

الحل الجبري للبرامج الخطية

خوارزمية السمبلكس

Simplex Algorithm

شكل البرامج الخطية

1- الشكل القانوني للبرامج الخطية (Canonical Form) لمسألة ($\max z$)

- جميع القيود تكون مترافقاً من نوع (\leq)
- جميع قيم الطرف الأيمن للقيود غير سالبة
- جميع قيم متغيرات القرار غير سالبة

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_i \geq 0 , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

شكل البرامج الخطية

2- الشكل القانوني للبرامج الخطية (Canonical Form) لمسألة ($\min z$)

- جميع القيود تكون مترافقاً من نوع (\geq)
- جميع قيم الطرف الأيمن للقيود غير سالبة
- جميع قيم متغيرات القرار غير سالبة

$$\min \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

شكل البرامج الخطية

3- الشكل القياسي للبرامج الخطية (Standard Form)

- جميع القيود تكون معادلات ، أي أنها قيود مساواة (=)
- جميع قيم الطرف الأيمن للقيود غير سالبة
- جميع قيم متغيرات القرار غير سالبة

(or min)

$$\max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$$x_i \geq 0 , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

شكل البرامج الخطية

المتراجحة:

$$x_1 + 2x_2 \leq -6$$

يمكن تحويلها إلى الشكل القانوني (بالضرب في -1):

$$-x_1 - 2x_2 \geq 6$$

للوضيح:

$$4 < 6$$

احتاج جعل $6=6$

بالتالي

$$4+2=6$$

للوضوح:

$$8 > 6$$

احتاج جعل $8=8$

بالتالي

$$8-2=6$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

يمكن تحويلها إلى معادلة بإضافة متغير مكمل غير سالب كما يلي:

$$x_1 + 2x_2 + s = 6$$

$$s \geq 0$$

المتغير المكمل الجديد s يكمل الدالة $x_1 + 2x_2$ لتساوي 6.

بينما المتراجحة:

$$x_1 + 2x_2 \geq 6$$

يمكن تحويلها إلى معادلة بإنقاصل متغير غير سالب كما يلي:

$$x_1 + 2x_2 - e = 6$$

$$e \geq 0$$

المتغير e يسمى المتغير الزائد أو الإضافي ، ينقص الكمية الزائدة من قيمة الدالة $x_1 + 2x_2$ لتساوي 6.

شكل البرامج الخطية

مثال: برنامج في الشكل القانوني لمسألة \max :

$$\max z = 3000x_1 + 2000x_2$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

شكل البرامج الخطية

يمكن تحويلة للشكل القياسي كما يلي :

$$\max z = 3000x_1 + 2000x_2$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 6$$

$$2x_1 + x_2 + s_2 = 8$$

$$-x_1 + x_2 + s_3 = 1$$

$$x_2 + s_4 = 2$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

الحل الأساسي

- لنفترض لدينا النظام الخطى التالي (يمثل معادلات القيود الخطية):

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

⋮

⋮

⋮

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

عدد المعادلات m =

عدد المتغيرات n =

$$n \geq m$$

الحل الأساسي

- اختر m من المتغيرات لتكون **متغيرات أساسية** (قيمتها لا تساوي الصفر). (Basic Variables or BV)
- المتغيرات المتبقية (عدها $n - m$) تكون **متغيرات غير أساسية** (قيمتها تساوي الصفر). (Non-Basic Variables or NBV)
- **الحل الأساسي** (Basic Solution): نحصل عليه بوضع قيم جميع المتغيرات الغير أساسية متساوية للصفر. ثم نوجد حل للنظام (سنفترض دائماً وجود حل).

الحل الأساسي

مثال:

$$x_1 - x_2 = 10$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 20$$

لدينا ثلاثة متغيرات ($m = 3$) وقيدان ($n = 2$).

عدد المتغيرات الأساسية = 2 وبالتالي نحتاج ثبيت متغير واحد فقط ($n - m = 1$) عند الصفر لأنه متغير غير أساسي.

يمكن إيجاد ثلاثة حلول أساسية:

المتغير x_1 غيرأساسي: $(x_1, x_2, x_3) = (0, -10, 15)$

المتغير x_2 غيرأساسي: $(x_1, x_2, x_3) = (10, 0, 5)$

المتغير x_3 غيرأساسي: $(x_1, x_2, x_3) = (15, 5, 0)$

الحل الأساسي

سنوضح طريقة إيجاد الحلول الأساسية في المثال التالي:

$$\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الحل الأساسي

الخطوة الأولى لإيجاد الحلول الأساسية هي تحويل المتباينات إلى الشكل القياسي أي تحويل المتباينات إلى معادلات:

$$\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + s_1 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + s_2 = 6$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

سنركز على نظام المعادلات.

لدينا أربعة متغيرات ($m = 4$) وقدين ($n = 2$).

نحتاج تثبيت متغيرين فقط ($n - m = 2$) عند الصفر.

وبالتالي فإن الحل الأساسي سيحتوي على: متغيرين أساسيين ومتغيرين غير أساسيين.

الحل الأساسي

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + s_1 &= 4 \\2x_1 + x_2 + s_2 &= 6\end{aligned}$$

مثلا: لو اخترنا أن تكون **المتغيرات الغير أساسية** هما: x_1 و s_2 وبالتالي فإن قيمها ستساوي الصفر: $s_2 = 0$, $x_1 = 0$

سيكون المتغيران x_2 و s_1 متغيران أساسيان، ولا يجاد قيمهما نحل المعادلتين:

$$x_2 + s_1 = 4$$

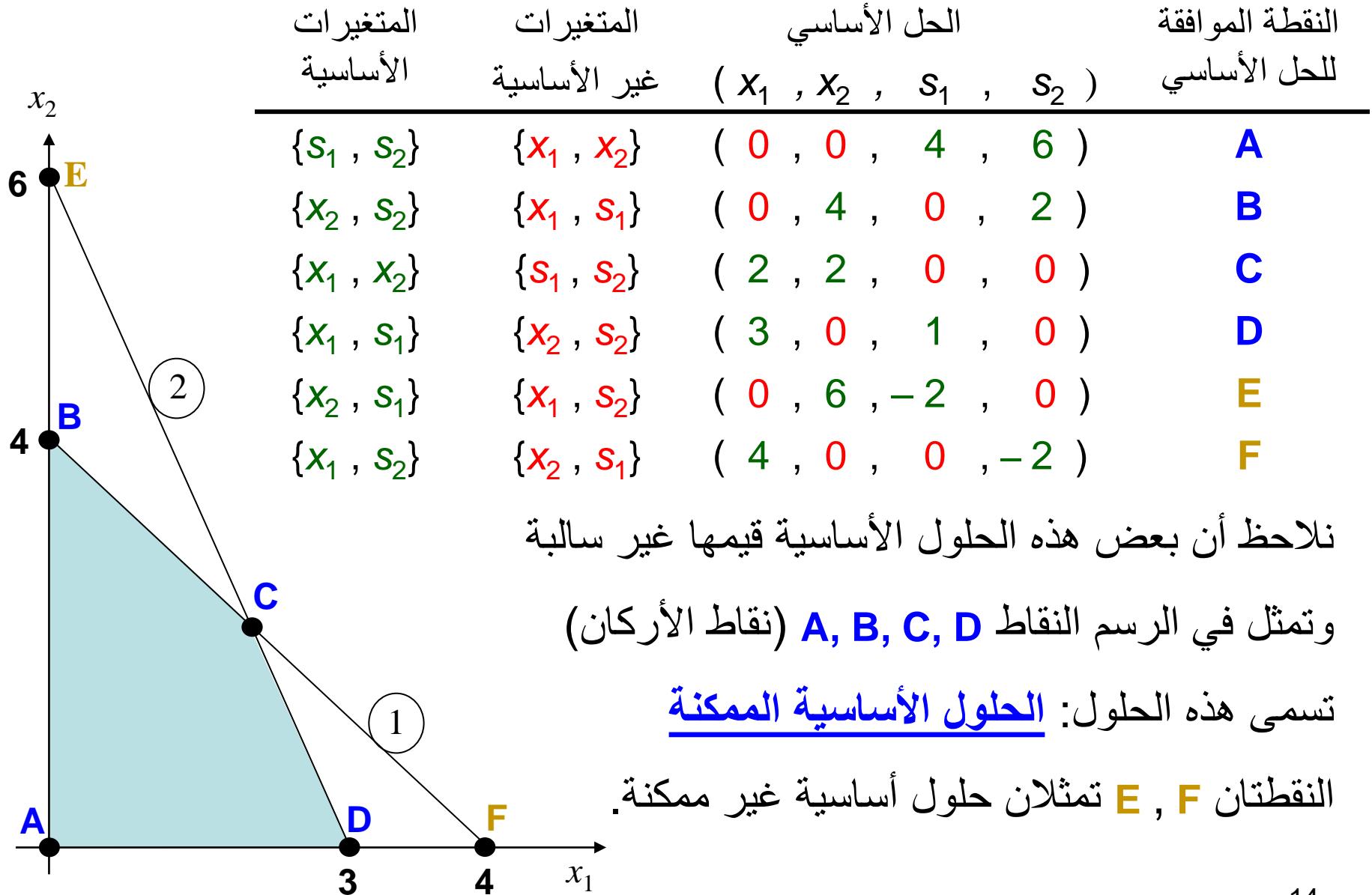
$$x_2 = 6$$

وبالتالي نحصل على أحد الحلول الأساسية:

$$(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, 6, -2, 0)$$

سيكون لدينا $\binom{4}{2} = \binom{n}{m}$ حلول أساسية.

في الجدول التالي سنحدد كل الحلول الأساسية:



الحل الأساسي الممكн

تعريف: **الحل الأساسي الممكن** (Basic Feasible Solution)

هو الحل الأساسي الذي يحقق قيود اللاسالبية في البرنامج الخطى.
ويتمثل هندسياً **إحدى النقاط الركنية** في منطقة الحلول الممكنة للبرنامج الخطى.
نظريه: إذا يوجد حل أمثل للبرنامج الخطى ، فإن أحد الحلول الأساسية الممكنة سيكون حل
أمثل. (قد لا يكون الحل الأمثل الوحيد)

تعريف: **الحل الأساسي الغير الممكن** (Basic Infeasible Solution)

هو الحل الأساسي الذي لا يتحقق أحد متغيراته القيود اللاسالبية في البرنامج الخطى.

ماك:- للإنتاج لخفة بتر:

s.t.

$$200x_1 + 240x_2 \leq 1200,$$

$$30x_1 + 15x_2 \leq 120$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

هذه الصيغة الصناعية للبيانات كما

(ii) المعلمات الأساسية والمتغيرات الأساسية

$$200x_1 + 240x_2 + s_1 = 1200 \text{ تحويل الميلود:-}$$

$$30x_1 + 15x_2 + s_2 = 120$$

$$x_1 + 2x_2 - s_3 = 3$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

بيانات تصور المعرفة الخامسة ص:

$$\text{Max } z = 4000x_1 + 3000x_2 + 0s_1 + 0s_2 - 0s_3$$

s.t.

$$200x_1 + 240x_2 + s_1 = 1200$$

$$30x_1 + 15x_2 + s_2 = 120$$

$$x_1 + 2x_2 - s_3 = 3$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

$$\text{النحو = 3, } \text{النحو = 5} \Rightarrow \text{النحو = 5 - 3 = 2}$$

+ نصيحتكم الانه سمية ولذلك نستخ

Case 1:- let $x_1 = 0, x_2 = 0 \Rightarrow s_1 = 1200, s_2 = 120, s_3 = -3$

$$\Rightarrow O_1 = (0, 0, 1200, 120, -3)$$

Case 2:- let $x_1 = 0, s_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1200}{240} = \frac{120}{24} = 5, s_2 = 45, s_3 = 7$

$$\Rightarrow O_2 = (-0.5, 0, 45, 7)$$

Case 3:- let $x_1 = 0, s_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{120}{15} = 8, s_3 = 13, s_1 = -720$

$$\Rightarrow O_3 = (-2, 8, -720, 0, 13)$$

Case 4:- let $x_1 = 0, s_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}, s_2 = \frac{195}{2}, s_1 = 840$

$$\Rightarrow O_4 = (0, \frac{3}{2}, 840, \frac{195}{2}, 0)$$

Case 5:- let $x_2 = 0, s_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1200}{280} = 6, s_2 = -60, s_3 = 3$

$$\Rightarrow O_5 = (6, 0, 0, -60, 3)$$

Case 6:- let $x_2 = 0, s_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4, s_1 = 400, s_3 = 1$

$$\Rightarrow O_6 = (4, 0, 400, 0, 1)$$

Case 7:- let $x_2 = 0, s_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, s_1 = 30, s_2 = 600$

$$\Rightarrow O_7 = (3, 0, 600, 30, 0)$$

Case 8:- let $s_1 = 0, s_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{18}{7}, x_2 = \frac{20}{7}, s_3 = \frac{37}{7}$

$$\Rightarrow O_8 = (\frac{18}{7}, \frac{20}{7}, 0, 0, \frac{37}{7})$$

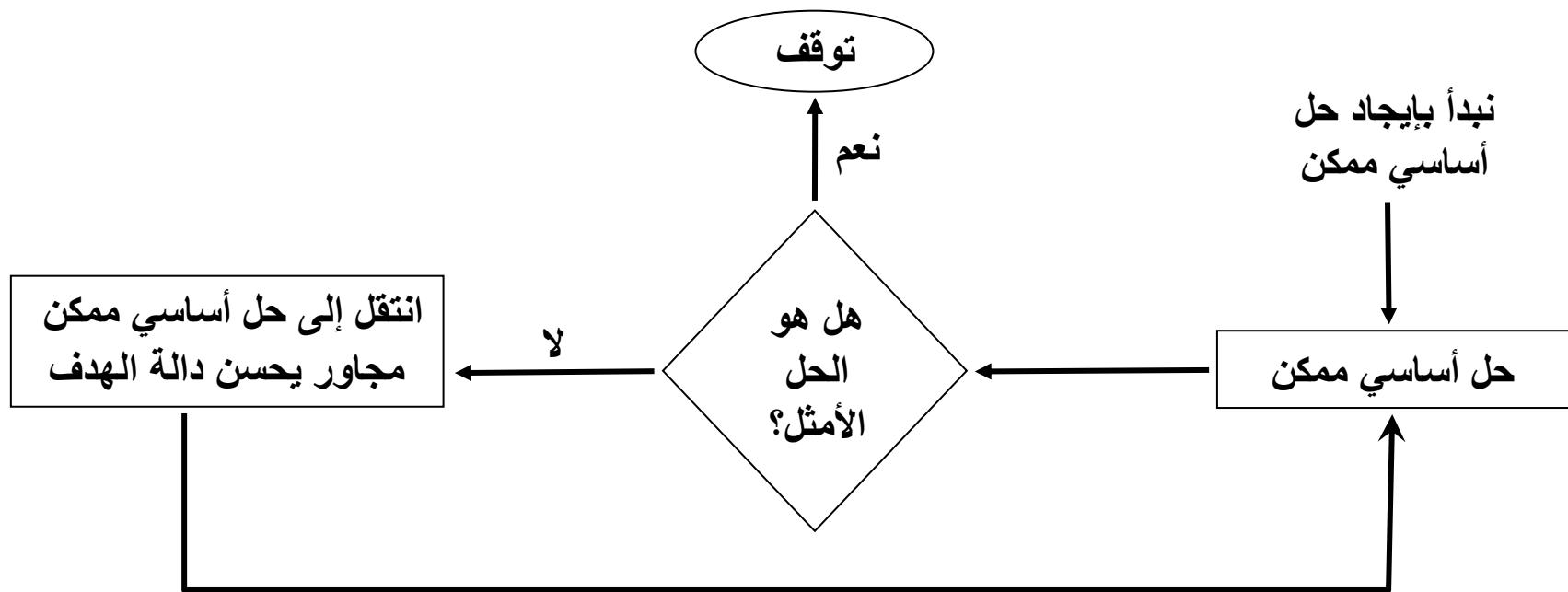
← الجدول الثاني يوضح ملخص الجدول السابق

الجدول	المتغيران لا ينبعان $(x_1 \neq 0, x_2 \neq 0)$	المتغيران لغير هامشية	متغيرات هامشية من حيث ترتيبها	الحاجة	القيمة
O_1	s_1, s_2, s_3	x_1, x_2	-	✓	$s_3 < 0$
O_2	x_2, s_2, s_3	x_1, s_1	✓	-	
O_3	x_2, s_1, s_3	x_1, s_2	-	✓	$s_1 < 0$
O_4	x_2, s_1, s_2	x_1, s_3	✓	-	
O_5	x_1, s_2, s_3	x_2, s_1	-	✓	$s_2 < 0$
O_6	x_1, s_1, s_3	x_2, s_2	✓	-	
O_7	x_1, s_1, s_2	x_2, s_3	✓	-	
O_8	x_1, x_2, s_3	s_1, s_2	✓	-	

O_9	x_1, x_2, s_2	s_1, s_3	-	✓	$x_2 < 0$
O_{10}	x_1, x_2, s_1	s_2, s_3	-	✓	$x_2 < 0$

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

سندرس فقط تطبيقها في حل مسائل البرمجة الخطية التي في
الشكل القانوني لمسألة " $\max z$ "



خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

سنشرح خوارزمية السمبلكس بحل المثال التالي:

مثال: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي مستخدما طريقة السمبلكس:

$$\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الخطوة الأولى: نحول البرنامج الخطي للشكل القياسي:

$$\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + s_1 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + s_2 = 6$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 &= 6 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

لاحظ أن:

تكافئ:

$$\max z$$

s.t.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 + s_1 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 &= 6 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

$$\max z = 4x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + s_1 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + s_2 = 6$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

لاحظ أن:

وتكافئ:

$$\max z$$

s.t.

$$z - 4x_1 - 3x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 + s_1 = 4$$

$$2x_1 + x_2 + s_2 = 6$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

سنستخدم نظام المعادلات
هذا لتكوين جدول
السمبلكس المبدئي

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الخطوة الثانية: نكون جدول السمبلكس المبدئي كما يلي:

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	4
s_2	2	1	0	1	6

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

نفرض أن x_1, x_2 متغيرات غير أساسية أي أن 0 بال التالي الحل الأساسي الممكن المبدئي: $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, 0, 4, 6)$

بالت遇ويض في نظام المعادلات أو جدنا قيم s_1, s_2

$BV = \text{Basic Variables} = \text{المتغيرات الأساسية} = s_1, s_2$

$\text{The Non-Basic Variables} = \text{المتغيرات غير الأساسية} = x_1, x_2$

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
$\rightarrow z$	-4	-3	0	0	0
$\rightarrow s_1$	1	1	1	0	4
$\rightarrow s_2$	2	1	0	1	6

$RHS = \text{Right Hand Side} = \text{جهة الطرف الأيمن}$

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الخطوة الثالثة: اختبار الأمثلية

شرط الأمثلية للحل الأساسي الممكن الحالي في جدول السمبلكس:

الحل الأساسي الممكن الحالي يكون حلًا أمثلًا إذا كانت معاملات جميع المتغيرات الغير الأساسية في صفر دالة الهدف \geq أكبر من أو تساوي الصفر.

وحيث أن: دائمًا قيم المتغيرات الأساسية في صفر دالة الهدف = صفر

الحل الأساسي الممكن الحالي يكون حلًا أمثلًا إذا كانت معاملات جميع المتغيرات في صفر دالة الهدف \geq أكبر من أو تساوي الصفر (غير سالبة).

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

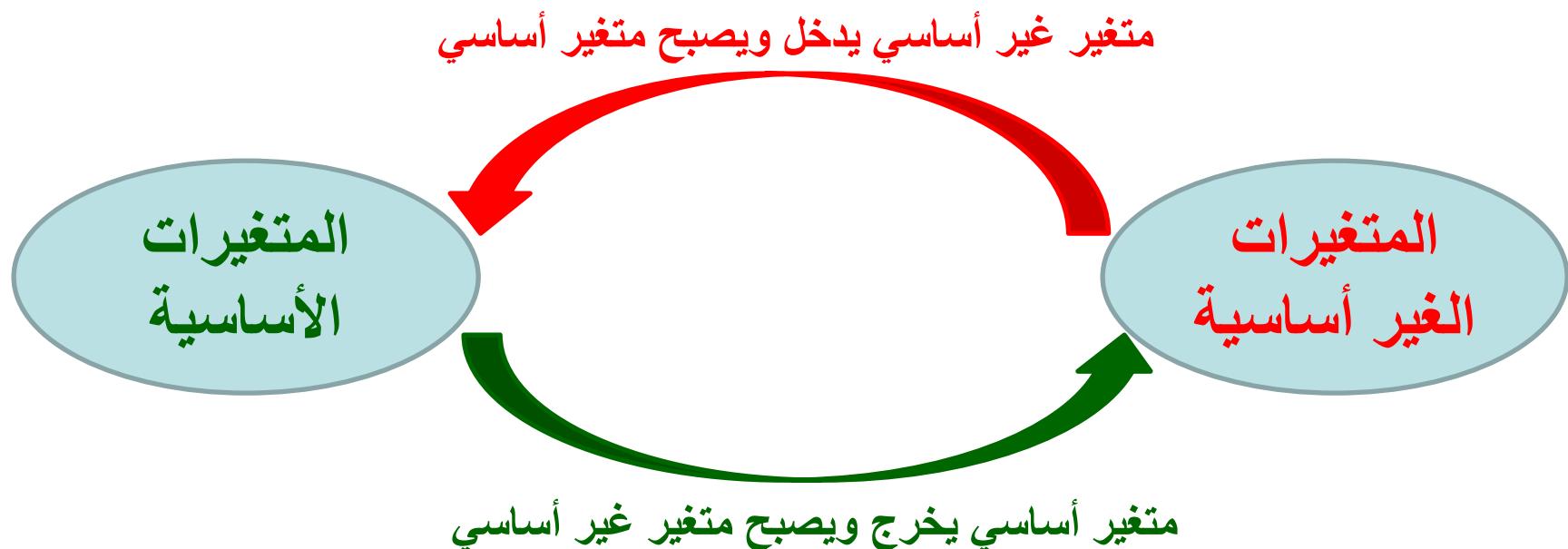
BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	4
s_2	2	1	0	1	6

الحل الأساسي الممكن الحالي: $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, 0, 4, 6)$
وقيمة دالة الهدف $z = 0$

كما نلاحظ: لدينا قيمة سالبة في صف دالة الهدف.
إذاً الحل الأساسي الممكن الحالي غير أمثل.
لابد من الانتقال لحل أساسي ممكن آخر يكون أفضل.

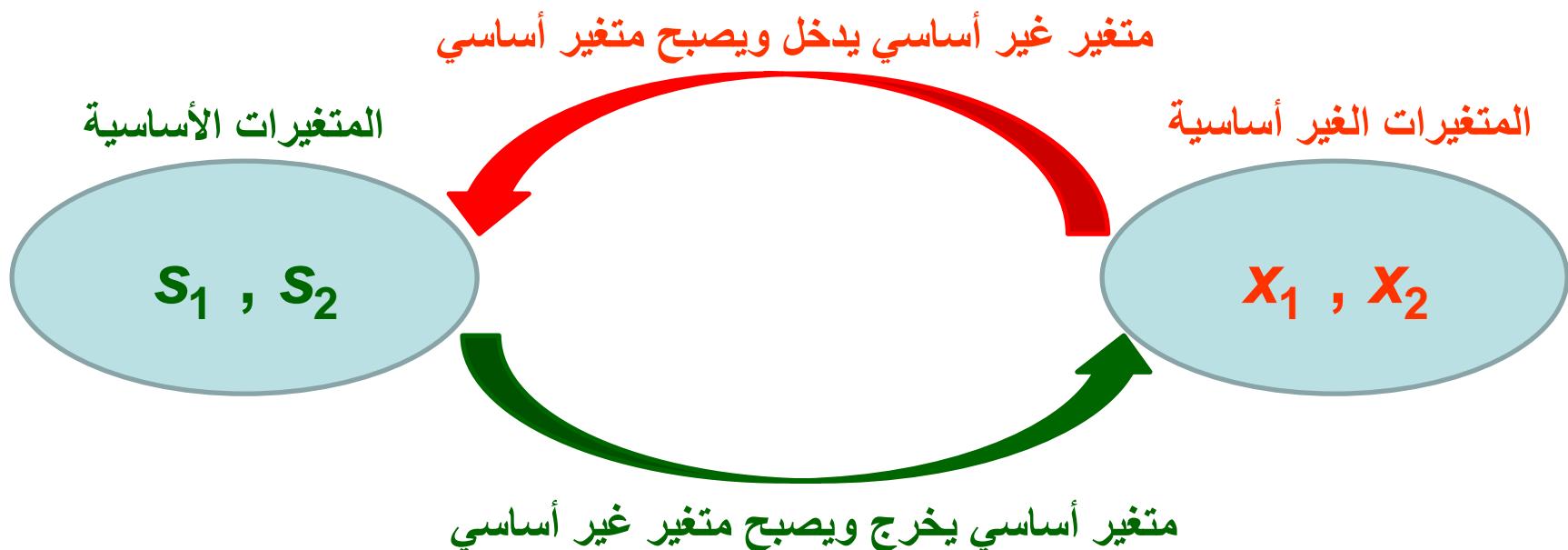
خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

سيتم الانتقال إلى حل أساسي ممكناً آخر **مجاور** يكون أفضل. تتم هذه العملية باستبدال متغير من مجموعة المتغيرات الغير أساسية ليصبح متغير أساسى، بدلاً عن متغير أساسى الذى يصبح غير أساسى.



خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

سيتم الانتقال إلى حل أساسى ممكן آخر **مجاور** يكون أفضل. تتم هذه العملية باستبدال متغير من مجموعة المتغيرات الغير أساسية ليصبح متغير أساسى، بدلاً عن متغير أساسى الذى يصبح غير أساسى.



خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الخطوة الرابعة:

نختار المتغير غير الأساسي الداخل لمجموعة المتغيرات الأساسية.
نختار المتغير ذو القيمة الأكثـر سالبـية في صف دالة الهدف Z .
وهو المتغير x_1 في مثالنا.

المتغير الداخـل



BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	4
s_2	2	1	0	1	6

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الخطوة الخامسة:

نختار المتغير الأساسي الخارج ليصبح في مجموعة المتغيرات الغير أساسية:
هو المتغير ذو الأقل قيمة في اختبار النسبة الصغرى.

اختبار النسبة الصغرى (Minimum Ratio Test):

نقسم قيم الطرف الأيمن على قيم عمود المتغير الداخل الموجبة فقط.
يخرج المتغير ذو القيمة الأصغر. إذا يخرج المتغير S_2

BV	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	Ratio Test
z	-4	-3	0	0	0	
S_1	1	1	1	0	4	$4/1 = 4$
$\leftarrow S_2$	2	1	0	1	6	$6/2 = 3$

المتغير الخارج

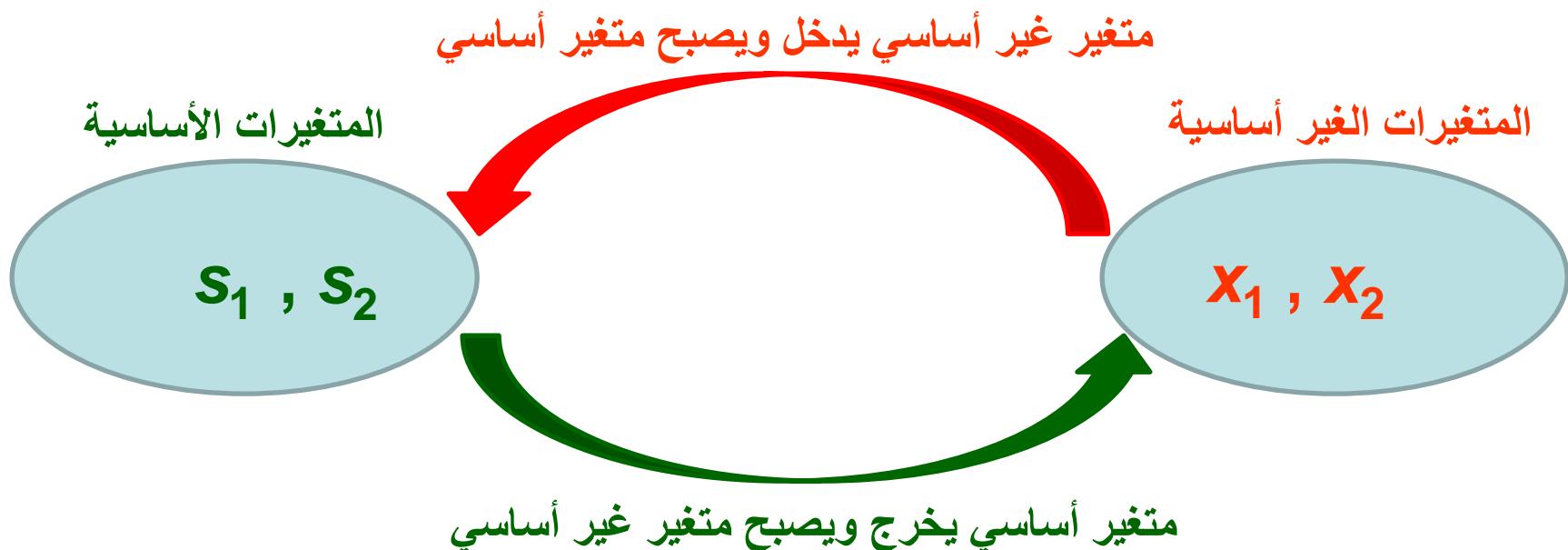
خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

ملاحظات:

- عند اختيار المتغير الغير أساسى الداخل:
 - عند وجود تساو في قيمة "الأكثر سالبية" في صف Z يمكن اختيار أي منها.
 - عموما يمكن اختيار أي متغير ذو قيمة سالبة في صف Z .
 - يوجد قواعد أكثر تعقيدا لاختيار المتغير الغير أساسى الداخل.
- عند وجود تساو في اختبار النسبة الصغرى لاختيار المتغير الأساسي الخارج:
 - يمكن اختيار أي من المتغيرات الأساسية ذات نفس قيمة النسبة الصغرى.
 - أيضا يوجد قواعد أكثر تعقيدا في هذه الحالة.

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

سيتم دخول المتغير الغير أساسى X_1 ليصبح متغير أساسى، بدلاً عن المتغير الأساسى S_2 الذي سيخرج ليصبح متغير غير أساسى.



خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الخطوة السادسة: عملية التحويل (تحديث جدول السمبلكس)

العنصر المحوري: عند تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج.

كون جدول السمبلكس الجديد كما يلي:

1. تدخل المتغير الداخل x_1 في مكان المتغير الخارج s_2 .

2. تحدث صف المتغير الخارج بحيث يجعل العنصر المحوري مساوياً للواحد

وذلك بقسمة جميع قيم صف المتغير الخارج على قيمة العنصر المحوري.

3. تحدث بقية الصفوف (بعمليات أولية على الصفوف) بحيث يجعل بقية

عناصر عمود المتغير الداخل في الجدول الجديد أصفاراً.

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل

← المتغير الخارج

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	
z	-4	-3	0	0	0	Ratio Test
s_1	1	1	1	0	4	$4/1 = 4$
s_2	2	1	0	1	6	$6/2 = 3$

العنصر المحوري

$\frac{x_1}{0}$

$\frac{0}{1}$

نحتاج تحويل عمود x_1 ليصبح:

دائماً سنجعل قيمة العنصر المحوري مساوية للواحد ، وبقية قيم العمود مساوية للصفر

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل ↓

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	4
s_2	2	1	0	1	6

Ratio Test
 $4/1 = 4$
 $6/2 = 3$

←

المتغير الخارج

صف القيد الثاني الجديد = صف القيد الثاني القديم مقسوماً على 2

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z					
s_1					
x_1	1	1/2	0	1/2	3

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل ↓

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	4
s_2	2	1	0	1	6

Ratio Test
 $4/1 = 4$
 $6/2 = 3$

← المتغير الخارج

صف القيد الأول الجديد = (-) × صف القيد الثاني الجديد + صف القيد الأول القديم

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z					
s_1	0	1/2	1	-1/2	1
x_1	1	1/2	0	1/2	3

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل ↓

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	4
s_2	2	1	0	1	6

Ratio Test
4/1 = 4
6/2 = 3

←

المتغير الخارج

صف دالة الهدف الجديد = (4 × صف القيد الثاني الجديد) + صف دالة الهدف

القديم

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
Z	0	-1	0	2	12
s_1	0	1/2	1	-1/2	1
x_1	1	1/2	0	1/2	3

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

بعد إكمال عملية تحدث الجدول، نحصل على جدول السمبلكس التالي:

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	-1	0	2	12
s_1	0	1/2	1	-1/2	1
x_1	1	1/2	0	1/2	3

الحل الأساسي الممكن الحالي: $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (3, 0, 1, 0)$

قيمة دالة الهدف $z = 12$

الآن نكرر خطوات طريقة السمبلكس من جديد.

نختبر الأمثلية. هذا الحل الأساسي الممكن ليس أمثل لوجود قيمة سالبة في صف z . نتحرك مرة أخرى إلى حل أساسي ممكн مجاور أفضل.

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل ↓

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	-1	0	2	12
s_1	0	1/2	1	-1/2	1
x_1	1	1/2	0	1/2	3

← المتغير
الخارج

Ratio Test

$1/0.5 = 2$

$3/0.5 = 6$

صف القيد الأول الجديد = صف القيد الأول القديم مضروباً في 2

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z					
x_2	0	1	2	-1	2
x_1					

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل ↓

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	-1	0	2	12
s_1	0	1/2	1	-1/2	1
x_1	1	1/2	0	1/2	3

← المتغير
الخارج

Ratio Test

1/0.5 = 2

3/0.5 = 6

صف القيد الثاني الجديد = (-1/2) × صف القيد الأول الجديد + صف القيد الثاني

القديم

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z					
x_2	0	1	2	-1	2
x_1	1	0	-1	1	2

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل ↓

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	
z	0	-1	0	2	12	
s_1	0	1/2	1	-1/2	1	Ratio Test $1/0.5 = 2$
x_1	1	1/2	0	1/2	3	$3/0.5 = 6$

← المتغير
الخارج

صف دالة الهدف الجديد = (صف القيد الأول الجديد) + صف دالة الهدف القديم

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	0	2	1	14
x_2	0	1	2	-1	2
x_1	1	0	-1	1	2

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

بعد إكمال عملية تحدث الجدول، نحصل على جدول السمبلكس التالي:

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	0	2	1	14
x_2	0	1	2	-1	2
x_1	1	0	-1	1	2

الحل الأساسي الممكن الحالي: $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (2, 2, 0, 0)$

قيمة دالة الهدف $z = 14$

الآن نختبر الأمثلية.

هذا الحل أمثل لأنه لا يوجد قيمة سالبة في صف z . نتوقف.

مثال 2:

أوجد الحل الأمثل للبرنامج
الخطي التالي مستخدماً
طريقة السمبلكس:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 30x_1 + 20x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 8 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 &\leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

الحل:

نضع البرنامج في الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 30x_1 + 20x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 &= 8 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + s_2 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

نكون جدول السمبلكس المبدئي
ونكمل حتى الوصول للحل الأمثل.

المتغير الداخل



المتغير
الخارج

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	Ratio Test
Z	-30	-20	-5	0	0	0	
s_1	2	1	1	1	0	8	$8/2 = 4$
s_2	1	3	-4	0	1	8	$8/1 = 8$

جعل العنصر المحوري يساوي 1 لذلك نقسم كل صف العنصر المحوري على 2. ونجعل بقية عناصر العمود تساوي 0.
صف دالة الهدف الجديد = $(30 \times \text{صف القيد الأول الجديد}) + \text{صف دالة الهدف القديم}$

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
Z	0	-5	10	15	0	120
s_1	1	0.5	0.5	0.5	0	4
s_2	1	3	-4	0	1	8

$$\text{صف القيد الثاني الجديد} = -1 \times \text{صف القيد الأول الجديد} + \text{صف القيد الثاني القديم}$$

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	0	-5	10	15	0	120
x_1	1	1/2	1/2	1/2	0	4
s_2	0	5/2	-9/2	-1/2	1	4

الحل الأساسي الممكن الحالي: $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (4, 0, 0, 0, 4)$

قيمة دالة الهدف $z = 120$

الآن نكرر خطوات طريقة السمبلكس من جديد.

نختبر الأمثلية. هذا الحل الأساسي الممكن ليس أمثل لوجود قيمة سالبة في صف z .

نتحرك مرة أخرى إلى حل أساسي ممكن مجاور أفضل.

المتغير الداخل



BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	Ratio Test
z	0	-5	10	15	0	120	
x_1	1	1/2	1/2	1/2	0	4	$4/(1/2) = 8$
s_2	0	5/2	-9/2	-1/2	1	4	$4/(5/2) = 8/5$

المتغير
الخارج



BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	0	0	1	14	2	128
x_1	1	0	7/5	3/5	-1/5	16/5
x_2	0	1	-9/5	-1/5	2/5	8/5

هذا الحل أمثل لأنه لا يوجد قيمة سالبة في صف z . نتوقف.

الحل الأساسي المكمن الحالي أمثل:

$$(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (16/5, 8/5, 0, 0, 0)$$

قيمة دالة الهدف المثلثي $z = 128$

مثال 3:

أوجد الحل الأمثل للبرنامج
الخطي التالي مستخدماً
طريقة السمبلكس:

$$\max z = 6x_1 + 14x_2 + 13x_3$$

s.t.

$$1/2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 24$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 60$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الحل:

نضع البرنامج في الشكل القياسي:

$$\max z = 6x_1 + 14x_2 + 13x_3$$

s.t.

$$1/2x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 24$$

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + s_2 = 60$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 \geq 0$$

نكون جدول السمبلكس المبدئي
ونكمل حتى الوصول للحل الأمثل.

المتغير الداخل



المتغير
الخارج

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	
Z	-6	-14	-13	0	0	0	Ratio Test
s_1	1/2	2	1	1	0	24	$24/2 = 12$
s_2	1	2	4	0	1	60	$60/2 = 30$

المتغير الداخل



المتغير
الخارج

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	
Z	-5/2	0	-6	7	0	168	Ratio Test
x_2	1/4	1	1/2	1/2	0	12	$12/(1/2) = 24$
s_2	1/2	0	3	-1	1	36	$36/3 = 12$

المتغير الداخل



المتغير
الخارج

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	
z	$-3/2$	0	0	5	2	240	Ratio Test
x_2	$1/6$	1	0	$2/3$	$-1/6$	6	$6/(1/6) = 36$
x_3	$1/6$	0	1	$-1/3$	$1/3$	12	$12/(1/6) = 72$

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	0	9	0	11	$1/2$	294
x_1	1	6	0	4	-1	36
x_3	0	-1	1	-1	$1/2$	6

الحل الأمثل:

$$x_1 = 36, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 6, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad z = 294$$

حلول مثلى متعددة (بديلة)

- في صف دالة الهدف في جميع جداول السمبلكس: دائمًا قيم المتغيرات الأساسية تساوي الصفر.
- في صف دالة الهدف لجدول السمبلكس النهائي للحل الأمثل:
 - إذا كانت قيم جميع المتغيرات الغير أساسية أكبر من الصفر فإنه لدينا حل أمثل وحيد (جميع الأمثلة السابقة لها حل أمثل وحيد).
 - إذا وجد متغير غير أساسى قيمته تساوي الصفر فإنه لدينا حلول أساسية مثلى متعددة. وعند الرغبة في إيجاد حل أمثل بديل ، يتم اختيار أحد المتغيرات الغير أساسية التي قيمتها تساوي الصفر ليصبح متغير أساسى.

حلول مثلى متعددة (بديلة)

مثال:

- لدينا جدول السمبلكس النهائي للحل الأمثل التالي:

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	0	3	0	6
x_1	1	2	2	0	2
s_2	0	2	4	1	4

- الحل الأمثل $z^* = 6, x_1 = 2, s_2 = 4, x_2 = 0, s_1 = 0$.
- حيث أن قيمة المتغير x_2 في صف دالة الهدف تساوي الصفر ، فإنه لدينا حلول مثلى متعددة.
- عند الرغبة في إيجاد حل أمثل بديل ، ندخل المتغير x_2 كمتغير أساسى.

حلول متّلٰى متعددة (بديلة)

المتغير الداخل ↓

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	0	3	0	6
x_1	1	2	2	0	2
s_2	0	2	4	1	4

المتغير
الخارج ←

Ratio Test

$2/2 = 1$

$4/2 = 2$

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	0	3	0	6
x_2	$1/2$	1	1	0	1
s_2	-1	0	2	1	2

حصلنا على حل أمثل آخر بنفس قيمة دالة الهدف المتّلٰى وهو:

$$z^* = 6, x_1 = 0, s_2 = 2, x_2 = 1, s_1 = 0$$

قيمة دالة الهدف غير محدودة

مثال:

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	
z	0	-3	-1	0	0	<u>Ratio Test</u>
x_1	1	-1	1	0	5	-
s_2	0	-2	2	1	8	-

↓
المتغير الداخل

عند عدم إمكانية إجراء اختبار النسبة الصغرى:
أي لا يوجد قيمة موجبة (أكبر من الصفر) في عمود المتغير الداخل
فإننا نستنتج أن الحل الأمثل غير محدود ، أي أن $z^* = +\infty$

قيمة دالة الهدف غير محدودة

مثال آخر:

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	
z	0	-3	-1	0	0	<u>Ratio Test</u>
x_1	1	0	1	0	5	-
s_2	0	-2	2	1	8	-

الحل الأمثل غير محدود ، أي أن $z^* = +\infty$

طرق حل أخرى

- بعض البرامج الخطية ليس لها حل ممكن. يتم اكتشاف ذلك بطرق حل خاصة ستدرس في مقررات لاحقة.
 - عندما يكون البرنامج الخطي في الشكل القانوني لمسألة "max" فإنه دائمًا يوجد حل ممكن.
- يوجد طرق حل متنوعة منبثقه من نهج خوارزمية السمبلكس.
- يوجد طرق للحل غير نهج طريقة السمبلكس ، مثل طرق الحل الداخلي (Interior Point Methods).



واجب منزلي

السؤال 1 : ليكن البرنامج الخطى التالي :

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.:} \quad &5x_1 + 3x_2 \leq 30 \quad (1) \\ &2x_1 + 3x_2 \leq 18 \quad (2) \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

حول المتباينات إلى معادلات ثم ضمن الجدول التالي أوجد جميع الحلول الأساسية وبين ملالي :

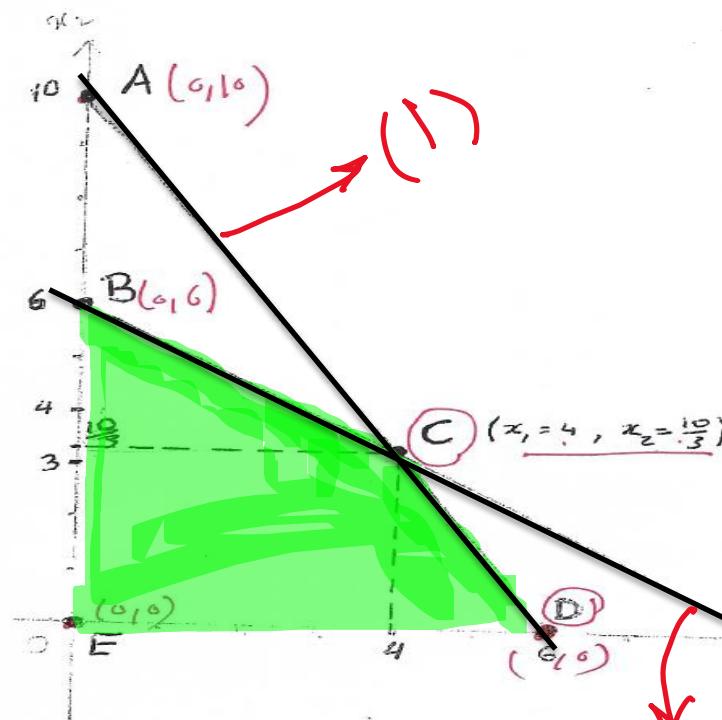
(1) النقطة البينية المقابل له على الرسم البياني.

(2) المتغيرات الأساسية وغير الأساسية وقيمها. حدد إذا كانت ممكنة أم لا.

(3) قيمة دالة الهدف

(4) حد الحل الأمثل للبرنامج الخطى

خطوات الحل: ارسم منطقة الحلول ثم املأ الجدول التالي.



المتغيرات الأساسية	المتغيرات غير الأساسية	الحل الأساسي	النقطة الحول الموافق يمكن للحل أم لا	قيمة دالة الهدف
$\{x_1, x_2\}$	$\{s_1, s_2\}$	$(4, \frac{10}{3}, 0)$	C	46
$\{x_1, s_1\}$	$\{x_2, s_2\}$	$(9, 0, 15)$	F	36
$\{x_1, s_2\}$	$\{x_2, s_1\}$	$(0, 6, 12)$	D	24
$\{x_2, s_1\}$	$\{x_1, s_2\}$	$(0, 0, 18)$	B	18
$\{x_2, s_2\}$	$\{x_1, s_1\}$	$(12, 0, 30)$	A	30
$\{s_1, s_2\}$	$\{x_1, x_2\}$	$(0, 0, 0)$	E	0

(2)