الحل الجبري للبرامج الخطية

خوارزمية السمبلكس
Simplex Algorithm

شكل البرامج الخطية

1- الشكل القانوني للبرامج الخطية (Canonical Form) لمسألة ($\max z$)

- جميع القيود تكون متراجحات من نوع ($\leq$)
- جميع قيم الطرف الأيمن للقيود غير سالبة
- جميع قيم متغيرات القرار غير سالبة

$$\max \ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

$$x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

شكل البرامج الخطية

2- الشكل القانوني للبرامج الخطية (Canonical Form) لمسألة ($\min z$)

- جميع القيود تكون متراجحات من نوع ($\geq$)
- جميع قيم الطرف الأيمن للقيود غير سالبة
- جميع قيم متغيرات القرار غير سالبة

$$\min \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n \;\geq\; b_1$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n \;\geq\; b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n \;\geq\; b_m$$

$$x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1 , 2 , \ldots , n$$

شكل البرامج الخطية

3- الشكل القياسي للبرامج الخطية (Standard Form)

- جميع القيود تكون معادلات ، أي أنها قيود مساواة (=)
- جميع قيم الطرف الأيمن للقيود غير سالبة
- جميع قيم متغيرات القرار غير سالبة

(or min)

$$\max \; z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n = b_m$$

$$x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

شكل البرامج الخطية

المتراجحة: $x_1 + 2x_2 \leq 6$

يمكن تحويلها إلى معادلة بإضافة متغير مكمل غير سالب كما يلي:

$$x_1 + 2x_2 + s = 6$$

$$s \geq 0$$

المتغير المكمل الجديد s يكمل الدالة $x_1 + 2x_2$ لتساوي 6.

بينما المتراجحة: $x_1 + 2x_2 \geq 6$

يمكن تحويلها إلى معادلة بإضافة متغير فائض غير سالب بإشاره سالبة كما يلي:

$$x_1 + 2x_2 - s = 6$$

$$s \geq 0$$

شكل البرامج الخطية

مثال: برنامج في الشكل القانوني لمسألة max :

$$\max \; z = 3000x_1 + 2000x_2$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

شكل البرامج الخطية

مثال: ويمكن تحويلة للشكل القياسي كما يلي :

$$\max \ z = 3000x_1 + 2000x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + s_1 \qquad\qquad\qquad &= 6 \\
2x_1 + x_2 \qquad + s_2 \qquad\qquad &= 8 \\
-x_1 + x_2 \qquad\qquad + s_3 \qquad &= 1 \\
x_2 \qquad\qquad\qquad + s_4 &= 2 \\
x_1 , x_2 , s_1 , s_2 , s_3 , s_4 &\geq 0
\end{aligned}$$

الحل الأساسي

حل نظام من معادلات خطية في حالة وجود عدد لانهائي من الحلول.
لنفترض لدينا النظام الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

عدد المعادلات $= m$

عدد المتغيرات $= n$

$$n > m$$

الحل الأساسي

- اختر m من المتغيرات لتكون متغيرات أساسية (Basic Variables or BV) (قيمتها لاتساوي الصفر).
- المتغيرات المتبقية (عددها $n - m$) تكون متغيرات غير أساسية (Non-Basic Variables or NBV) (قيمتها تساوي الصفر).
- **الحل الأساسي** (Basic Solution): نحصل عليه بوضع قيم جميع المتغيرات الغير أساسية مساوية للصفر. ثم نوجد حل للنظام (سنفترض دائماً وجود حل).

الحل الأساسي

مثال:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 \qquad\quad &= 10 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 20 \end{aligned}$$

لدينا ثلاثة متغيرات ($n = 3$) وقيدان ($m = 2$).
نحتاج تثبيت متغير واحد فقط ($n - m = 1$) عند الصفر.

يمكن إيجاد ثلاثة حلول أساسية:

المتغير x_1 غير أساسي: $(x_1, x_2, x_3) = (0, -10, 15)$
المتغير x_2 غير أساسي: $(x_1, x_2, x_3) = (10, 0, 5)$
المتغير x_3 غير أساسي: $(x_1, x_2, x_3) = (15, 5, 0)$

الحل الأساسي

سنوضح طريقة إيجاد الحلول الأساسية في المثال التالي:

$$\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 4 \\ 2x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل الأساسي

نحول المتباينات إلى معادلات بإضافة متغيرات مكملة: s_1 و s_2

$$\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$\boxed{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & s_1 & & & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & & & + & s_2 & = & 6 \end{array}}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

سنركز على نظام المعادلات.

لدينا أربعة متغيرات ($n = 4$) وقيدين ($m = 2$).

نحتاج تثبيت متغيرين فقط ($n - m = 2$) عند الصفر.

وبالتالي فإن الحل الأساسي سيحتوي على: متغيرين أساسيين ومتغيرين غير أساسيين.

الحل الأساسي

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 &= 6 \end{aligned}$$

مثلا: لو اخترنا أن تكون المتغيرات الغير أساسية هما: x_1 و s_2

وبالتالي فأن قيمها ستساوي الصفر: $x_1 = 0$, $s_2 = 0$

سيكون المتغيران x_2 و s_1 متغيران أساسيان، ولإيجاد قيمهما نحل المعادلتين:

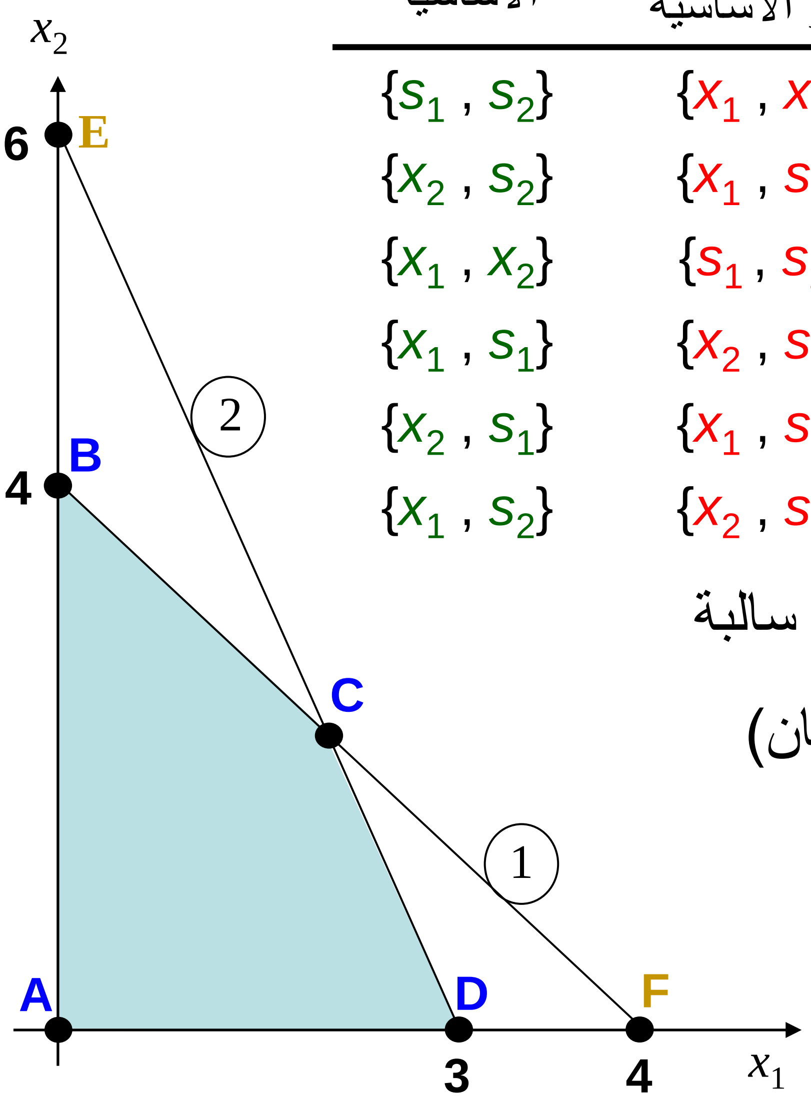
$$\begin{aligned} x_2 + s_1 &= 4 \\ x_2 &= 6 \end{aligned}$$

وبالتالي نحصل على الحل الأساسي:

$$(x_1 , x_2 , s_1 , s_2) = (0 , 6 , -2 , 0)$$

في الجدول التالي سنحدد كل الحلول الأساسية:

النقطة الموافقة للحل الأساسي	الحل الأساسي (x_1, x_2, s_1, s_2)	المتغيرات غير الأساسية	المتغيرات الأساسية
A	$(0, 0, 4, 6)$	$\{x_1, x_2\}$	$\{s_1, s_2\}$
B	$(0, 4, 0, 2)$	$\{x_1, s_1\}$	$\{x_2, s_2\}$
C	$(2, 2, 0, 0)$	$\{s_1, s_2\}$	$\{x_1, x_2\}$
D	$(3, 0, 1, 0)$	$\{x_2, s_2\}$	$\{x_1, s_1\}$
E	$(0, 6, -2, 0)$	$\{x_1, s_2\}$	$\{x_2, s_1\}$
F	$(4, 0, 0, -2)$	$\{x_2, s_1\}$	$\{x_1, s_2\}$



نلاحظ أن بعض هذه الحلول الأساسية قيمها غير سالبة

وتمثل في الرسم النقاط **A, B, C, D** (نقاط الأركان)

تسمى هذه الحلول: **الحلول الأساسية الممكنة**

النقطتان **F , E** تمثلان حلول أساسية غير ممكنة.

الحل الأساسي الممكن

تعريف: **الحل الأساسي الممكن** (Basic Feasible Solution)

هو الحل الأساسي الذي يحقق قيود اللاسالبية في البرنامج الخطي.

ويمثل هندسيا **إحدى النقاط الركنية** في منطقة الحلول الممكنة للبرنامج الخطي.

نظرية: إذا يوجد حل أمثل للبرنامج الخطي ، فإن أحد الحلول الأساسية الممكنة سيكون حل أمثل. (قد لا يكون الحل الأمثل الوحيد)

تعريف: **الحل الأساسي الغير الممكن** (Basic Infeasible Solution)

هو الحل الأساسي الذي لا يحقق أحد متغيراته القيود اللاسالبية في البرنامج الخطي.

مثال :- للبرنامج الخطي الآتي :-

$$\text{Max} \quad z = 4000x_1 + 3000x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 200x_1 + 240x_2 \leq 1200,$$

$$30x_1 + 15x_2 \leq 120$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

أوجد :-

(i) الصورة القياسية للبرنامج الخطي .

(ii) الحلول الأساسية والغير أساسية إن أمكن .

الحل :- تحويل القيود :-

$$200x_1 + 240x_2 + S_1 = 1200$$

$$30x_1 + 15x_2 + S_2 = 120$$

$$x_1 + 2x_2 - S_3 = 3$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

* وسائل تصغير الصورة القياسية ص :-

$$\text{Max} \quad Z = 4000x_1 + 3000x_2 + 0S_1 + 0S_2 - 0S_3$$

s.t.

$$200x_1 + 240x_2 + S_1 = 1200$$

$$30x_1 + 15x_2 + S_2 = 120$$

$$x_1 + 2x_2 - S_3 = 3$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0 .$$

عدد القيود = 3 ، عدد المجاهيل = 5 $\Rightarrow$ عدد المتغيرات الصفرية = $5 - 3 = 2$

+ تعيين الحلول الأساسية والغير أساسية :

Case 1:- let $x_1 = 0,\ x_2 = 0 \Rightarrow S_1 = 1200,\ S_2 = 120,\ S_3 = -3$

$\Rightarrow O_1 = (0, 0, 1200, 120, -3)$

Case 2:- let $x_1 = 0,\ S_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1200}{240} = \frac{120}{24} = 5,\ S_2 = 45,\ S_3 = 7$

$\Rightarrow O_2 = (0, 5, 0, 45, 7)$

Case 3:- let $x_1 = 0,\ S_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{120}{15} = 8,\ S_3 = 13,\ S_1 = -720$

$\Rightarrow O_3 = (0, 8, -720, 0, 13)$

Case 4:- let $x_1 = 0,\ S_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2},\ S_2 = \frac{195}{2},\ S_1 = 840$

$\Rightarrow O_4 = (0, \frac{3}{2}, 840, \frac{195}{2}, 0)$

Case 5:- let $x_2 = 0,\ S_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1200}{200} = 6,\ S_2 = -60,\ S_3 = 3$

$\Rightarrow O_5 = (6, 0, 0, -60, 3)$

Case 6:- let $x_2 = 0,\ S_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4,\ S_1 = 400,\ S_3 = 1$

$\Rightarrow O_6 = (4, 0, 400, 0, 1)$

Case 7:- let $x_2 = 0,\ S_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 3,\ S_2 = 30,\ S_1 = 600$

$\Rightarrow O_7 = (3, 0, 600, 30, 0)$

Case 8:- let $S_1 = 0,\ S_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{18}{7},\ x_2 = \frac{20}{7},\ S_3 = \frac{37}{7}$

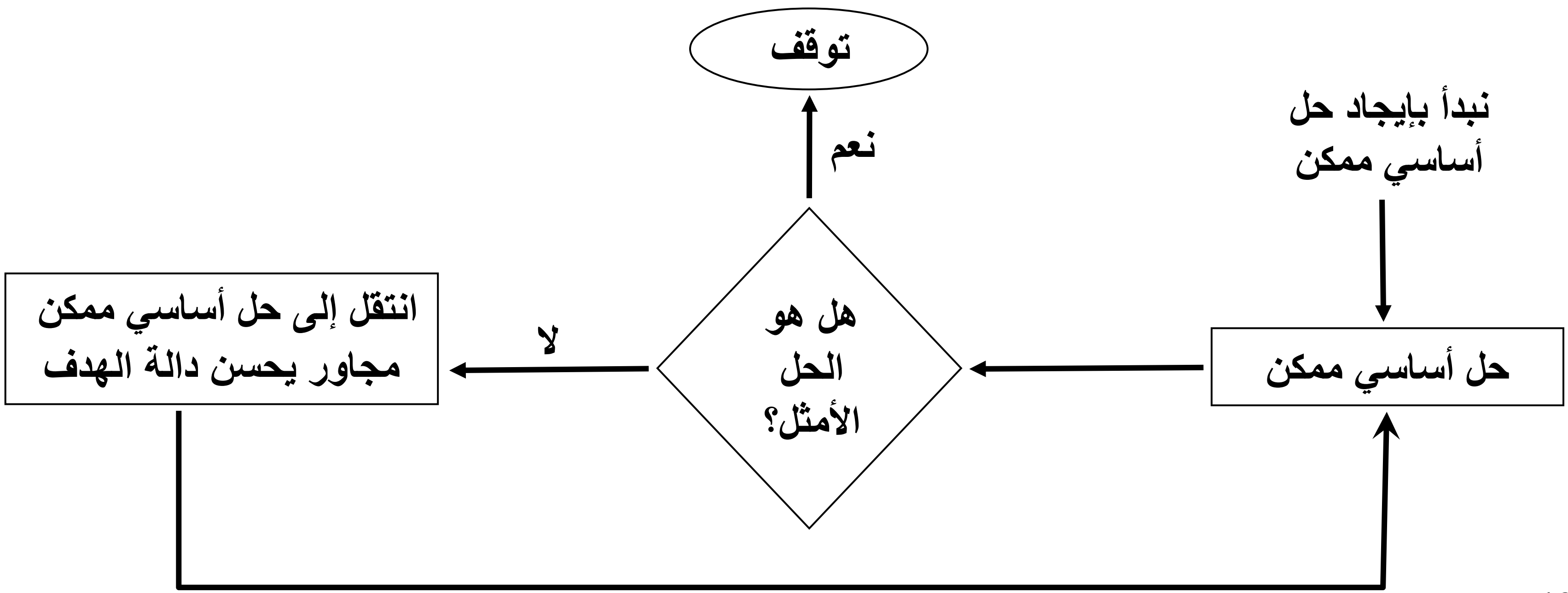
$\Rightarrow O_8 = (\frac{18}{7}, \frac{20}{7}, 0, 0, \frac{37}{7})$

⇐ الجدول التالي يوضح ملخص الحلول السابقة ⇐

الحلول	المتغيرات الأساسية "$\neq 0$"	المتغيرات الغير أساسية	حل أساسي ممكن	حل أساسي غير ممكن	السبب
O_1	s_1, s_2, s_3	x_1, x_2	–	✓	$s_3 < 0$
O_2	x_2, s_2, s_3	x_1, s_1	✓	–	
O_3	x_2, s_1, s_3	x_1, s_2	–	✓	$s_1 < 0$
O_4	x_2, s_1, s_2	x_1, s_3	✓	–	
O_5	x_1, s_2, s_3	x_2, s_1	–	✓	$s_2 < 0$
O_6	x_1, s_1, s_3	x_2, s_2	✓	–	
O_7	x_1, s_1, s_2	x_2, s_3	✓	–	
O_8	x_1, x_2, s_3	s_1, s_2	✓	–	

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

سندرس فقط تطبيقها في حل مسائل البرمجة الخطية التي في الشكل القانوني لمسألة “$\max\ z$”



خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

سنشرح خوارزمية السمبلكس بحل المثال التالي:

مثال: أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي مستخدما طريقة السمبلكس:

$$\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 4 \\ 2x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الخطوة الأولى: نحول البرنامج الخطي للشكل القياسي:

$$\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 \quad &= 4 \\ 2x_1 + x_2 \quad + s_2 &= 6 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

لاحظ أن:

$$\max \quad z = 4x_1 + 3x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + s_1 \quad &= 4 \\ 2x_1 + x_2 \quad + s_2 &= 6 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

تكافئ:

$$\max \quad z$$

s.t.

$$\begin{aligned} z &= 4x_1 + 3x_2 \\ x_1 + x_2 + s_1 \quad &= 4 \\ 2x_1 + x_2 \quad + s_2 &= 6 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

لاحظ أن:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 4x_1 + 3x_2 \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\
&\qquad 2x_1 + x_2 + s_2 = 6 \\
&\qquad x_1 , x_2 , s_1 , s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

وتكافئ:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z \\
&\text{s.t.} \\
&\qquad \boxed{\begin{array}{l} z - 4x_1 - 3x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + s_1 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + s_2 = 6 \end{array}} \\
&\qquad x_1 , x_2 , s_1 , s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

سنستخدم نظام المعادلات هذا لتكوين جدول السمبلكس المبدئي

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الخطوة الثانية: نكون جدول السمبلكس المبدئي كما يلي:

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	4
s_2	2	1	0	1	6

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

نفرض أن x_1 , x_2 متغيرات غيرأساسية أي أن $x_1 = 0, x_2 = 0$

بالتالي الحل الأساسي الممكن المبدئي: $(x_1 , x_2 , s_1 , s_2) = (0 , 0 , 4 , 6)$

بالتعويض في نظام المعادلات أوجدنا قيم s_1, s_2

BV = Basic Variables = المتغيرات الأساسية = s_1 , s_2

The Non-Basic Variables = المتغيرات غير الأساسية = x_1 , x_2

	BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
صف دالة الهدف ⟶	z	-4	-3	0	0	0
صف القيد الأول ⟶	s_1	1	1	1	0	4
صف القيد الثاني ⟶	s_2	2	1	0	1	6

RHS = Right Hand Side = جهة الطرف الأيمن

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الخطوة الثالثة: اختبار الأمثلية

شرط الأمثلية للحل الأساسي الممكن الحالي في جدول السمبلكس:

الحل الأساسي الممكن الحالي يكون حلاً أمثلاً إذا كانت معاملات جميع المتغيرات الغير أساسية في صف دالة الهدف z أكبر من أو تساوي الصفر.

وحيث أن: دائماً قيم المتغيرات الأساسية في صف دالة الهدف = صفر

الحل الأساسي الممكن الحالي يكون حلاً أمثلاً إذا كانت معاملات جميع المتغيرات في صف دالة الهدف z أكبر من أو تساوي الصفر (غير سالبة).

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	4
s_2	2	1	0	1	6

الحل الأساسي الممكن الحالي: $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (0, 0, 4, 6)$

وقيمة دالة الهدف $z = 0$

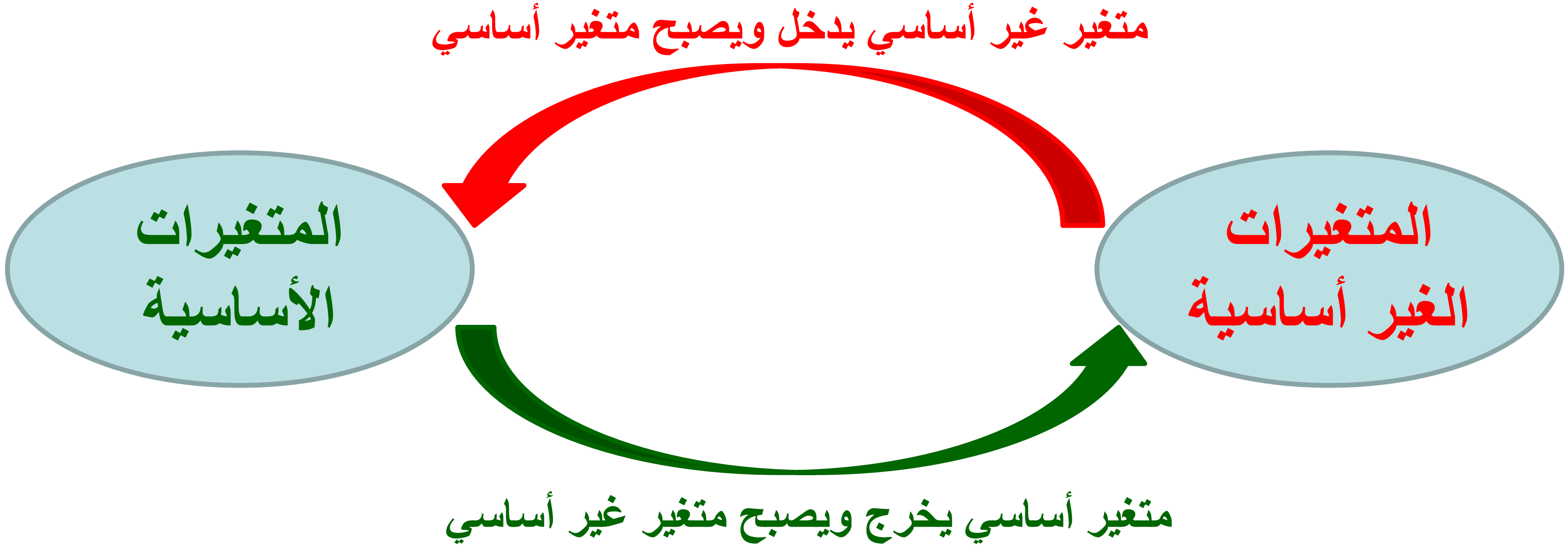
كما نلاحظ: لدينا قيم سالبة في صف دالة الهدف.

إذاً الحل الأساسي الممكن الحالي غير أمثل.

لابد من الانتقال لحل أساسي ممكن آخر يكون أفضل.

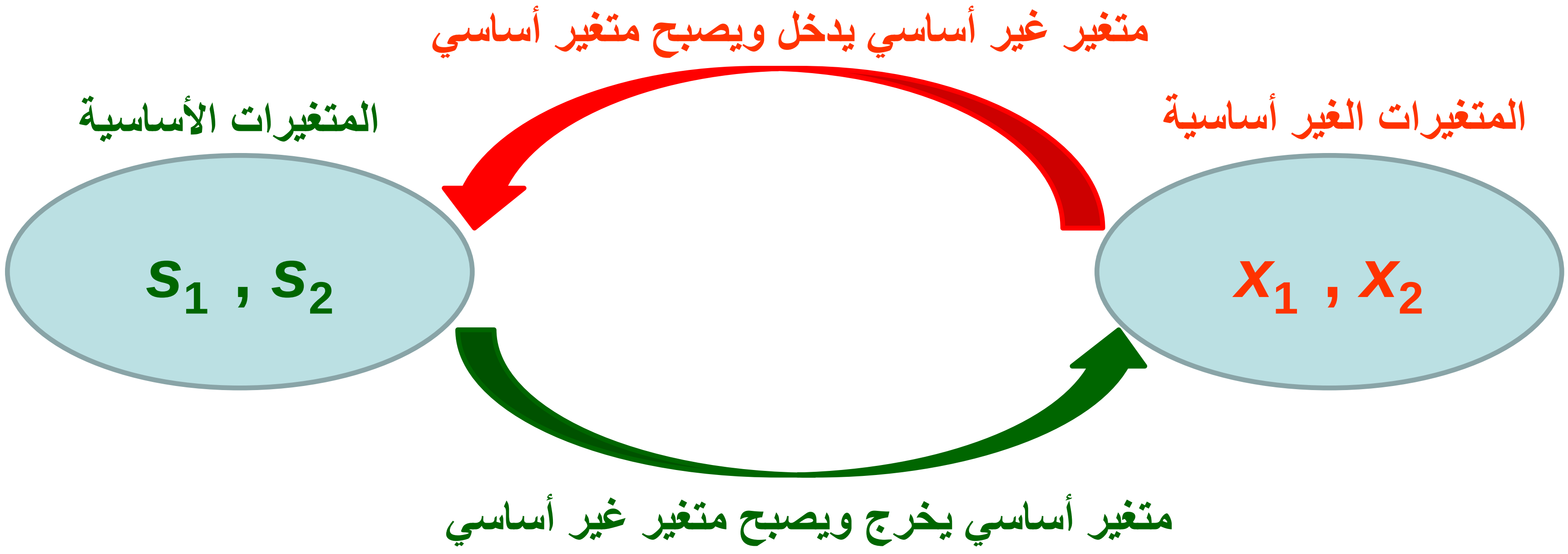
خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

سيتم الانتقال إلى حل أساسي ممكن آخر **مجاور** يكون أفضل.
تتم هذه العمليه باستبدال متغير من مجموعة المتغيرات الغير أساسية ليصبح متغير أساسي، بدلاً عن متغير أساسي الذي يصبح غير أساسي.



خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

سيتم الانتقال إلى حل أساسي ممكن آخر **مجاور** يكون أفضل.
تتم هذه العمليه باستبدال متغير من مجموعة المتغيرات الغير أساسية ليصبح متغير أساسي، بدلاً عن متغير أساسي الذي يصبح غير أساسي.



خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الخطوة الرابعة:

نختار المتغير غير الأساسي الداخل لمجموعة المتغيرات الأساسية.

نختار المتغير ذو القيمة الأكثر سالبية في صف دالة الهدف z.

و هو المتغير x_1 في مثالنا.

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	4
s_2	2	1	0	1	6

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الخطوة الخامسة:

نختار المتغير الأساسي الخارج ليصبح في مجموعة المتغيرات الغير أساسية:
هو المتغير ذو الأقل قيمة في اختبار النسبة الصغرى.

اختبار النسبة الصغرى (Minimum Ratio Test):

نقسم قيم الطرف الأيمن على قيم عمود المتغير الداخل الموجبة فقط.
يخرج المتغير ذو القيمة الأصغر. إذا يخرج المتغير s_2

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	Ratio Test
z	−4	−3	0	0	0	
s_1	1	1	1	0	4	4/1 = 4
← s_2	2	1	0	1	6	6/2 = 3

المتغيرالخارج

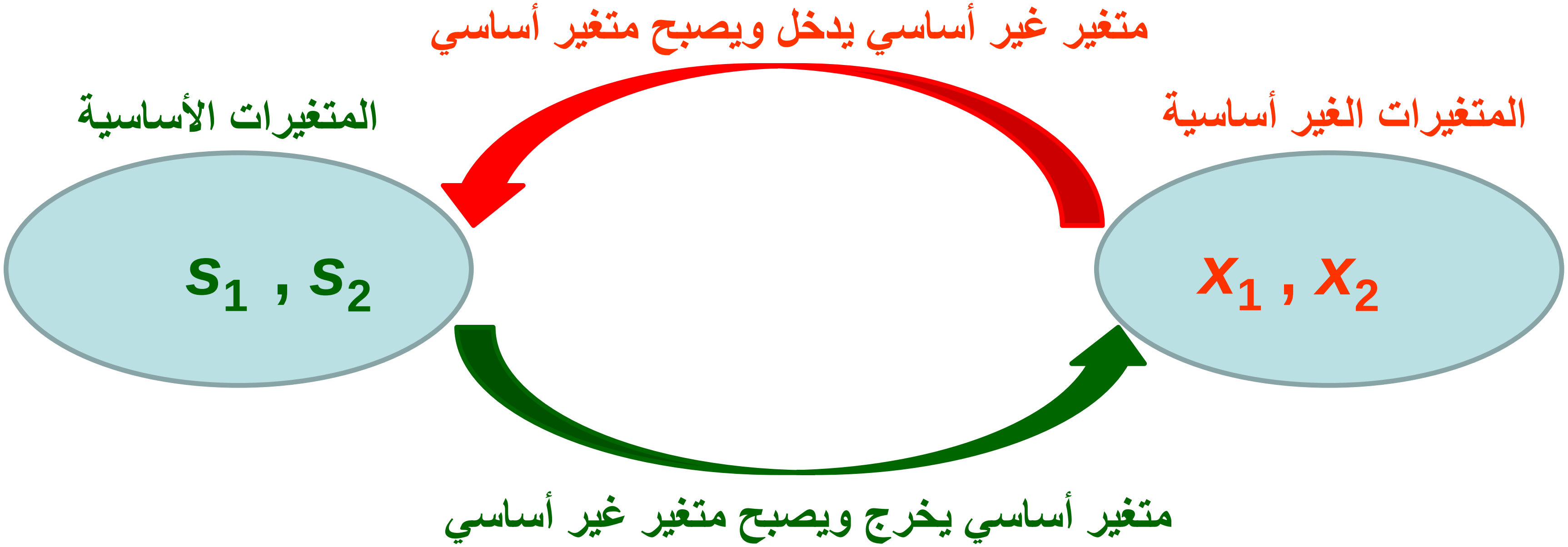
خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

ملاحظات:

- عند اختيار المتغير الغير أساسي الداخل:
  - عند وجود تساو في قيمة "الأكثر سالبية" في صف z يمكن اختيار أي منها.
  - عموما يمكن اختيار أي متغير ذو قيمة سالبة في صف z.
  - يوجد قواعد أكثر تعقيدا لاختيار المتغير الغير أساسي الداخل.
- عند وجود تساو في اختبار النسبة الصغرى لاختيار المتغير الأساسي الخارج:
  - يمكن اختيار أي من المتغيرات الأساسية ذات نفس قيمة النسبة الصغرى.
  - أيضا يوجد قواعد أكثر تعقيدا في هذه الحالة.

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

سيتم دخول المتغير الغير أساسي X_1 ليصبح متغير أساسي، بدلاً عن المتغير الأساسي S_2 الذي سيخرج ليصبح متغير غير أساسي.



خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

الخطوة السادسة: عملية التحوير (تحديث جدول السمبلكس)

العنصر المحوري: عند تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج.

كون جدول السمبلكس الجديد كما يلي:

1. نُدِّخل المتغير الداخل x_1 في مكان المتغير الخارج S_2.
2. نُحدِّث صف المتغير الخارج بحيث نجعل العنصر المحوري مساوياً للواحد وذلك بقسمة جميع قيم صف المتغير الخارج على قيمة العنصر المحوري.
3. نُحدِّث بقية الصفوف (بعمليات أولية على الصفوف) بحيث نجعل بقية عناصر عمود المتغير الداخل في الجدول الجديد أصفاراً.

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	4
s_2	2	1	0	1	6

المتغير الخارج

Ratio Test
4/1 = 4
6/2 = 3

العنصر المحوري

x_1
0
0
1

نحتاج تحويل عمود x_1 ليصبح:

دائماً سنجعل قيمة العنصر المحوري مساوية للواحد ، وبقية قيم العمود مساوية للصفر

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	4
s_2	2	1	0	1	6

المتغير الخارج

Ratio Test

4/1 = 4

6/2 = 3

صف القيد الثاني الجديد = صف القيد الثاني القديم مقسوماً على 2

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z					
s_1					
$\boldsymbol{x_1}$	**1**	**1/2**	**0**	**1/2**	**3**

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	-4	-3	0	0	0
s_1	1	1	1	0	4
s_2	2	1	0	1	6

المتغير الخارج

<u>Ratio Test</u>

4/1 = 4

6/2 = 3

صف القيد الأول الجديد =((1–) × صف القيد الثاني الجديد) + صف القيد الأول القديم

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z					
s_1	**0**	**1/2**	**1**	**–1/2**	**1**
x_1	1	1/2	0	1/2	3

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	Ratio Test
z	-4	-3	0	0	0	
s_1	1	1	1	0	4	4/1 = 4
s_2	2	1	0	1	6	6/2 = 3

المتغير الخارج

صف دالة الهدف الجديد = (4 × صف القيد الثاني الجديد) + صف دالة الهدف القديم

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	**0**	**-1**	**0**	**2**	**12**
s_1	0	1/2	1	$-1/2$	1
x_1	1	1/2	0	1/2	3

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

بعد إكمال عملية تحديث الجدول، نحصل على جدول السمبلكس التالي:

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	-1	0	2	12
s_1	0	1/2	1	$-1/2$	1
x_1	1	1/2	0	1/2	3

الحل الأساسي الممكن الحالي: $(x_1, x_2, s_1, s_2) = (3, 0, 1, 0)$

قيمة دالة الهدف $z = 12$

الآن نكرر خطوات طريقة السمبلكس من جديد.
نختبر الأمثلية. هذا الحل الأساسي الممكن ليس أمثل لوجود قيمة سالبة في صف z.
نتحرك مرة أخرى إلى حل أساسي ممكن مجاور أفضل.

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل

المتغير الخارج

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	-1	0	2	12
s_1	0	1/2	1	$-1/2$	1
x_1	1	1/2	0	1/2	3

Ratio Test

$1/0.5 = 2$

$3/0.5 = 6$

صف القيد الأول الجديد = صف القيد الأول القديم مضروباً في 2

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z					
$\boldsymbol{x_2}$	**0**	**1**	**2**	**-1**	**2**
x_1					

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	Ratio Test
z	0	−1	0	2	12	
s_1	0	1/2	1	−1/2	1	1/0.5 = 2
x_1	1	1/2	0	1/2	3	3/0.5 = 6

المتغير الخارج

صف القيد الثاني الجديد = ((−1/2) × صف القيد الأول الجديد) + صف القيد الثاني القديم

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z					
x_2	0	1	2	−1	2
x_1	**1**	**0**	**−1**	**1**	**2**

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	-1	0	2	12
s_1	0	1/2	1	$-1/2$	1
x_1	1	1/2	0	1/2	3

المتغير الخارج

Ratio Test

1/0.5 = 2

3/0.5 = 6

صف دالة الهدف الجديد = (1 × صف القيد الأول الجديد) + صف دالة الهدف القديم

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	**0**	**0**	**2**	**1**	**14**
x_2	0	1	2	-1	2
x_1	1	0	-1	1	2

خوارزمية السمبلكس لحل البرامج الخطية

بعد إكمال عملية تحديث الجدول، نحصل على جدول السمبلكس التالي:

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	0	2	1	14
x_2	0	1	2	-1	2
x_1	1	0	-1	1	2

الحل الأساسي الممكن الحالي: $(x_1 , x_2 , s_1 , s_2) = (2 , 2 , 0 , 0)$

قيمة دالة الهدف $z = 14$

الآن نختبر الأمثلية.

هذا الحل أمثل لأنه لا يوجد قيمة سالبة في صف z. نتوقف.

<u>مثال 2:</u>

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي مستخدماً طريقة السمبلكس:

$$\max \quad z = 30x_1 + 20x_2 + 5x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\le 8 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 &\le 8 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

<u>الحل:</u>

نضع البرنامج في الشكل القياسي:

$$\max \quad z = 30x_1 + 20x_2 + 5x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 \quad\quad &= 8 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \quad\quad + s_2 &= 8 \\ x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

نكون جدول السمبلكس المبدئي
ونكمل حتى الوصول للحل الأمثل.

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	-30	-20	-5	0	0	0
s_1	2	1	1	1	0	8
s_2	1	3	-4	0	1	8

المتغير الخارج: s_1

Ratio Test

8/2 = 4

8/1 = 8

نجعل العنصر المحوري يساوي 1 لذلك نقسم كل صف العنصر المحوري على 2. ونجعل بقية عناصر العمود تساوي 0.

صف دالة الهدف الجديد = (30 × صف القيد الأول الجديد) + صف دالة الهدف القديم

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	0	-5	10	15	0	120
s_1	1	0.5	0.5	0.5	0	4
s_2	1	3	-4	0	1	8

صف القيد الثاني الجديد = (1- × صف القيد الأول الجديد) + صف القيد الثاني القديم

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	0	-5	10	15	0	120
x_1	1	1/2	1/2	1/2	0	4
s_2	0	5/2	$-9/2$	$-1/2$	1	4

الحل الأساسي الممكن الحالي: $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (4, 0, 0, 0, 4)$

قيمة دالة الهدف $z = 120$

الآن نكرر خطوات طريقة السمبلكس من جديد.

نختبر الأمثلية. هذا الحل الأساسي الممكن ليس أمثل لوجود قيمة سالبة في صف z.

نتحرك مرة أخرى إلى حل أساسي ممكن مجاور أفضل.

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	Ratio Test
z	0	-5	10	15	0	120	
x_1	1	1/2	1/2	1/2	0	4	4/(1/2) = 8
s_2	0	5/2	$-9/2$	$-1/2$	1	4	4/(5/2) = 8/5

المتغير الخارج

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	0	0	1	14	2	128
x_1	1	0	7/5	3/5	−1/5	16/5
x_2	0	1	−9/5	−1/5	2/5	8/5

هذا الحل أمثل لأنه لا يوجد قيمة سالبة في صف z . نتوقف.

الحل الأساسي المكمن الحالي أمثل:

$$(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2) = (16/5, 8/5, 0, 0, 0)$$

قيمة دالة الهدف المثلى $z = 128$

مثال 3:

أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي التالي مستخدماً طريقة السمبلكس:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 6x_1 + 14x_2 + 13x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& 1/2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 24 \\
& x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 60 \\
& x_1 , x_2 , x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

الحل:

نضع البرنامج في الشكل القياسي:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 6x_1 + 14x_2 + 13x_3 \\
\text{s.t.} \quad & \\
& 1/2x_1 + 2x_2 + x_3 + s_1 = 24 \\
& x_1 + 2x_2 + 4x_3 + s_2 = 60 \\
& x_1 , x_2 , x_3 , s_1 , s_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

نكون جدول السمبلكس المبدئي
ونكمل حتى الوصول للحل الأمثل.

المتغير الداخل: x_2

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	Ratio Test
z	-6	-14	-13	0	0	0	
s_1	1/2	2	1	1	0	24	24/2 = 12
s_2	1	2	4	0	1	60	60/2 = 30

المتغير الخارج: s_1

المتغير الداخل: x_3

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS	Ratio Test
z	$-5/2$	0	-6	7	0	168	
x_2	1/4	1	1/2	1/2	0	12	12/(1/2) = 24
s_2	1/2	0	3	-1	1	36	36/3 =12

المتغير الخارج: s_2

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	$-3/2$	0	0	5	2	240
x_2	1/6	1	0	2/3	$-1/6$	6
x_3	1/6	0	1	$-1/3$	1/3	12

المتغير الخارج: x_2

Ratio Test

6/(1/6) = 36

12/(1/6) = 72

BV	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	RHS
z	0	9	0	11	1/2	294
x_1	1	6	0	4	-1	36
x_3	0	-1	1	-1	1/2	6

الحل الأمثل:

$x_1 = 36\,,\; x_2 = 0\,,\; x_3 = 6\,,\; s_1 = 0\,,\; s_2 = 0\,,\; z = 294$

حلول مثلى متعددة (بديلة)

- في صف دالة الهدف في جميع جداول السمبلكس: دائما قيم المتغيرات الأساسية تساوي الصفر.
- في صف دالة الهدف لجدول السمبلكس النهائي للحل الأمثل:
  - إذا كانت قيم جميع المتغيرات الغير أساسية أكبر من الصفر فإنه لدينا حل أمثل وحيد (جميع الأمثلة السابقة لها حل أمثل وحيد).
  - إذا وجد متغير غير أساسي قيمته تساوي الصفر فإنه لدينا حلول أساسية مثلى متعددة. وعند الرغبة في إيجاد حل أمثل بديل ، يتم اختيار أحد المتغيرات الغير أساسية التي قيمتها تساوي الصفر ليصبح متغير أساسي.

حلول مثلى متعددة (بديلة)

مثال:

- لدينا جدول السمبلكس النهائي للحل الأمثل التالي:

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	0	3	0	6
x_1	1	2	2	0	2
s_2	0	2	4	1	4

- الحل الأمثل $z^* = 6\,, x_1 = 2, s_2 = 4, x_2 = 0, s_1 = 0$
- حيث أن قيمة المتغير x_2 في صف دالة الهدف تساوي الصفر ، فإنه لدينا حلول مثلى متعددة.
- عند الرغبة في إيجاد حل أمثل بديل ، ندخل المتغير x_2 كمتغير أساسي.

حلول مثلى متعددة (بديلة)

المتغير الداخل

المتغير الخارج

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	0	3	0	6
x_1	1	2	2	0	2
s_2	0	2	4	1	4

Ratio Test

2/2 = 1

4/2 = 2

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
z	0	0	3	0	6
x_2	1/2	1	1	0	1
s_2	-1	0	2	1	2

حصلنا على حل أمثل آخر بنفس قيمة دالة الهدف المثلى وهو:

$$z^* = 6\,, x_1 = 0, s_2 = 2, x_2 = 1, s_1 = 0$$

قيمة دالة الهدف غير محدودة

مثال:

المتغير الداخل ↓ (x_2)

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	Ratio Test
z	0	-3	-1	0	0	
x_1	1	-1	1	0	5	–
s_2	0	-2	2	1	8	–

عند عدم إمكانية إجراء اختبار النسبة الصغرى:

أي لا يوجد قيمة موجبة (أكبر من الصفر) في عمود المتغير الداخل

فإننا نستنتج أن الحل الأمثل غير محدود ، أي أن $z^* = +\infty$

قيمة دالة الهدف غير محدودة

مثال آخر:

المتغير الداخل

BV	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS	Ratio Test
z	0	-3	-1	0	0	
x_1	1	0	1	0	5	–
s_2	0	-2	2	1	8	–

الحل الأمثل غير محدود ، أي أن $z^* = +\infty$

طرق حل أخرى

- بعض البرامج الخطية ليس لها حل ممكن. يتم اكتشاف ذلك بطرق حل خاصة ستدرس في مقررات لاحقة.
  - عندما يكون البرنامج الخطي في الشكل القانوني لمسألة "max" فإنه دائما يوجد حل ممكن.
- يوجد طرق حل متنوعة منبثقة من نهج خوارزمية السمبلكس.
- يوجد طرق للحل غير نهج طريقة السمبلكس ، مثل طرق الحل الداخلي (Interior Point Methods).

جامعة الملك سعود

كلية العلوم – قسم الاحصاء وبحوث العمليات

واجـــب منزلي

السؤال 1 : ليكن البرنامج الخطي التالي :

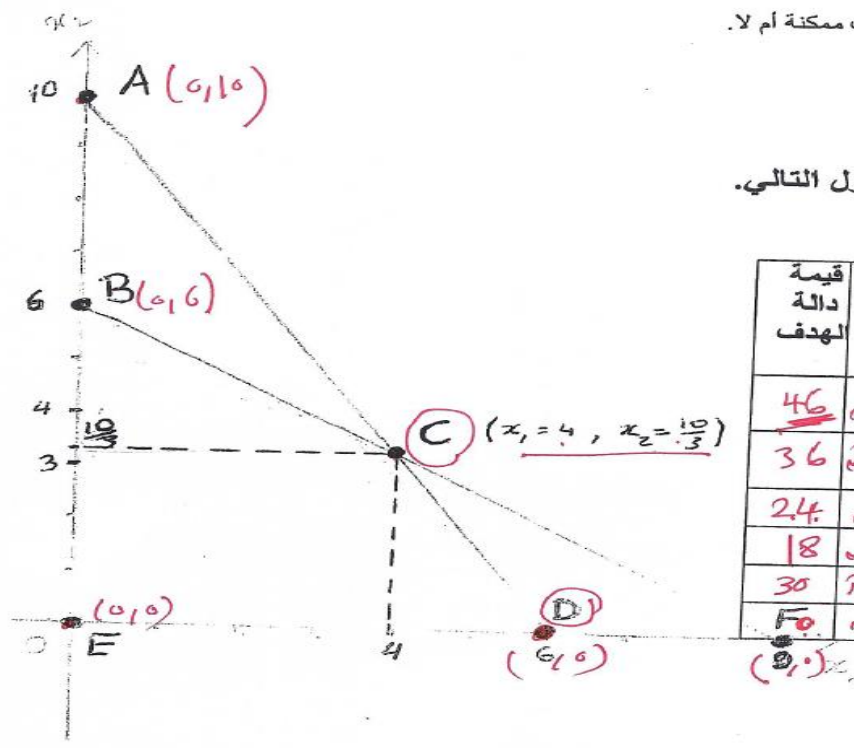
$$\mathbf{Min}\ z = 4x_1 + 3x_2$$

$$\begin{aligned} s.t.: \quad & 5x_1 + 3x_2 \le 30 && (1) \\ & 2x_1 + 3x_2 \le 18 && (2) \\ & x_1 , x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

حول المتباينات إلى معادلات ثم ضمن الجدول التالي أوجد جميع الحلول الأساسية وبين مايلي :

1) النقطة البيانية المقابل لهل على الرسم البياني.
2) المتغيرات الأساسية والغيرأساسية و قيمها. حدد إذا كانت ممكنة أم لا.
3) قيمة دالة الهدف
4) حدد الحل الأمثل للبرنامج الخطي

خطوات الحل: ارسم منطقة الحلول ثم املأ الجدول التالي.



المتغيرات الأساسية	المتغيرات غير الأساسية = صفر	الحل الأساسي $(x_1, x_2, s_1\ s_2)$	النقطة الموافقة للحل الأساسي	الحل ممكن أم لا	قيمة دالة الهدف
$\{x_1 , x_2\}$	$\{s_1 , s_2\}$	$(4, \frac{10}{3}, 0, 0)$	C	ممكن	46
$\{x_1 , s_1\}$	$\{x_2 , s_2\}$	$(9, 0, -15, 0)$	F	غير ممكن	36
$\{x_1 , s_2\}$	$\{x_2 , s_1\}$	$(6, 0, 0, 6)$	D	ممكن	24
$\{x_2 , s_1\}$	$\{x_1 , s_2\}$	$(0, 6, 12, 0)$	B	ممكن	18
$\{x_2 , s_2\}$	$\{x_1 , s_1\}$	$(0, 10, 0, -12)$	A	غير ممكن	30
$\{s_1 , s_2\}$	$\{x_1 , x_2\}$	$(0, 0, 30, 18)$	E	ممكن	0