جامعــة الملك سعــود　　　كليـة العلــوم　　　قســم الرياضيـــات

الفصل الأوّل ١٤٣٣-١٤٣٤هـ/الإختبار الفصلي الثاني للمقرر ٤٨١-ريض/الزمن: ٩٠ دقيقة

التمــرين الأوّل <٣+٣+٤=١٠ درجات>:

١) **بين أن** المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^5}$ متقاربة إلى دالة f متصلة على $\mathbb{R}$، ثم **أحسب** $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$.

٢) **أوجد** الدالة المعطاة بمتسلسلة القوى $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ حيث $|x|<1$، ثم **أحسب** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

٣) أ) أذكر إختبار آبــل للتقارب المنتظم.

ب) إستعمله لتبين أنه إذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ متقاربة، فإن متسلسلة القوى $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ متقاربة بإنتظام على $[0,1]$.

التمــرين الثاني <٣+٣+٣=٩ درجات>:

١) لتكن $\mu:\mathcal{C}\longrightarrow[0,\infty]$ دالة مجموعات على حلقة $\mathcal{C}$. و لنفرض أن μ تحقق خاصية التجميع القابل للعد، وأنه يوجد عنصر $A\ni\mathcal{C}$ بحيث $\mu(A)<\infty$. بين أن μ قياس على $\mathcal{C}$.

٢) بين أن $\mathcal{M}$ عبارة عن جبر سيقما في $\mathbb{R}$.

٣) بين أنه إذا كانت $f:\ \Omega\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ دالة قابلة للقياس فإن $\{x,\ \ f(x)=\alpha\}$ مجموعة قابلة للقياس لكل $\alpha\in\overline{\mathbb{R}}$.

التمــرين الثالث <٣+٣=٦ درجات>:

١) بين أنه إذا كانت $f:\ \Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ دالة قابلة للقياس و كانت $\varphi:\ \Omega_1\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$ دالة قابلة لقياس بوريل حيث $f(\Omega)\subset\Omega_1$، فإن $\varphi\circ f$ أيضا قابلة للقياس.

٢) لتكن $\{f_n\}$ متتالية من الدوال القابلة للقياس. بين أن الدالة $\limsup f_n$ أيضا قابلة للقياس.

و الله ولي التوفيـــــــــق