جامعة الملك سعود

كلية العلوم | قسم الرياضيات | الإختبار الفصلي الثاني

الفصل الأول 1442 هـ | 481 ريض | الزمن ساعة ونصف

السؤال 1 :

لتكن $f_n(x) = n^2x^3(1-x^2)^n$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

1. أوجد مجال التقارب البسيط للمتتالية $(f_n)_n$.
2. أُحسب $\int_0^1 f_n(x)dx$ و استنتج أنّ المتتالية (f_n) ليست متقاربة بانتظام على الفترة $[0,1]$.
3. أُحسب نهاية المتتالية $f_n(\frac{1}{\sqrt{n}})$.
   ماذا نستنتج؟

السؤال 2 :

1. ادرس التقارب البسيط و التقارب المنتظم لمتسلسلة الدوال التالية:
   $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$، حيث $x \in \mathbb{R}$.
2. أوجد مجموع المتسلسلة $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{(1+x^2)^n}$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

السؤال 3 :

أوجد متسلسلة القوى للدالة $f(x) = \frac{1}{1-x+x^2}$ و أوجد شعاع تقاربها.

السؤال 4 :

لتكن $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}$، لكل $n \geq 2$.

1. أوجد فترة التقارب للمتسلسلة التالية $\sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)}$ و ادرس تقارب المتسلسلة عند رؤوس فترة التقارب.

2. ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n\geq 2} f'_n(x)$ و المتسلسلة $\sum_{n\geq 2} f''_n(x)$.

3. استنتج مجموع المتسلسلة $\sum_{n\geq 2} f_n(x)$.

السؤال 5 :

لتكن $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n \ln n}{n^x}$ لكل $x \in]0, +\infty[$ و لتكن $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n \ln n}{n^x}$

1. (ا) أثبت أنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f'_n(x)$ تتقارب معياريا على كل فترة مغلقة $[a, b] \subset]1, +\infty[$.

   (ب) استنتج أنّ الدالة f قابلة للتفاضل باتصال (C^1) على الفترة $]1, +\infty[$.

2. (ا) أثبت أنّ المتسلسلة $\sum_{n\geq 1} f'_n(x)$ تتقارب بانتظام على كل فترة $[a, +\infty[$، حيث $a > 0$.

   (ب) استنتج أنّ الدالة f قابلة للتفاضل باتصال (C^1) على الفترة $]0, +\infty[$.

3. أثبت بنفس الطريقة أنّ الدالة f قابلة للتفاضل ما لا نهائي (C^∞) على الفترة $]0, +\infty[$.