جامعة الملك سعود

كلية العلوم

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

نظرية القرارات

Decision Theory

الباب الرابع

معالجة تقدير المعالم كمسألة إتخاذ القرار

مقدمة عن التقدير: التقدير هو الفرع الأول في مسـألة الاسـتدلال الإحصـائي، والفرع الثاني هو اختبار الفرضـيات. ونلخص موضـوع التقدير بأنه لدينا دالة التوزيع الاحتمالية $f(x;\theta)$ حيث θ تمثل معلمة مجهولة فيه وتأخذ قيمها في فضـاء المعلمة الذي نعطيه الرمز Ω، وأننا نبحث عن نقطة تكون قريبة من هذه المعلمة المجهولة نسـميها تقديراً نقطياً لها. ونحقق ذلك بأخذ عينة عشـوائية $\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ من التوزيع $f(x;\theta)$ ونعتبر أي إحصائية $T(\underline{X})$ في العينة هي هذا **التقدير النقطي** للمعلمة المجهولة θ . وحيث أنه يجب على T أن تأخذ قيمها في الفضـاء Ω ، لذا فإننا نعتبر T بالمفاهيم الرياضية دالة من فضاء المعاينة $\{\underline{X}\}$ إلى فضاء المعلمة Ω، كما يلي:

$$T: \{\underline{X}\} \longrightarrow \Omega$$

معالجة التقدير كمسألة إتخاذ القرار:

نحتاج تحليل مسألة التقدير لنعرف أين توجد فيها عناصر مسألة اتخاذ القرار الأربعة، ونقصد بذلك الظروف والإجراءات البسيطة ودالة الخسارة ودالة البيانات:

1- نعتبر المعلمة المجهولة θ التي نقوم بتقديرها والتي تأخذ قيمها في فضاء المعلمة Ω هي الظرف المستقبلي المجهول عندما نتعامل مع التقدير كمسألة اتخاذ القرار.

2- عرفنا التقدير T بأنه الدالة $T: \{\underline{X}\} \longrightarrow \Omega$. فإذا اعتبرنا فضاء المعلمة Ω على أنه مجموعة الإجراءات البسيطة $\mathcal{A}$ (أي $\mathcal{A} = \Omega$) فسيصبح T تصرفاً عندما نتعامل معه كمسألة اتخاذ القرار لأنه أصبح دالة من البيانات الى مجموعة الإجراءات البسيطة.

3- نحتاج الآن دالة خسارة $\boldsymbol{\ell}(a, \boldsymbol{\theta})$ مناسبة. وبما أن الإجراء البسيط $\boldsymbol{a}$ سيكون قيمة التقدير T للمعلمة θ ، لذا فإن أفضل دالة خسارة هي التي تنقص كلما اقترب $\boldsymbol{T}$ من $\boldsymbol{\theta}$ والعكس بالعكس. وأفضل من يعبر عن هذه الميزة هي الدالة التربيعية $\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{T} - \boldsymbol{\theta})^2$ ، التي نسميها في علم التقدير "بمربع الخطأ "، وستأخذ عندئذ $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{\theta})$ دالة المخاطرة للتقدير $\boldsymbol{T}$ عند $\boldsymbol{\theta}$ القيمة $\boldsymbol{E_X}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{\theta})^2$ التي نسميها في علم التقدير "بمتوسط مربع الخطأ $(\boldsymbol{MSE})$". وإن للدالة التربيعية فائدة أخرى أنها تساعد على تبسيط العمليات الحسابية كما سنرى ذلك لاحقاً.

4- وأخيراً توجد دالة بيانات هي دالة التوزيع الاحتمالية $f(x;\theta)$

وهكذا تكون عملية تحليل مســـألة التقدير قد اكتملت، وعرفنا كيفية تناولها كمســـألة اتخاذ القرار:

فالمعلمة Θ هي الظرف في الفضاء Ω ، و مجموعة الإجراءات البسيطة $\mathcal{A}$ هي نفس فضاء المعلمة Ω ودالة الخسارة هي الدالة التربيعية $\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{\theta})^2$.

وأخيراً، فإننا سنبحث هنا فقط عن تقدير بيز T_B الذي يصغر مخاطرة بيز:

$$\boldsymbol{B(T) = \Sigma_\theta \Sigma_x \ell(T(x),\theta) f(x;\theta) g(\theta) = \Sigma_\theta \Sigma_x (T(x)-\theta)^2 f(x;\theta) g(\theta)}$$

أو سنقوم بتصغير المقدار المكافئ التالي:

$$\boldsymbol{B(T) = \Sigma_x [\Sigma_\theta (T(x)-\theta)^2 h(\theta|x)] k(x)}$$

معتبرين صحة العلاقة: $\boldsymbol{h(\theta|x)k(x) = f(x;\theta)g(\theta)}$

وستكون خطة تصغير المقدار $\boldsymbol{B(T)}$ بأن نصغر المجموع الداخلي:

$$\boldsymbol{\Sigma_\theta (T(x)-\theta)^2 h(\theta|x)}$$

عند كل قيمة من قيم البيانات $\boldsymbol{x_i}$ بإحدى طريقتين:

1- **<u>الطريقة الأولى</u>** هي نفس الطريقة العامة التي قمنا بها في الجزء 3، حيث نجرب عند $\boldsymbol{x_i}$ كل الإجراءات في المجموعة $\mathcal{A}$ عن قيمة $\boldsymbol{T(x_i)}$ التي تصـــغر المجموع الداخلي ونســـميه $\boldsymbol{\theta_i^*}$، وأخيراً نحصل على النتائج التالية:

$$T_B(\boldsymbol{x_1}) = \boldsymbol{\theta_1^*}, \qquad T_B(\boldsymbol{x_2}) = \boldsymbol{\theta_2^*}, \ldots\ldots\ldots, \qquad T_B(\boldsymbol{x_n}) = \boldsymbol{\theta_n^*}$$

2- **<u>الطريقة الثانية:</u>** وهي طريقة مختصرة **<u>تستعمل فقط في التقدير</u>** مستفيدين من خاصية دالة الخسارة التربيعية عند تصغير المجموع الداخلي:

$$\boldsymbol{\Sigma_\theta (T(x)-\theta)^2 h(\theta|x)}$$

والذي نعلم رياضياً بأن هذا التصغير يتم عندما نأخذ عند كل $\boldsymbol{x_i}$ التوقع أو المتوسط التالي:

$$T_B(\boldsymbol{x_i}) = \boldsymbol{E_h(\theta) = \Sigma_\theta \theta h(\theta|x_i)}$$

ولكي نضـمن أن $T_B(\boldsymbol{x_i})$ يأخذ قيمه في Ω فإننا نقرب التوقع لأقرب قيمة في Ω . وسـنوضـح هاتين الطريقتين في المثال القادم. ونلاحظ في **<u>الشـرح السـابق أن المعلمة $\boldsymbol{\theta}$ منفصـلـة</u>** ولكننا **<u>سـنعالج</u>** بعد المثال الحالة **<u>عندما تكون المعلمة $\boldsymbol{\theta}$ متصلة</u>**.

مثال1: إذا علمت أن نسبة المدخنين في مدينة ما تساوي θ وتأخذ قيمتها في المجموعة:

$$\theta \in \Omega = \{0.1, 0.2, 0.4\}$$

بالاحتمالات المبدئية θ التالية:

θ	0.1	0.2	0.4
$g(\theta)$	0.3	0.5	0.2

قمنا بسحب عينة بالحجم $\boldsymbol{n = 3}$ وعرفنا المتغير $\boldsymbol{X}$= عدد المدخنين في العينة.

عالج مسألة تقدير المعلمة $\boldsymbol{\theta}$ كمسألة إتخاذ قرارات مع البيانات وأجب على مايلي:

1-ماهي مجموعات الظروف والإجراءات ودالة الخسارة؟

2-لماذا نعتبر التقدير T تصرفاً، وكم عدد التقديرات (أو التصرفات) الممكنة؟

3-أوجد تقدير(أو تصرف) بيز T_B بكل الطرق الممكنة وثم احسب مخاطرة بيز $B(T_B)$.

4-أوجد المخاطرات $\boldsymbol{r(T_B, \theta)}$ (أو متوسط مربع الخطأ للتقدير) T_B واستعملها لحساب $B(T_B)$.

5-اقترح تقديراً(أو تصرفاً) آخر وقارنه مع T_B.

الجواب:

1-مجموعات الظروف والإجراءات ودالة الخسارة هي:

- مجموعات الظروف والإجراءات هي:

$$\mathcal{A} = \Omega = \{0.1, 0.2, 0.4\}$$

- ودالة الخسارة هي الدالة التربيعية:

$$\boldsymbol{\ell(a, \theta) = (a - \theta)^2}$$

2-لماذا نعتبر التقدير T تصرفاً، وكم عدد التقديرات (أو التصرفات) الممكنة؟

- لأن التقدير والتصرف كلاهما دالة:

من مجموعة البيانات $\mathbb{X} = \{0, 1, 2, 3\}$ وعددها $n = 4$

الى مجموعة الإجراءات $\mathcal{A} = \{0.1, 0.2, 0.4\}$ وعددها $k = 3$

- وعدد التقديرات (أو التصرفات) هو: $k^n = 3^4 = 81$

3-أوجد تقدير (أو تصرف) بيز T_B واحسب مخاطرة بيز $B(T_B)$ بكل الطرق الممكنة:

نعلم أن للبيانات $\boldsymbol{X}$ دالة توزيع ذو الحدين $f(x;\theta)=bin(\boldsymbol{n},\theta)$ حيث:

$\theta\in\{0.1,0.2,0.4\}$ ، $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{3}$

وبسهولة نحسب هذه القيم ونضعها في الجدول التالي:

	قيم المعلمة θ		
	0.1	0.2	0.4
$x=0$	0.729	0.512	0.216
$x=1$	0.243	0.384	0.432
$x=2$	0.027	0.096	0.288
$x=3$	0.001	0.008	0.064
$f(x;\theta)$			

وباستخدام الاحتمالات المبدئية θ التالية:

θ	0.1	0.2	0.4
$g(\theta)$	0.3	0.5	0.2

نطبق قاعدة الاحتمالات الكلية $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})$ ، $\forall\boldsymbol{x}\Rightarrow$ فنحصل على القيم:

$$k(0)=0.5179,\quad k(1)=0.3513,\quad k(2)=0.1137\quad k(3)=0.0171$$

ونطبق قاعدة دالة التوزيع البعدية $h(\theta/x)=f(x;\theta)g(\theta)/k(x)$ فنحصل على الجدول التالي:

	قيم المعلمة θ		
	0.1	0.2	0.4
$x=0$	0.4223	0.4943	0.0834
$x=1$	0.2075	0.5465	0.2459
$x=2$	0.0712	0.4222	0.5066
$x=3$	0.0175	0.2339	0.7485
$h(\theta/x)=f(x;\theta)g(\theta)/k(x)$			

<u>الطريقة الأولى (كما في الباب 3)</u> لحساب تقدير (أو تصرف) بيز T_B و $B(T_B)$:

- نبحث عندما $x=0$ عن قيمة $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{0})$ في $\{0.1,0.2,0.4\}$ التي تصغر $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{T}(\boldsymbol{0})-\boldsymbol{\theta})^{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{0})$:

$$x=0\Rightarrow\begin{bmatrix} T(0) & | & \sum_{\theta}\ (T(0)-\theta)^2h(\theta;0) \\ -- & -- & ------------------ \\ 0.1 & | & 0^2\times0.4223+0.1^2\times0.4943+0.3^2\times0.0834\ =0.012449 \\ 0.2 & | & 0.1^2\times0.4223+0^2\times0.4943+0.2^2\times0.0834\ =(0.007559) \\ 0.4 & | & 0.3^2\times0.4223+2^2\times0.4943+0^2\times0.0834\ =0.05778\end{bmatrix}\Rightarrow T_B(0)=0.2$$

- نبحث عندما $x = 1$ عن قيمة $\boldsymbol{T(1)}$ في $\{0.1, 0.2, 0.4\}$ التي تصغر $\boldsymbol{\Sigma_\theta(T(1)-\theta)^2 h(\theta|1)}$:

$$x=1 \Rightarrow \begin{bmatrix} T(1) \mid & \sum_\theta \ (T(1)-\theta)^2 h(\theta;1) \\ \text{--------------------------} & \\ 0.1 \mid & 0^2 \times 0.2075 + 0.1^2 \times 0.5465 + 0.3^2 \times 0.2459 \ = 0.027596 \\ 0.2 \mid & 0.1^2 \times 0.2075 + 0^2 \times 0.5465 + 0.2^2 \times 0.2459 \ = (0.011911) \\ 0.4 \mid & 0.3^2 \times 0.2075 + 2^2 \times 0.5465 + 0^2 \times 0.2459 \ = 0.040535 \end{bmatrix} \Rightarrow T_B(1) = 0.2$$

- نبحث عندما $x = 2$ عن قيمة $\boldsymbol{T(2)}$ في $\{0.1, 0.2, 0.4\}$ التي تصغر $\boldsymbol{\Sigma_\theta(T(2)-\theta)^2 h(\theta|2)}$:

$$x=2 \Rightarrow \begin{bmatrix} T(2) \mid & \sum_\theta \ (T(2)-\theta)^2 h(\theta;2) \\ \text{--------------------------} & \\ 0.1 \mid & 0^2 \times 0.0712 + 0.1^2 \times 0.4222 + 0.3^2 \times 0.5066 \ = 0.049816 \\ 0.2 \mid & 0.1^2 \times 0.0712 + 0^2 \times 0.4222 + 0.2^2 \times 0.5066 \ = (0.020976) \\ 0.4 \mid & 0.3^2 \times 0.0712 + 2^2 \times 0.4222 + 0^2 \times 0.5066 \ = 0.023296 \end{bmatrix} \Rightarrow T_B(2) = 0.2$$

- نبحث عندما $x = 3$ عن قيمة $\boldsymbol{T(3)}$ في $\{0.1, 0.2, 0.4\}$ التي تصغر $\boldsymbol{\Sigma_\theta(T(3)-\theta)^2 h(\theta|3)}$:

$$x=3 \Rightarrow \begin{bmatrix} T(3) \mid & \sum_\theta \ (T(3)-\theta)^2 h(\theta;3) \\ \text{--------------------------} & \\ 0.1 \mid & 0^2 \times 0.0175 + 0.1^2 \times 0.2339 + 0.3^2 \times 0.7485 \ = 0.069704 \\ 0.2 \mid & 0.1^2 \times 0.0175 + 0^2 \times 0.2339 + 0.2^2 \times 0.7485 \ = 0.030115 \\ 0.4 \mid & 0.3^2 \times 0.0175 + 2^2 \times 0.2339 + 0^2 \times 0.7485 \ = (0.010931) \end{bmatrix} \Rightarrow T_B(3) = 0.4$$

ونلخص النتائج السابقة بالجدول التالي:

x	0	1	2	3
$T_B(x)$	0.2	0.2	0.2	0.4

ومنه فإن:

$$\begin{aligned} B(T_B) &= 0.007559 \times 0.5179 + 0.011911 \times 0.3513 \\ &+ 0.020976 \times 0.1137 + 0.010931 \times 0.0171 \\ &= 0.010671 \end{aligned}$$

<u>الطريقة الثانية المختصرة لحساب</u> تقدير(أو تصرف) بيز T_B و $B(T_B)$:

نتبع الطريق المختصر، بأخذ التوقع $T_B(\boldsymbol{x_i}) = \boldsymbol{E_h(\theta)} = \boldsymbol{\Sigma_\theta \theta h(\theta|x_i)}$ ونقربه لإحدى القيم في Ω:

$$x = 0 \ \Rightarrow T_B(0) = \boldsymbol{\Sigma_\theta \theta h(\theta|0)} = 0.17445 \approx 0.2$$

$$x = 1 \ \Rightarrow T_B(1) = \boldsymbol{\Sigma_\theta \theta h(\theta|1)} = 0.22841 \approx 0.2$$

$$x = 2 \ \Rightarrow T_B(2) = \boldsymbol{\Sigma_\theta \theta h(\theta|2)} = 0.2942 \approx 0.2$$

$$x = 3 \ \Rightarrow T_B(3) = \boldsymbol{\Sigma_\theta \theta h(\theta|3)} = 0.34793 \approx 0.4$$

ولحساب $B(T_B)$ نستعمل الصيغة التالية:

$$B(T_B)=\sum_{x=0}^{x=3}\left(\boldsymbol{\Sigma_\theta}(\boldsymbol{T_B}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{\theta})^{\mathbf{2}}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{x})\right)k(x)=$$

$$\{(0.2-0.1)^2\times 0.4223+(0.2-0.2)^2\times 0.4943+(0.2-0.4)^2\times 0.0834\}\times 0.5179+$$
$$\{(0.2-0.1)^2\times 0.2075+(0.2-0.2)^2\times 0.5465+(0.2-0.4)^2\times 0.2459\}\times 0.3513+$$
$$\{(0.2-0.1)^2\times 0.0712+(0.2-0.2)^2\times 0.4222+(0.2-0.4)^2\times 0.5066\}\times 0.1137+$$
$$\{(0.4-0.1)^2\times 0.0175+(0.4-0.2)^2\times 0.2339+(0.4-0.4)^2\times 0.7485\}\times 0.0171=0.010671$$

4-أوجد المخاطرات أو متوسط مربع الخطأ لتقدير بيز T_B واستعملها لحساب $B(T_B)$:

$$\boldsymbol{r}(T_B,\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{E_X}(T_B-\boldsymbol{\theta})^{\mathbf{2}}=\boldsymbol{\Sigma_x}(T_B(x)-\theta)^2f(x;\theta)$$

$$\boldsymbol{r}(T_B,\boldsymbol{\theta_1})=(0.2-0.1)^2\times 0.729+(0.2-0.1)^2\times 0.243+(0.2-0.1)^2\times 0.027+(0.4-0.1)^2\times 0.001=0.01008$$
$$\boldsymbol{r}(T_B,\boldsymbol{\theta_2})=(0.2-0.2)^2\times 0.512+(0.2-0.2)^2\times 0.384+(0.2-0.2)^2\times 0.096+(0.4-0.2)^2\times 0.008=\frac{1}{3125}$$
$$\boldsymbol{r}(T_B,\boldsymbol{\theta_3})=(0.2-0.4)^2\times 0.216+(0.2-0.4)^2\times 0.432+(0.2-0.4)^2\times 0.288+(0.4-0.4)^2\times 0.064=0.03744$$

ويمكننا الوصول الى نفس القيمة التي وصلنا اليها في 3 تقريباً $B(T_B)=0.10671$ باستعمال الصيغة:

$$B(T_B)=\boldsymbol{\Sigma_\theta r}(T_B,\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})=0.01008\times 0.3+\left(\frac{1}{3125}\right)\times 0.5+0.03744\times 0.2=0.010672$$

5- اقترح تقديراً(أو تصرفاً) آخر وقارنه مع T_B. نقترح التقدير:

x	0	1	2	3
$T(x)$	0.1	0.2	0.4	0.4

بالطبع يجب أن نتحقق من صحة المتراجحة التالية: $B(T_B)\le B(T)$

$$B(T)=\sum_{x=0}^{x=3}\left(\sum\nolimits_\theta (T(x)-\theta)^2h(\theta|x)\right)k(x)=$$

$$\{(0.1-0.1)^2\times 0.4223+(0.1-0.2)^2\times 0.4943+(0.1-0.4)^2\times 0.0834\}\times 0.5179+$$
$$\{(0.2-0.1)^2\times 0.2075+(0.2-0.2)^2\times 0.5465+(0.2-0.4)^2\times 0.2459\}\times 0.3513+$$
$$\{(0.4-0.1)^2\times 0.0712+(0.4-0.2)^2\times 0.4222+(0.4-0.4)^2\times 0.5066\}\times 0.1137+$$
$$\{(0.4-0.1)^2\times 0.0175+(0.4-0.2)^2\times 0.2339+(0.4-0.4)^2\times 0.7485\}\times 0.0171=0.013467$$

واضح تتحقق صحة المتراجحة: $B(T_B)\le B(T)$

الباب 4 الواجب (1): ترد بضـــاعة الى مخزن في علب تحوي العلبة خمس قطع ولنفرض أن العلبة تحوي θ من القطع المعيبة ولها التوزيع المبدئي التالي:

θ	0	1	2	3	4	5
$g(\theta)$	0.55	0.2	0.1	0.07	0.06	0.02

عالج مسألة تقدير المعلمة θ كمسألة اتخاذ قرارات مع البيانات وأجب على ما يلي:

أولاً: خذ عينة عشوائية من العلبة حجمها $n=1$ وافحصها ولنعرف المتغير X بأنه عدد القطع المعيبة في العينة ثم عالج مسألة تقدير المعلمة θ كمسألة اتخاذ قرار للإجابة على ما يلي:

1-ماهي مجموعات الظروف والإجراءات ودالة الخسارة؟

2- كم عدد التقديرات (أو التصرفات) الممكنة؟

3-أوجد تقدير (أو تصرف) بيز T_B.

4-أوجد المخاطرات $r(T_B, \theta)$ أو متوسط مربع الخطأ للتقدير T_B واستعملها لحساب $B(T_B)$.

5-اقترح تقديراً(أو تصرفاً) آخر وقارنه مع T_B.

ثانياً: أعد الحالة السابقة بسحب عينة من العلبة حجمها $n=2$

==

معالجة الحالة المتصلة للمعلمة:

عالجناها سابقاً المعلمة θ المنفصلة، وسنعالج الآن عندما تكون المجموعة Ω متصلة، وبالتالي $\mathcal{A}$ متصلة أيضاً. سيكون عدد التقديرات (أو التصرفات) هنا لانهائي، لذا لابد أن نكتفي بالطريقة الثانية المختصرة لإيجاد تقديرات أو تصرفات بيز. ونوضح معالجة هذه الحالة بالشكل التالي:

ليكن متغير البيانات $X \sim f(x;\theta)$ ومعلمة التوزيع $\boldsymbol{\Theta}$ متصلة، فإن إيجاد تقدير بيز T_B عند كل عينة $\underline{X}$ أي $T_B(\underline{X})$ سيكون له الصيغة المشابهة التالية:

$$T_B(\underline{X}) = \boldsymbol{E_h(\theta)} = \int \boldsymbol{\theta h(\theta|}\underline{X}\boldsymbol{)\, d\theta}$$

حيث يكون للدالة البعدية الشكل التالي:

$$\boldsymbol{h(\theta|}\underline{X}\boldsymbol{)} = \frac{\boldsymbol{f(}\underline{X}\boldsymbol{;\theta)g(\theta)}}{\boldsymbol{k(}\underline{X}\boldsymbol{)}}$$

ويمثل $\boldsymbol{f}\left(\underline{X};\boldsymbol{\theta}\right)$ دالة التوزيع المشتركة للعينة $\underline{X}$ ، التي نسميها عادة دالة المعقولية $(Likelihood)$ ولها القيمة والرمز المشهور التالي:

$$\boldsymbol{f}\left(\underline{X};\boldsymbol{\theta}\right) = L\left(\underline{X};\theta\right) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

وتأخذ صيغة دالة الاحتمال الكلية في الحالة المتصلة للمعلمة $\boldsymbol{\theta}$ التكامل التالي:

$$\boldsymbol{k}\left(\underline{X}\right) = \int L\left(\underline{X};\theta\right)\boldsymbol{g(\theta)d\theta}$$

ونبحث هنا عن وجود ما نسـميه الإحصـائية الكافية $\boldsymbol{S}$ ، ونقبل عند وجودها وبدون برهان أن دالة المعقولية $L\left(\underline{X};\theta\right)$ تقبل التحليل الى دالتين بالشكل التالي:

$$\boldsymbol{L}\left(\underline{X}\,;\boldsymbol{\theta}\right) = \boldsymbol{N}\left(\underline{X}\right)\pi(\boldsymbol{S};\boldsymbol{\theta})$$

حيث $\boldsymbol{N}\left(\underline{X}\right)$ هي دالة ما بالعينة و$\pi(\boldsymbol{S};\boldsymbol{\theta})$ هي أي دالة بالإحصائية الكافية $\boldsymbol{S}$ أودالة توزيعها.

وبذلك تأخذ الدالة البعدية الشكل التالي:

$$\boldsymbol{h(\theta|}\underline{X}\boldsymbol{)} = \frac{\boldsymbol{N}\left(\underline{X}\right)}{\boldsymbol{k}\left(\underline{X}\right)}\pi(\boldsymbol{S};\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{g(\theta)} = \boldsymbol{M}(\underline{X})\pi(\boldsymbol{S};\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{g(\theta)}$$

حيث $\boldsymbol{M}(\underline{X})$ هي دالة بالعينة. ويتم عادة تبسيط هذه الصيغة بالاعتماد على أن $\boldsymbol{\theta}$ هو المتغير وأن كل ما عداه ثابت لذا يمكننا إخفاؤه في المقدار الثابت $\boldsymbol{M}(\underline{X})$.

وأخيراً، نقبل وبدون برهان الصيغة المشهورة في علم التقدير لدالة $(\boldsymbol{MSE})$ أو المخاطرة التالية:

$$\boldsymbol{r(T,\theta)} = \boldsymbol{E(T-\theta)^2} = \mathbf{V}\boldsymbol{(T)} + (\boldsymbol{E(T)-\theta})^2$$

مثال3: لدينا متغير بيانات X يتبع توزيع بواسون بالمعلمة θ :

$$f(x;\theta) = e^{-\theta}\frac{\theta^{x}}{x!};x = 0,1,2,\ldots..$$

بفرض أن λ هي ثابت وأن التوزيع المبدئي للمعلمة θ هو:

$$g(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta};\ \ \theta \geq 0$$

وبفرض أن $S = \Sigma_i x_i$ هي إحصائية كافية لها توزيع بواسون بالمعلمة $n\theta$ التالي:

$$S\sim \pi(S;\theta) = e^{-n\theta}\frac{(n\theta)^{S}}{S!};\ \ S = 0,1,2,\ldots.$$

1- احسب التوزيع البعدي $h(\theta|\underline{X})$.

2- أحسب تقدير بيز $T_B(\underline{X})$ للمعلمة θ واحسب $r(T_B,\theta)$ و $B(T_B)$

3- أحسب تقدير بيز $T_B(\underline{X})$ للدالة $1/\theta$ وثم للدالة e^{θ}

1- دالة التوزيع البعدية هي:

$$h(\theta|\underline{X}) = M(\underline{X})\pi(s;\theta)g(\theta) = M(\underline{X})e^{-n\theta}\frac{(n\theta)^{S}}{s!}\times \lambda e^{-\lambda\theta}$$

ونبسط هذه الصيغة بإخفاء كل ما ليس له علاقة بالمتغير θ في المقدار $M(\underline{X})$ هكذا:

$$h(\theta|\underline{X}) = M(\underline{X})e^{-n\theta}\frac{(n\theta)^{S}}{s!}\times \lambda e^{-\lambda\theta}=M(\underline{X})\theta^{(S+1)-1}e^{-\theta(n+\lambda)}$$

ونعلم أن هذه دالة توزيع جاما $Gam(S+1\ ,n+\lambda)$ وبالتالي فإن:

$$M(\underline{X}) = \frac{(n+\lambda)^{S+1}}{\Gamma(S+1)}$$

2- أحسب تقدير بيز $T_B(\underline{X})$ للمعلمة θ واحسب $r(T_B,\theta)$ و $B(T_B)$:

- **لحساب $T_B(\underline{X})$ للمعلمة θ:** نأخذ التوقع

$$T_B(\underline{X}) = E_h(\theta) = \int \theta h(\theta|\underline{X})\,d\theta = \frac{S+1}{n+\lambda}$$

- **و لحساب $r(T_B,\theta)$:** نستعمل الصيغة $r(T,\theta) = E(T-\theta)^2 = V(T) + (E(T)-\theta)^2$

$$r(T_B,\theta) = V(\frac{S+1}{n+\lambda}) + (E\left(\frac{S+1}{n+\lambda}\right) - \theta)^2$$

$$V\left(\frac{S+1}{n+\lambda}\right) = \frac{V(S)}{(n+\lambda)^2} = \frac{n\theta}{(n+\lambda)^2} \qquad \& \qquad E\left(\frac{S+1}{n+\lambda}\right) = \frac{n\theta+1}{n+\lambda}$$

$$r(T_B,\theta) = \frac{n\theta}{(n+\lambda)^2} + (\frac{n\theta+1}{n+\lambda} - \theta)^2 = \frac{n\theta+(1-\lambda\theta)^2}{(n+\lambda)^2} = \frac{1+(n-2\lambda)\theta+\lambda^2\theta^2}{(n+\lambda)^2}$$

- **و لحساب $B(T_B)$:** نستعمل الصيغة $B(T_B) = E_\theta(r(T_B,\theta))$ ، ويمكن إثبات الناتج أن:

$$B(T_B) = \int_0^\infty \left(\frac{\mathbf{1} + (\boldsymbol{n} - \mathbf{2}\lambda)\boldsymbol{\theta} + \lambda^2\boldsymbol{\theta^2}}{(n+\lambda)^2}\right)\boldsymbol{\lambda e^{-\lambda\theta} d}\theta = (1 + \frac{n}{\lambda})/(n+\lambda)^2$$

3- ويمكننا حساب تقدير بيز للدالة $1/\theta$ بتغيير التوقع كما يلي:

$$\boldsymbol{E_h\left(\frac{1}{\theta}\right) = \int \frac{1}{\theta} h\left(\theta|\underline{X}\right) d\theta = \frac{(n+\lambda)^{S+1}}{\Gamma(S+1)} \int \frac{1}{\theta} \times \theta^S e^{-\theta(n+\lambda)}\, d\theta}$$

$$\boldsymbol{= \frac{(n+\lambda)^{S+1}}{\Gamma(S+1)} \int \theta^{S-1} e^{-\theta(n+\lambda)}\, d\theta}$$

$$\boldsymbol{= \frac{(n+\lambda)^{S+1}}{\Gamma(S+1)} \times \frac{\Gamma(S)}{(n+\lambda)^S} = \frac{(n+\lambda)}{S}}$$

ويمكننا حساب تقدير بيز للدالة e^{θ} بتغيير التوقع كما يلي:

$$\boldsymbol{E_h}\left(e^{\theta}\right) = \int e^{\theta}\, \boldsymbol{h\left(\theta|\underline{X}\right) d\theta = \frac{(n+\lambda)^{S+1}}{\Gamma(S+1)}} \int e^{\theta} \times \boldsymbol{\theta^S e^{-\theta(n+\lambda)}\, d\theta}$$

$$\boldsymbol{= \frac{(n+\lambda)^{S+1}}{\Gamma(S+1)} \int \theta^{(S+1)-1} e^{-\theta(n+\lambda-1)}\, d\theta}$$

$$\boldsymbol{= \frac{(n+\lambda)^{S+1}}{\Gamma(S+1)} \times \frac{\Gamma(S+1)}{(n+\lambda-1)^{S+1}} = \left(\frac{n+\lambda}{n+\lambda-1}\right)^{S+1}}$$

===

الباب 4 الواجب (2): لدينا متغير بيانات $\boldsymbol{X}$ يتبع توزيع بيرنولي بالمعلمة $\boldsymbol{\theta}$:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\theta}) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}; \boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \mathbf{1}$$

بفرض أن a, b هي ثوابت وأن التوزيع المبدئي للمعلمة $\boldsymbol{\theta}$ هو توزيع بيتا بالثوابت $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1};\ 0 < \theta < 1$$

وبفرض أن $\boldsymbol{S = \Sigma_i x_i}$ هي إحصائية كافية لها التوزيع التالي:

$$\boldsymbol{S \sim \pi(S;\theta) = Bin\,(n,\theta) = \binom{n}{s}\theta^S(1-\theta)^{n-S}}$$

1- أحسب التوزيع البعدي $\boldsymbol{h}\left(\boldsymbol{\theta}|\underline{X}\right)$

2- أحسب تقدير بيز $\boldsymbol{T_B}\left(\underline{\boldsymbol{X}}\right)$ للمعلمة $\boldsymbol{\theta}$ وثم أحسب $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{T_B},\boldsymbol{\theta})$

3- أحسب تقدير بيز $T_B\left(\underline{X}\right)$ للدالة $\boldsymbol{\theta(1-\theta)}$