جامعة الملك سعود

كلية العلوم

قسم الرياضيات

1433-4-11

90 دقيقة

الاختبار الشهري الأول 1432-1433

481 ريض

تمرين 1: (10 درجات)

1) أكتب مميز كثيرة الحدود $a_2t^2 + a_1t + a_0$

2) لتكن f و g دوال حقيقية قابلة للتكامل بمفهوم ريمان (Riemann) على [a,b].

أ- أثبت أن

$$\int_a^b (t f(x) + g(x))^2\, dx = \left(\int_a^b f^2(x)\, dx\right) t^2 + 2t \left(\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right) + \left(\int_a^b g^2(x)\, dx\right)$$

ب- باستعمال مميز كثيرة الحدود

$$\left(\int_a^b f^2\right) t^2 + 2 \left(\int_a^b f\, g\right) t + \left(\int_a^b g^2\right)$$

أثبت متراجحة كوشي شوارز (Cauchy-Schwarz)

$$\left(\int_a^b f\, g\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

ج- استنتج أن

$$\left(\int_a^b g\right)^2 \leq (b-a) \int_a^b g^2$$

د- لتكن f متصلة و غير سالبة على [a,b].

اثبت أن

$$\left(\int_a^b f\right) \left(\int_a^b \frac{1}{f}\right) \geq (b-a)^2$$

تمرين 2: (5 درجات) ليكن c عدد حقيقي موجب.
احسب نهاية المتتالية

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{nc+k}$$

تمرين 3: (5 درجات) إذا كانت f متصلة على $[-1,1]$ و b عدد حقيقي موجود في الفترة المفتوحة $(-1,1)$.

أثبت أن

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-b}^{b} f(x^{2n})\, dx = 2bf(0)$$