوصول للحل الأمثل:
   أ) اختبر أمثلية الحل: طريقة التوزيع المعدل (Modified Distribution)
   ب) انتقل لحل أفضل : طريقة الحجر المتنقل (Stepping Stone Method)

الحل الأساسي الممكن في مسألة النقل

لكي يكون أي حل لجدول النقل المتزن حل أساسي ممكن ، يجب أن يحقق:

- $m+n-1$ خليه مملوءة (متغيرات أساسية) بقيم غير سالبة.
  بقية الخلايا تبقى خاليه (متغيرات غير أساسية) وقيمتها تساوي الصفر.
- يجب أن تكون الخلايا المملؤة مستقلة عن بعض ، أي لا يمكن تكوين حلقة تحوير بينها (سندرس حلقات التحوير فيما بعد).
- مجموع قيم الخلايا المملوءة في الصف i = الإمداد عند الصف i
- مجموع قيم الخلايا المملوءة في العمود j = الطلب عند العمود j

قد يوجد من بين الخلايا المملوءة ما هو مملوء بقيمة تساوي صفر. عندها يسمى الحل الأساسي الممكن منحل (degenerate).

مثال توزيع الكهرباء

					supply
	8	6 **10**	10 **25**	9	**35**
	9 **45**	12	13 **5**	7	**50**
	14	9 **10**	16	5 **30**	**40**
Demand	**45**	**20**	**30**	**30**	

عدد الخلايا المملوءة $= m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$

هذا يعتبر مثال لأحد **الحلول الأساسية الممكنة**:

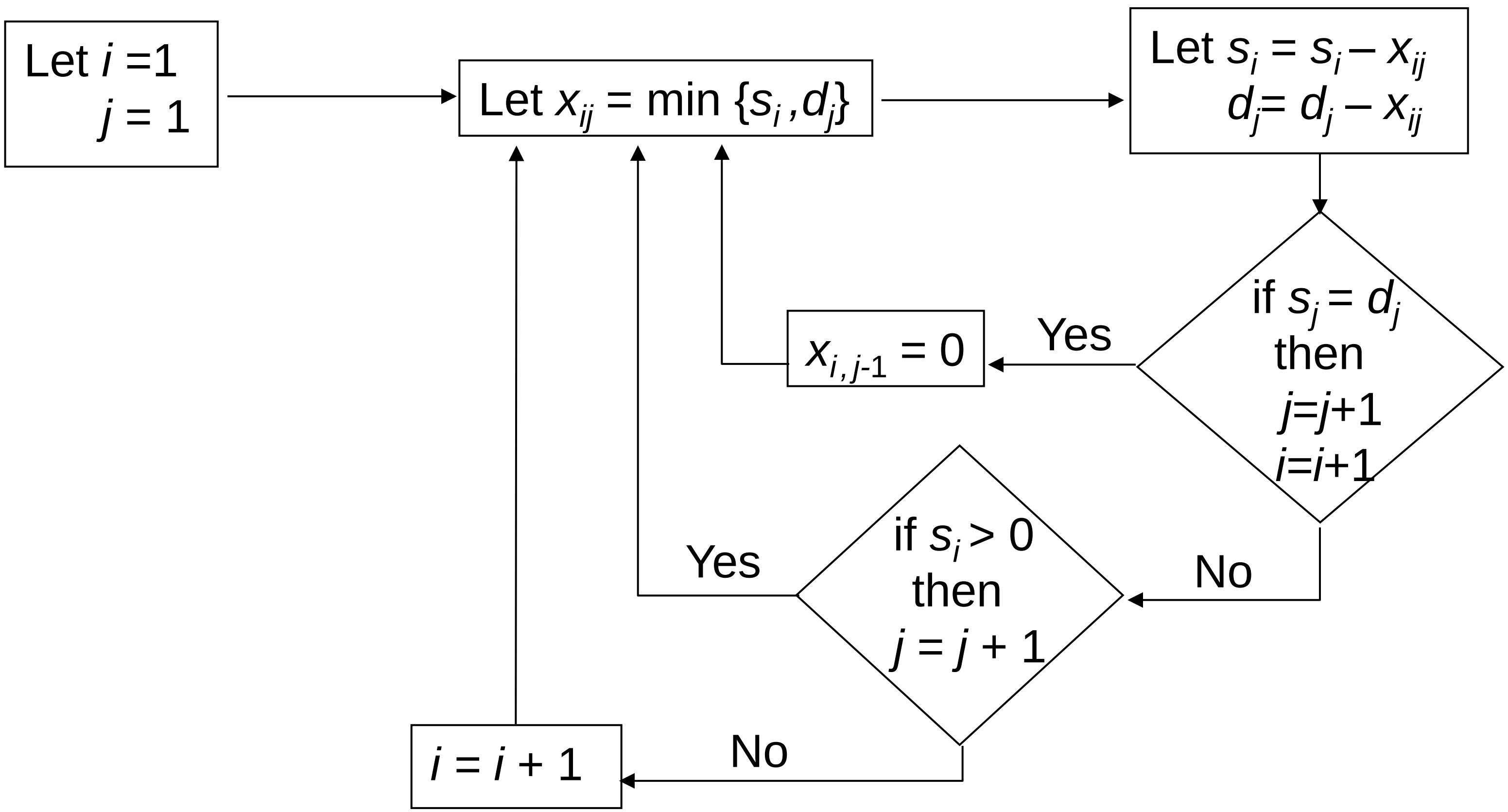
$$x_{12} = 10 \,,\, x_{13} = 25 \,,\, x_{21} = 45 \,,\, x_{23} = 5 \,,\, x_{32} = 10 \,,\, x_{34} = 30,$$

$$x_{11} = x_{14} = x_{22} = x_{24} = x_{31} = x_{33} = 0$$

$$z = 8\,x_{11} + 6\,x_{12} + 10\,x_{13} + 9\,x_{14} + 9\,x_{21} + 12\,x_{22} + 13\,x_{23} + 7\,x_{24} + 14\,x_{31} + 9\,x_{32} + 16\,x_{33} + 5\,x_{34} = 1020$$

إيجاد حل أساسي ممكن مبدئي

طريقة الركن الشمالي الغربي :



إيجاد حل أساسي ممكن مبدئي

طريقة الركن الشمالي الغربي :

- اختر الخلية غير المملوءة ولتكن $(i\ ,\ j)$ التي في الركن الشمالي الغربي. وليكن $s_i =$ كمية الإمداد المتبقية ، $d_j =$ كمية الطلب المتبقية شريطة أن يكون أما $s_i > 0$ أو $d_j > 0$
  - إذا كان $s_i < d_j$
    - $x_{ij} = s_i$
    - ينتهي الإمداد من الصف i .
  - إذا كان $s_i > d_j$
    - $x_{ij} = d_j$
    - ينتهي الطلب من العمود j .

إيجاد حل أساسي ممكن مبدئي

طريقة الركن الشمالي الغربي

- إذا كان $s_i = d_j$
  - $x_{ij} = s_i = d_j$
  - نضع: $x_{i+1,j} = 0$ (خلية أساسية قيمتها تساوي الصفر).
  - ينتهي الإمداد من الصف i .
  - ينتهي الطلب من العمود j .
  - تسمى المسألة في هذه الحالة: مسألة نقل منحلة (degenerate).
- نكرر العملية لحين تخصيص كل الإمداد لكل عقد الطلب.

طريقة الركن الشمالي الغربي

- نكون جدول النقل بالاعتماد على الطلب والامداد والتكاليف.
- نأخذ أول خلية ونملأها بالقيمة الأقل بين الطلب والامداد ونضع الباقي على يمين الصف وأسفل العمود.
- إذا حصلنا على القيمة (صفر) في الصف نشطب بقية الخلايا في نفس الصف (أي لانقوم بتعبئة الخلايا الموجوده في نفس الصف) وننتقل لتعبئة الخلايا في الصف التالي. بالمثل بالنسبة للعمود، إذا حصلنا على القيمة (صفر) في العمود نشطب بقية الخلايا في نفس العمود (أي لانقوم بتعبئة الخلايا الموجوده في نفس العمود) وننتقل لتعبئة الخلايا في العمود التالي.
- ثم نأخذ أول خلية فارغة ونملأها بالقيمة الأقل بين الطلب والامداد ونضع الباقي على يمين الصف وأسفل العمود، نكرر الخطوات السابقة.
- لابد أن يكون عدد الخلايا المملوءه يساوي $m+n-1$

المثال التالي يوضح طريقة عمل خوارزمية الركن الشمالي الغربي.

إيجاد حل أساسي ممكن مبدئي

مثال توزيع الكهرباء: طريقة الركن الشمالي الغربي

Min(20,40) Min(20,30)

					Supply			
Min(35,45)	8 **35**	6	10	9	35	0		
Min(10,50)	9 **10**	12 **20**	13 **20**	7	50	40	20	0
	14	9	16 **10**	5 **30**	40	30	0	
Demand	45	20	30	30				
45-35	10	0	10	0				
	0		0					

50-10 40-20 40-10

Min(10,50) 30-20

إيجاد حل أساسي ممكن مبدئي

مثال آخر: طريقة الركن الشمالي الغربي

				Supply
8 **35**	6	10	9	~~35~~ 0
9 **10**	12 **20**	13 **20**	7	~~50~~ ~~40~~ ~~20~~ 0
14	9	16 **0**	5 **40**	~~40~~ 0
Demand: ~~45~~ ~~10~~ 0	~~20~~ 0	~~20~~ 0	~~40~~ 0	

خلية مملوء بقيمة تساوي صفر. عندها يسمى الحل الأساسي الممكن منحل (degenerate).

$$x_{11} = 35 \;,\; x_{21} = 10 \;,\; x_{22} = 20,\; x_{23} = 20 \;,\; x_{33} = 0 \;,\; x_{34} = 40,\; x_{12} = x_{13} = x_{14} = x_{24} = x_{31} = x_{32} = 0$$

$$z = 8\,x_{11} + 6\,x_{12} + 10\,x_{13} + 9\,x_{14} + 9\,x_{21} + 12\,x_{22} + 13\,x_{23} + 7\,x_{24} + 14\,x_{31} + 9\,x_{32} + 16\,x_{33} + 5\,x_{34} = 1070$$

مثال :- تمتلك شركة وطنية مصنعين للأسمنت S_1 ، S_2 . وتقوم هذه الشركة بتوزيع منتجات هذين المصنعين على ثلاث رئيسية في البلاد D_1, D_2, D_3 . الجدول التالي يعطي تكاليف النقل بالريال للطن "الوحدة" من الأسمنت من المصانع الى المناطق . تهدف الشركة إلى جعل التكاليف اليومية الكلية لنقل الأسمنت من المصنعين إلى المناطق الثلاثة أقل ما يمكن . المطلوب إيجاد الحل الأمثل للشركة إذا كان إنتاج المصنعين S_1, S_2 هو 100 و 110 طن يومياً على الترتيب وحاجة المناطق D_1 ، D_2 ، D_3 هي 80, 70, 60 طن يومياً على الترتيب

	D_1	D_2	D_3
S_1	1	2	3
S_2	4	1	5

الحل :- (1) طريقة الحل باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي :

(1) نكون الجدول التالي ، " حالة اتزان ⇐ اجمالي الطلب = $80 + 70 + 60 = 210$

اجمالي المعروض = $110 + 100 = 210$

(2) نبدأ بالخلية (S_1, D_1) ونملأها بـ $\min\{100,80\}=80$ ويتبقى مقدار قيمته 20 وهنا نكون قد ملأنا احتياج المنطقة D_1 وبالتالي نتحرك إلى الخلية المجاورة وهي (S_1, D_2)

	D_1	D_2	D_3	المعروض
S_1	x_{11} [1] 80	x_{12} [2] 20	x_{13} [3]	100 ~~20~~ 0
S_2	x_{21} [4]	x_{22} [1] 50	x_{23} [5] 60	110 ~~60~~ 0
الطلب	~~80~~ 0	~~70~~ ~~50~~ 0	~~60~~ 0	

(3) نملأ الخلية (S_1, D_2) بالمقدار $\min\{20,70\}=20$ ونكون بذلك قد أخذنا كل المعروض من المصدر S_1 لكن يتبقى المنطقة D_2 لم يتم ملء جميع احتياجاتها وبالتالي نتحرك إلى الخلية بالأسفل في العمود حتى تحقق احتياجات المنطقة D_2 .

(4) نملأ الخلية (S_2, D_2) بالمقدار $\min\{50,110\}=50$ ويتبقى مقدار 60 من المصدر الثاني لأن احتياجات الخلية D_2 قد تم تلبيتها . معنى ذلك أنه لابد أن نتحرك يساراً إلى الخلية (S_2, D_3) ويتم ملؤها بالمقدار $\min\{60,60\}=60$ فيكون المتبقي من المعروض أصبح صفراً وتم تنفيذ احتياجات المناطق الثلاثة من الأسمنت .

معنى ذلك أن الحل الأمثل هو :-

$$O = \begin{Bmatrix} x_{11} = 80, & x_{12} = 20, & x_{13} = 0 \\ x_{21} = 0, & x_{22} = 50, & x_{23} = 60 \end{Bmatrix}$$

وحصول أساس مثلي لابد تحقق الشروط اللاسالبية ($x_{ij} \geq 0$).

دالة الهدف هي :- $Min\ Z = 1x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 1x_{22} + 5x_{23}$

$$\Rightarrow Z|_{O} = 80 + 2(20) + 3(0) + 4(0) + (50) + 5(60) = 470$$

x_{ij}: عدد الأطنان من الاسمنت المنقولة من المصنع i إلى المنطقة j

$$\min z = 1x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{21} + 1x_{22} + 5x_{23}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 110$$
$$x_{11} + x_{21} \geq 80$$
$$x_{12} + x_{22} \geq 70$$
$$x_{13} + x_{23} \geq 60$$
$$x_{ij} \geq 0$$
$$i = 1, 2 \quad j = 1, 2, 3$$

ملحوظة هامة :- في مسألة النقل لابد أن يكون عدد الخلايا المشغولة = عدد المصادر + عدد المطلوب - 1

⇐ من المثال السابق :- عدد الخلايا المشغولة = 4

عدد المصادر = 2 ، عدد المطلوب = 3

⇐ عدد الخلايا المشغولة = $2 + 3 - 1 = 4$ *

لابد من اختبار امثلية الحل وهذا ماسنتعرف عليه الآن..

اختبار أمثلية الحل الأساسي الممكن في جدول النقل (طريقة التوزيع المعدل)

سنفترض مسألة تصغير دالة الهدف: $\min\ z$

- لكل خلية أساسية $(i\ ,\ j)$ احسب الأوزان u_i و v_j بحيث:

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

  – كل صف i له الوزن u_i وكل عمود j له الوزن v_j

  – **لتكن قيمة $u_1 = 0$**

- لكل خلية غير أساسية $(i\ ,\ j)$ احسب:

$$u_i + v_j - c_{ij}$$

  – سنرمز لها بـ δ_{ij} أي أن: $\delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$

- إذا كانت $\delta_{ij} \leq 0$ لجميع الخلايا غير الأساسية فإن الحل أمثل.

للخلايا الممتلئة نحسب v_j و u_i

وللخلايا الفارغة نحسب δ_{ij}

اختبار أمثلية الحل الأساسي الممكن في جدول النقل (طريقة التوزيع المعدل)

مثال توزيع الكهرباء: اختبار أمثلية الحل الأساسي الممكن المبدئي

نفرض $u_1 = 0$

$u_i + v_j = c_{ij}$

	$0 + v_1 = 8$ $v_1 = 8$	$1 + v_2 = 12$ $v_2 = 11$	$1 + v_3 = 13$ $v_3 = 12$	$4 + v_4 = 5$ $v_4 = 1$	*Supply*
$u_1 = 0$	8 **35**	6 $0 + 11 - 6$ $\delta_{12} = 5$	10 $0 + 12 - 10$ $\delta_{13} = 2$	9 $0 + 1 - 9$ $\delta_{14} = -8$	35
$u_2 + 8 = 9$ $u_2 = 1$	9 **10**	12 **20**	13 **20**	7 $1 + 1 - 7$ $\delta_{24} = -5$	50
$u_3 + 12 = 16$ $u_3 = 4$	14 $4 + 8 - 14$ $\delta_{31} = -2$	9 $4 + 11 - 9$ $\delta_{31} = 6$	16 **10**	5 **30**	40
Demand	45	20	30	30	

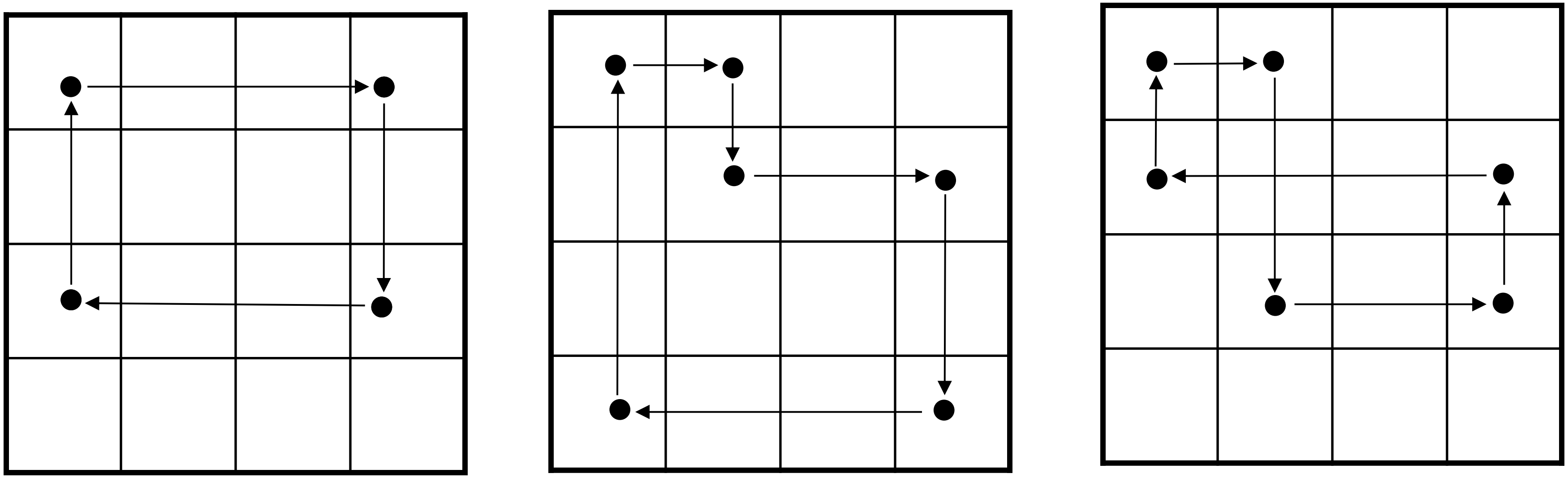
يوجد $0 < \delta_{ij}$ ، إذاً **الحل ليس أمثل** ويحتاج إلى تحسين $(z = 1180)$

حلقة التحوير

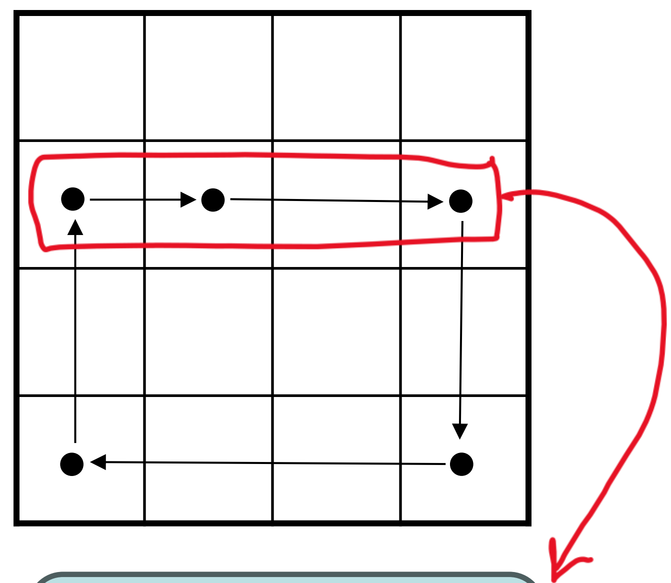
هي أي متتابعة من الخلايا (أربع خلايا على الأقل) في جدول النقل بحيث تحقق:

1. أي خليتين متتابعتين تشتركان إما بالصف أو العمود.
2. لا يوجد ثلاث خلايا متتابعة على نفس الصف أو العمود (بغض النظر عن خلايا البدء والانتهاء).
3. الخلية الأخيرة في المتتابعة لها نفس الصف أو العمود للخلية الأولى في المتتابعة.

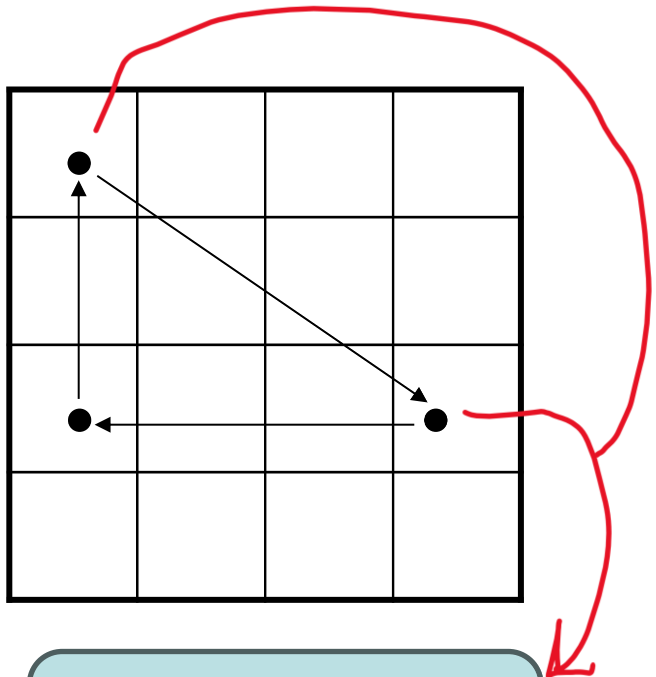
حلقات تحوير صحيحة



حلقات تحوير غير صحيحة



لايصح البدء ثم توقف ثم
اكمال في نفس الصف



خلايا متتابعة لاتشترك بصف
أو عمود

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل (طريقة الحجر المتنقل)

1. حدد أكبر قيمة موجبة لـ δ_{ij} ولتكن δ^*

$$\delta^* = \max \{ \delta_{ij} \ : \ \text{خلية غير أساسية} \ (i , j) \}$$

2. كون حلقة تحوير في جدول النقل بحيث:
   - تحقق شروط حلقة التحوير الثلاث
   - الحلقة تحتوي على خلية غير أساسية واحدة فقط وهي التي تحمل القيمة δ^*
3. وزع إشارات (+) و(−) على خلايا الحلقة بالتبادل ابتداء من الخلية غير الأساسية ذات القيمة δ^*

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل (طريقة الحجر المتنقل)

4. حدد من بين الخلايا ذات إشارة (–) الخلية التي تحتوي على أقل قيمة ولتكن θ

$\theta = \min \{ x_{ij} :$ (–) خلية غير أساسية ذات إشارة $(i , j) \}$

5. انتقل إلى الحل الأساسي الممكن الجديد بحيث تكون القيم الجديدة للخلايا في حلقة التحوير كالتالي:

$x_{ij} = x_{ij} + \theta$ للخلايا ذات الإشارة (+)

$x_{ij} = x_{ij} - \theta$ للخلايا ذات الإشارة (–)

بقية الخلايا تبقى بدون تغيير في القيم

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

- مثال توزيع الكهرباء: إيجاد حلقة تحوير

$\delta^* = \max \{ \delta_{ij}$: خلية غير أساسية $(i, j) \}$

$= \max\{5, 2, 6\} = 6$

سنبدأ حلقة التحوير من عند 6

					Supply
	8 35	6 0 + 11 − 6 $\delta_{12} = 5$	10 0 + 12 − 10 $\delta_{13} = 2$	9 0 + 1 − 9 $\delta_{14} = -8$	35
	9 10	12 20	13 20	7 1 + 1 − 7 $\delta_{24} = -5$	50
	14 4 + 8 − 14 $\delta_{31} = -2$	9 4 + 11 − 9 $\delta_{32} = 6$	16 10	5 30	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

- مثال توزيع الكهرباء: إيجاد حلقة تحوير

					Supply
	[8] 35	[6]	[10]	[9]	35
	[9] 10	[12] − 20	[13] + 20	[7]	50
	[14]	[9] + $\delta^* = 6$	[16] − 10	[5] 30	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

- مثال توزيع الكهرباء: **عملية التحوير**

الخلايا السالبة = θ = min { 20 , 10 } = 10

					Supply
	8 **35**	6	10	9	35
	9 **10**	12 − **20**	13 + **20**	7	50
	14	9 + $\delta^* = 6$	16 **10** −	5 **30**	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

- مثال توزيع الكهرباء: عملية التحوير

$$\theta = \min \{ 20 \;, 10 \} = 10$$

					Supply
	8 **35**	6	10	9	35
	9 **10**	12 − **20** $- \theta$	13 + **20** $+ \theta$	7	50
	14	9 + $+ \theta$	16 − **10** $- \theta$	5 **30**	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

- مثال توزيع الكهرباء: عملية التحوير

$$\theta = \min \{ 20 \ , 10 \} = 10$$

					Supply
	8 35	6	10	9	35
	9 10	12 – 20 – 10	13 + 20 + 10	7	50
	14	9 + + 10	16 10 – 10 –	5 30	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

- مثال توزيع الكهرباء: الحل الأساسي الممكن الجديد

$x_{11} = 35$, $x_{21} = 10$, $x_{22} = 10$, $x_{23} = 30$, $x_{32} = 10$, $x_{34} = 30$, $x_{12} = x_{13} = x_{14} = x_{24} = x_{31} = x_{33} = 0$

$z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34} = 1120$

لابد من اختبار أمثلية الحل

					Supply
	8 35	6	10	9	35
	9 10	12 10	13 30	7	50
	14	9 10	16	5 30	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

في أي عملية تحوير:

- الخلية التي تعطي القيمة δ^* تمثل المتغير الداخل.

يصبح متغير **أساسي** (خلية مملوءة).

- الخلية التي تعطي القيمة θ تمثل المتغير الخارج.

يصبح متغير **غير أساسي** (خلية غير مملوءة).

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

في أي عملية تحوير:

- المتغير الخارج يأخذ قيمة صفر بعد عملية التحوير ، ولا يكتب الصفر في تلك الخلية.
- إذا وجد أكثر من خلية تأخذ قيمة صفر بعد عملية التحوير ، يتم إخراج متغير واحد فقط ليصبح غير أساسي ، وبقية الخلايا تبقى أساسية وتأخذ القيمة صفر وتكتب في الجدول.
- يمكن أن تكون قيمة المتغير الداخل ليصبح أساسياً مساوية للصفر بعد انتهاء عملية التحوير، وتكتب في الجدول.

اختبار أمثلية الحل الأساسي الممكن الجديد

تكملة مثال توزيع الكهرباء:

	$0 + v_1 = 8$ $v_1 = 8$	$1 + v_2 = 12$ $v_2 = 11$	$1 + v_3 = 13$ $v_3 = 12$	$-2 + v_4 = 5$ $v_4 = 7$	*Supply*
$u_1 = 0$	[8] 35	[6] $0 + 11 - 6$ $\delta_{12} = 5$	[10] $0 + 12 - 10$ $\delta_{13} = 2$	[9] $0 + 7 - 9$ $\delta_{14} = -2$	35
$u_2 + 8 = 9$ $u_2 = 1$	[9] 10	[12] 10	[13] 30	[7] $1 + 7 - 7$ $\delta_{24} = 1$	50
$u_3 + 11 = 9$ $u_3 = -2$	[14] $-2 + 8 - 14$ $\delta_{31} = -8$	[9] 10	[16] $-2 + 12 - 16$ $\delta_{33} = -6$	[5] 30	40
Demand	45	20	30	30	

يوجد $\delta_{ij} > 0$ ، إذاً **الحل ليس أمثل** ويحتاج الى تحسين $(z = 1120)$

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

$$\delta^* = \delta_{12} = 5 \Rightarrow x_{12} \text{ enter}$$

					Supply
	8 **35** −	6 $\delta^* = 5$ +	10	9	35
	9 **10** +	12 **10** −	13 **30**	7	50
	14	9 **10**	16	5 **30**	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

$$\delta^* = \delta_{12} = 5 \Rightarrow x_{12} \text{ enter}$$

$$\theta = \min\{10\,,\,35\} = 10 \Rightarrow x_{22} \text{ leave}$$

					Supply
	8 **35** − θ	6 + θ	10	9	35
	9 **10** + θ	12 **10** − θ	13 **30**	7	50
	14	9 **10**	16	5 **30**	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

$$\delta^* = \delta_{12} = 5 \Rightarrow x_{12} \text{ enter}$$

$$\theta = \min\{10 , 35\} = 10 \Rightarrow x_{22} \text{ leave}$$

					Supply
	[8] 35 − 10 (−)	[6] + 10 (+)	[10]	[9]	35
	[9] 10 + 10 (+)	[12] 10 − 10 (−)	[13] 30	[7]	50
	[14]	[9] 10	[16]	[5] 30	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

الحل الأساسي الممكن الجديد:

				Supply
8 **25**	6 **10**	10	9	35
9 **20**	12	13 **30**	7	50
14	9 **10**	16	5 **30**	40
Demand 45	20	30	30	

لابد من اختبار أمثلية الحل

اختبار أمثلية الحل الأساسي الممكن الجديد

	$0 + v_1 = 8$ $v_1 = 8$	$0 + v_2 = 6$ $v_2 = 6$	$1 + v_3 = 13$ $v_3 = 12$	$3 + v_4 = 5$ $v_4 = 2$	*Supply*
$u_1 = 0$	[8] 25	[6] 10	[10] $0 + 12 - 10$ $\delta_{13} = 2$	[9] $0 + 2 - 9$ $\delta_{14} = -7$	35
$u_2 + 8 = 9$ $u_2 = 1$	[9] 20	[12] $1 + 6 - 12$ $\delta_{22} = -5$	[13] 30	[7] $1 + 2 - 7$ $\delta_{24} = -4$	50
$u_3 + 6 = 9$ $u_3 = 3$	[14] $3 + 8 - 14$ $\delta_{31} = -3$	[9] 10	[16] $3 + 12 - 16$ $\delta_{33} = -1$	[5] 30	40
Demand	45	20	30	30	

يوجد $\delta_{ij} > 0$ ، إذاً الحل ليس أمثل $(z = 1070)$

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

عملية التحوير:

$$\delta^* = \delta_{13} = 2 \Rightarrow x_{13} \text{ enter}$$

					Supply
	[8] **25** −	[6] **10**	[10] $\delta^* = 2$ +	[9]	35
	[9] **20** +	[12]	[13] **30** −	[7]	50
	[14]	[9] **10**	[16]	[5] **30**	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

عملية التحوير:

$$\delta^* = \delta_{13} = 2 \Rightarrow x_{13} \text{ enter}$$

$$\theta = \min\{25 , 30\} = 25 \Rightarrow x_{11} \text{ leave}$$

					Supply
	[8] 25 − θ	[6] 10	[10] + θ	[9]	35
	[9] 20 + θ	[12]	[13] 30 − θ	[7]	50
	[14]	[9] 10	[16]	[5] 30	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

عملية التحوير:

$$\delta^* = \delta_{13} = 2 \Rightarrow x_{13} \text{ enter}$$

$$\theta = \min\{25\ ,\ 30\} = 25 \Rightarrow x_{11} \text{ leave}$$

					Supply
	8 25 − 25 −	6 10	10 + 25 +	9	35
	9 20 + 25 +	12	13 30 − 25 −	7	50
	14	9 10	16	5 30	40
Demand	45	20	30	30	

الانتقال إلى حل أساسي ممكن جديد في جدول النقل

الحل الأساسي الممكن الجديد:

				Supply
[8]	[6] 10	[10] 25	[9]	35
[9] 45	[12]	[13] 5	[7]	50
[14]	[9] 10	[16]	[5] 30	40
Demand 45	20	30	30	

لابد من اختبار أمثلية الحل

اختبار أمثلية الحل الأساسي الممكن الجديد

	$3 + v_1 = 9$ $v_1 = 6$	$0 + v_2 = 6$ $v_2 = 6$	$0 + v_3 = 13$ $v_3 = 10$	$3 + v_4 = 5$ $v_4 = 2$	*Supply*
$u_1 = 0$	[8] $0 + 6 - 8$ $\delta_{12} = -2$	[6] 10	[10] 25	[9] $0 + 2 - 9$ $\delta_{14} = -7$	35
$u_2 + 10 = 13$ $u_2 = 3$	[9] 45	[12] $3 + 6 - 12$ $\delta_{22} = -3$	[13] 5	[7] $3 + 2 - 7$ $\delta_{24} = -2$	50
$u_3 + 6 = 9$ $u_3 = 3$	[14] $3 + 6 - 14$ $\delta_{31} = -5$	[9] 10	[16] $3 + 10 - 16$ $\delta_{33} = -3$	[5] 30	40
Demand	45	20	30	30	

الحل أمثل لأن $\delta_{ij} \leq 0$ لجميع الخلايا غير الأساسية

الحل الأمثل لمثال توزيع الكهرباء

					Supply
	8	6 **10**	10 **25**	9	35
	9 **45**	12	13 **5**	7	50
	14	9 **10**	16	5 **30**	40
Demand	45	20	30	30	

الحل الأمثل:

$x_{12} = 10$, $x_{13} = 25$, $x_{21} = 45$, $x_{23} = 5$, $x_{32} = 10$, $x_{34} = 30$,

$x_{11} = x_{14} = x_{22} = x_{24} = x_{31} = x_{33} = 0$.

$$Z = (10 \times 6) + (25 \times 10) + (45 \times 9) + (5 \times 13) + (10 \times 9) + (30 \times 5) = 1020$$

ملاحظات

- سمبلكس النقل ⇔ طريقة السمبلكس العامة لحل البرامج الخطية
  - المتغير الداخل ⇔ δ
  - اختبار الأمثلية δ تمثل معاملات صف دالة الهدف في جدول السمبلكس
  - المتغير الخارج ⇔ θ ⇔ اختبار النسبة الصغرى
- شروط الإمداد والطلب محققة في كل مرحلة
- مسألة النقل تكون متحللة (degenerate) إذا وجد جدول سمبلكس للمسألة بحيث تكون إحدى الخلايا الأساسية مملوءة بالقيمة 0
- عند الوصول لجدول النقل الأمثل:
  - يكون الحل الأمثل وحيداً إذا كانت "$\delta < 0$" لجميع الخلايا الغير أساسية
  - يوجد حلول مثلى متعددة إذا وجد "$\delta = 0$" في أحد الخلايا الغير أساسية

حلول مثلى متعددة

استخدمي طريقة الركن الشمالي الغربي لإيجاد الحل الأمثل الذي يحقق أقل تكلفة لمسألة النقل التالية:

			Supply
	6	8	50
	5	7	40
Demand	30	60	

المسألة متزنة وعدد الخلايا الممتلئة=3

حلول مثلى متعددة

	$v_1 = 6$	$v_2 = 8$	Supply
$u_1 = 0$	6 **30**	8 **20**	50
$u_2 = -1$	5 $\delta_{21} = 0$	7 **40**	40
Demand	30	60	

$z = 620$

بما أن $\delta_{21} = 0$ إذن توجد حلول مثلى متعددة

لإيجاد حل أمثل آخر نبدأ حلقة تحوير من خلية δ_{21}

سنحصل على الحل التالي:

6	8 **50**	50
5 **30**	7 **10**	40
30	60	

$z = 620$

نلاحظ أنه في الحلول المثلى المتعددة، قيم Z تكون متساوية

نماذج النقـــل

نماذج النقل

نماذج النقل المتزنة

إجمالي الطلب = إجمالي الإمداد

نماذج النقل غير المتزنة

إجمالي الطلب ≠ إجمالي الإمداد

فائض

إجمالي الطلب < إجمالي الإمداد

عجز

إجمالي الطلب > إجمالي الإمداد

نماذج النقــل غير المتزنة

يجب أن تكون مسألة النقل متزنة لتطبيق سمبلكس النقل

إجمالي الطلب ≠ إجمالي الإمداد

فائض

إجمالي الطلب > إجمالي الإمداد

تحول إلى متزنة

عقدة طلب وهمية = الفائض

عجز

إجمالي الطلب > إجمالي الإمداد

تحول إلى متزنة

عقدة إمداد وهمية = العجز

نماذج النقـــل غير المتزنة ـ فائض في الإمداد

$$\Sigma s_i > \Sigma d_j$$

- نوجد نقطة طلب إضافية (وهمية) ، نسميها Δ
- مقدار الطلب عندها d_Δ مساوي للفائض من الإمداد:

$$d_\Delta = \Sigma s_i - \Sigma d_j$$

- تكلفة النقل من عقدة الإمداد i إلى عقدة الطلب الوهمية Δ تساوي:
  – الصفر (هذا يكفي لحل مسألة النقل)
  – ويمكن وضعها تساوي تكلفة التخزين عند عقدة الإمداد i

نماذج النقـــل غير المتزنة – فائض في الإمداد

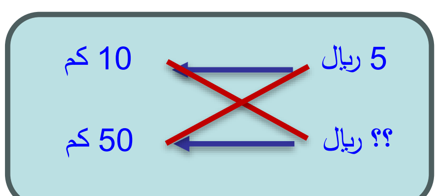
مثال:

مصفاة بترول لديها موقعين لتأمين احتياج ثلاثة مدن من وقود التدفئة. تبلغ الطاقة الانتاجية من وقود التدفئة للمصفاة الأولى 20 مليون برميل يوميا بينما تبلغ الطاقة الانتاجية من وقود التدفئة للمصفاة الثانية 46 مليون برميل يوميا. يقدر الطلب من الوقود لكل مدينة : 18 و 23 و 12 مليون برميل يوميا للمدينة الأولى والثانية والثالثة على الترتيب. وتبلغ تكلفة نقل البرميل الواحد من أحد المصفاتين إلى أي مدينة 5 ريال لكل 10 كيلو متر. وتبعد المدينة-1: 50 كم و 30 كم عن المصفاة 1 و 2 على الترتيب والمدينة-2: 24 كم و 46 كم عن المصفاة 1 و 2 على الترتيب والمدينة-3: 32 كم و 18 كم عن المصفاة 1 و 2 على الترتيب. أوجد الطريقة المثلى لتأمين احتياج كل مدينة.

نماذج النقـــل غير المتزنة ـ فائض في الإمداد

مثال: **جدول النقل:**

	المدينة 1	المدينة 2	المدينة 3	*Supply*
المصفاة 1	25	12	16	20
المصفاة 2	15	23	9	46
Demand	18	23	12	



نماذج النقـــل غير المتزنة _ فائض في الإمداد

مثال: **إجمالي الطلب** = 18 + 23 + 12 = 53

إجمالي الإمداد = 20 + 46 = 66

الفرق = 66 – 53 = 13 ⇔ فائض

			dummy	*Supply*
25	12	16	0	20
15	23	9	0	46
18	23	12	13	

Demand 18 23 12 13

ثم نحل بنفس طريقة الحل للمسائل المتزنة..

نماذج النقــل غير المتزنة ـ عجز في الإمداد

$$\Sigma s_i < \Sigma d_j$$

- نوجد نقطة إمداد إضافية (وهمية) ، نسميها Δ
- مقدار الإمداد عندها s_Δ مساوي للعجز في الإمداد:

$$s_\Delta = \Sigma d_j - \Sigma s_i$$

- تكلفة النقل من عقدة الإمداد الوهمية Δ إلى أي عقدة الطلب j تساوي:
  - الصفر (هذا يكفي لحل مسألة النقل)
  - ويمكن وضعها تساوي تكلفة تأمين العجز من عقدة الإمداد Δ

نماذج النقـــل غير المتزنة – عجز في الإمداد

مثال:

في المثال السابق افترض أن:

1. أحد المولدات في مصفاة-2 قد تعطل مما أدى إلى انخفاض الإنتاج إلى النصف.

2. يتم ضخ كميات من الوقود من قبل المصفاة الرئيسية التي تبعد 100 كم عن المصفاة المعطلة بتكلفة 20 ريال للبرميل.

نماذج النقــل غير المتزنة _ عجز في الإمداد

مثال: إجمالي الطلب = 18 + 23 + 12 = 53

إجمالي الإمداد = 20 + 23 = 43

الفرق = 53 – 43 = 10 ⇔ عجز

هنا تكاليف النقل للصف الوهمي لاتساوي الصفر

15+20

9+20

				Supply
	25	12	16	20
	15	23	9	23
Dummy	35	43	29	10
Demand	18	23	12	

ثم نحل بنفس طريقة الحل للمسائل المتزنـة..