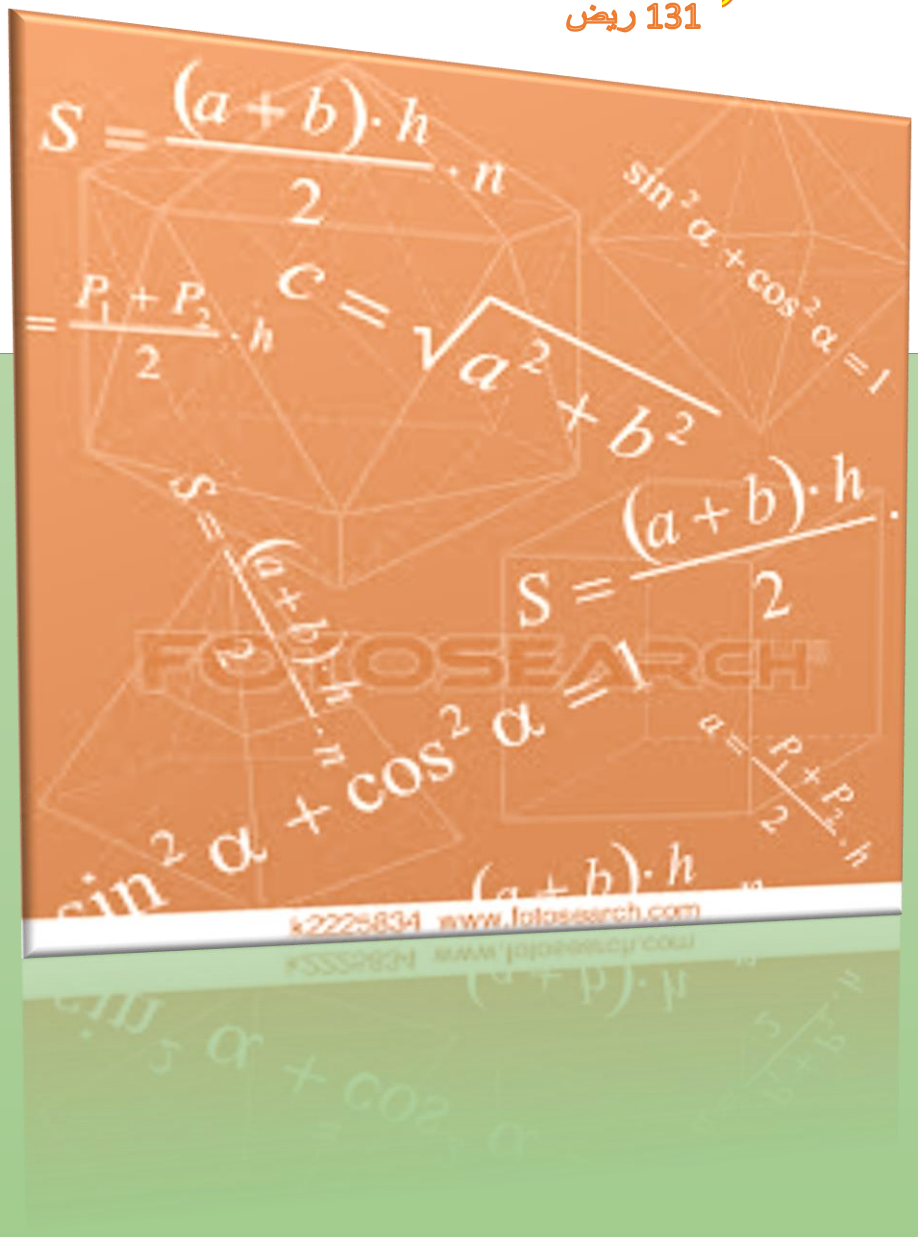
مركز التدريب وخدمة المجتمع

1442

الرياضيات المحددة

131 ريض



جامعة الملك سعود

فهرس المحتويات

فهرس المحتويات ..... - 1 -

الباب الاول ..... - 5 -

المجموعات ..... - 5 -

1-1- تمهيد:..... - 7 -

2-1- تعريف المجموعة(Set) وطرق تمثيلها..... - 7 -

3-1- أمثلة..... - 9 -

4-1- العمليات الجبريّة على المجموعات..... - 11 -

1- التّقاطع Intersection: ..... - 11 -

2- الاتحاد Union: ..... - 11 -

3- الفرق Difference: ..... - 12 -

4-الفرق التناظري ..... - 12 -

5- متمّمة مجموعة Complement of a Set:..... - 12 -

5-1- بعض خصائص العمليات الجبريّة على المجموعات..... - 13 -

1- الخاصة التّبديليّة..... - 13 -

2- الخاصة التّجميعيّة..... - 13 -

3- الخاصة التوزيعية ..... - 13 -

4- قانونا ديمورغان ..... - 13 -

أمثلة..... - 13 -

7-1- تعريف (قدرة مجموعة Cardinality of a set) ..... - 15 -

8-1-المجموعة المنتهية والغير منتهية..... - 15 -

1- المجموعة المنتهية ..... - 15 -

2-المجموعة الغير منتهية ..... - 15 -

9-1-المجموعة القابلة للعد والغير قابلة للعد..... - 15 -

1-المجموعة القابلة للعد..... - 15 -

2-المجموعة الغير قابلة للعد..... - 15 -

10-1بعض العلاقات مهمة..... - 16 -

11-1-تمارين وامثلة للحل..... - 17 -

الباب الثاني ..... - 18 -

طرق العد المبدأ الأساسي في العد ..... - 18 -

2-1- طرق العد والمبدأ الأساسي في العد..... - 20 -

1- قاعدة الضرب Multiplication Rule ..... - 20 -

2-قاعدة الجمع Addition Rule..... - 20 -

2-2-تمارين ومسائل للحل..... - 23 -

2-3-التراتيب (او التباديل) ..... - 23 -
تباديل n من العناصر المختلفة مأخوذة عدد k : ..... - 25 -
4-2 التوافيق..... - 28 -
الباب الثالث .... - 32 -
المصفوفات و المحدِّدات .... - 32 -
3-1-رموز ومصطلحات ..... - 34 -
3-2- المصفوفات..... - 34 -
1- تعريف (المصفوفة) :..... - 34 -
2-ملاحظات :..... - 35 -
3-3-العمليات الجبرية على المصفوفات ..... - 36 -
1-ضرب مصفوفة بعدد..... - 36 -
2-مجموع مصفوفتين ..... - 36 -
3-ضرب مصفوفتين..... - 37 -
3-4-خواص العمليات الجبرية على المصفوفات..... - 40 -
4- منقول المصفوفة ..... - 41 -
3-5- بعض الأنواع الشهيرة من المصفوفات..... - 42 -
1-تعريف (المصفوفة الصفرية) : ..... - 42 -
2-تعريف (المصفوفة المربعة): ..... - 42 -
بعض المفاهيم التي تتعلق بالمصفوفة المربعة ..... - 42 -
القطر الرئيسي والقطر الثانوي ..... - 42 -
تعريف (المصفوفة المثلثيَّة) :..... - 43 -
تعريف (المصفوفة القطريَّة): ..... - 43 -
تعريف (المصفوفة السلميَّة) : ..... - 44 -
تعريف (المصفوفة الواحديَّة) : ..... - 44 -
تعريف (المصفوفة المتناظرة) : ..... - 44 -
تعريف (المصفوفة ضد المتناظرة أو المخالفة تناظرياً) :..... - 44 -
3-6- المُحدِّدات..... - 46 -
تعريف (محدِّد مصفوفة) : ..... - 46 -
طرق حساب المحددات..... - 46 -
أولا: الطريقة المباشرة لنشر محدد ..... - 46 -
ثانيا: نشر المحدِّدات باستخدام المتمِّمات الجبرية ..... - 50 -
تمارين غير محلولة على المصفوفات والمحددات..... - 52 -
الباب الرابع .... - 54 -
المعادلات الخطية .... - 54 -
4-1-المعادلة الخطية ..... - 56 -
4-2-نظام المعادلات الخطية..... - 56 -

4-3-حل نظام المعادلات الخطية..... - 57 -

4-4-المعنى الهندسي للنظام الخطي ..... - 57 -

4-5-تعريف نظام المعادلات الخطية..... - 58 -

4-6-طرق حل أنظمة المعادلات الخطية ..... - 59 -

أولا:الطريقة الأساسية..... - 59 -

ثانيا: طريقة المصفوفة:..... - 61 -

الباب الخامس .... - 65 -

الدوال الحقيقية وكثيرات الحدود .... - 65 -

5-1 الدوال الحقيقيّة Real Functions:..... - 67 -

5-2-ملاحظات..... - 67 -

5-3 تعريف (الدالَّة الحقيقيّة Real Function)..... - 68 -

5-4-اشكال الدوال..... - 69 -

أولاً الدالة الضمنية:..... - 69 -

ثانياً الدالة الصريحة:..... - 69 -

5-5-تصنيفات الدوال ..... - 69 -

أولاً:متباينة..... - 69 -

ثانياً:غامرة..... - 69 -

ثالثاً:تقابل..... - 69 -

5-6- مفهوم الدالة العكسية..... - 70 -

5-7-أنواع الدوال..... - 70 -

أولا:أنواع الدوال من حيث عدد المتغيرات :..... - 70 -

ثانيا: الدوال بمتغير واحد: ..... - 71 -

1- الداله الثابتة ..... - 71 -

3- دالة التطابق ..... - 71 -

3- الدالَّة الخطيّة ..... - 72 -

4 دالَّة القيمة المطلقة Absolut Value Function..... - 75 -

5- الدوال كثيرات الحدود..... - 77 -

الباب السادس .... - 78 -

البرمجة الخطية .... - 79 -

6-1- مقدمة..... - 80 -

6-2- متطلبات مسائل البرمجة الخطية..... - 81 -

6-3- كيفية تشكيل مسائل البرمجة الخطية ..... - 81 -

6-4- الحل البياني لمسائل البرمجة الخطية..... - 83 -

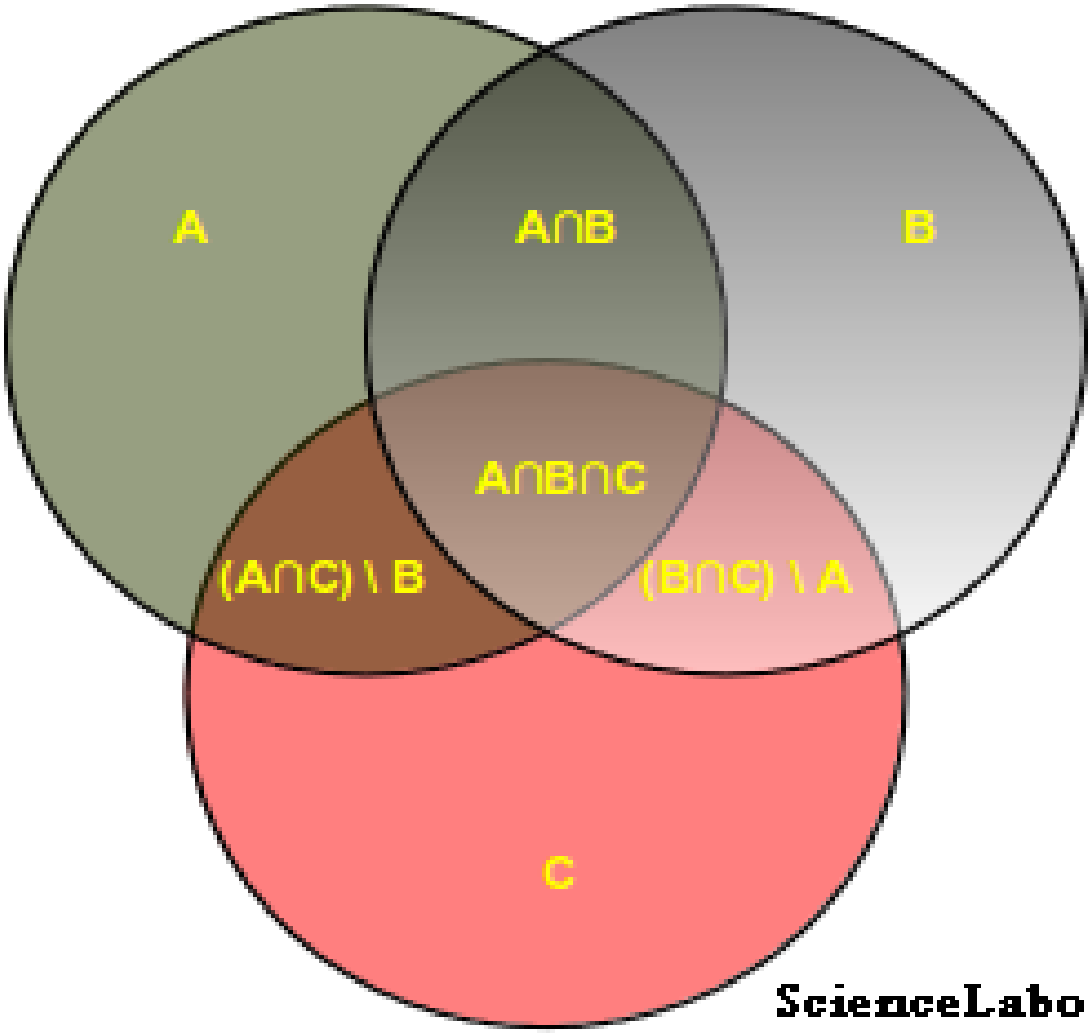
الأولى: طريقة خطوط الانتاج المتساوية الربح..... - 87 -

الثانية:طريقة نقاط الزوايا ..... - 90 -

6-5- الموارد غير المستخدمة والفائض ..... - 90 -
6-6- أربع حالات خاصة في البرمجة الخطية: ..... - 91 -
الحالة الأولى: عدم وجود حل ممكن ..... - 91 -
الحالة الثانية: المنطقة غير المحدودة ..... - 92 -
الحالة الثالثة: القيود غير المؤثرة ..... - 93 -
الحالة الرابعة: الحلول المثلى البديلة ..... - 94 -
6-9- تحليل الحساسية ..... - 95 -
الباب السابع ..... - 98 -
مقدمة في الرياضيات الاقتصادية والمالية ..... - 98 -
7-1- نبذة تاريخية ..... - 100 -
7-2-الاقتصاد الرياضي..... - 100 -
7-3-النمذجة الاقتصادية الرياضية ..... - 101 -
النموذج الاقتصادي الرياضي ..... - 101 -
أنواع النماذج الاقتصادية الرياضية ..... - 101 -
مراحل النموذج الاقتصادي الرياضي ..... - 101 -
مواضيع الاقتصاد الرياضي..... - 101 -
7-4-استخدام الرياضيات في الاقتصاد " التحليل الاقتصادي" ..... - 102 -
لاقتصاد: ..... - 102 -
حقائق التحليل الاقتصادي:..... - 102 -
التفاضل والتكامل: ..... - 102 -
كيف يتم استخدام التفاضل والتكامل؟ ..... - 103 -
7-5-اعتبارات لا بد منها..... - 103 -
7-6-أهمية التحليل الاقتصادي..... - 103 -

الباب الاول

المجموعات



أهداف التعلم: في نهاية هذا الفصل، يجب أن يكون الطالب قادراً على

1. التعامل مع هذا المفهوم الأساسي والهام في الرياضيات وهي المجموعات.
2. معرفة أنواع المجموعات وخصائصها.
3. اجراء العمليات الأساسية على المجموعات.
4. التعرف على مجموعات العددية وخصائصها.

مواضيع الباب

1. تعريف المجموعة وطرق تمثيلها.
2. العمليات الجبرية على المجموعات.
3. أنواع المجموعات وخواصها.
4. أنواع المجموعات العددية وخواصها.

1-1- تمهيد:

إنَّ مفهوم المجموعة يُعدُّ من الأهمية بمكان في مجال الرّياضيات عامة ذلك أنَّه يأتي في المرتبة الثّانيّة من حيث الأهمية بعد مفهوم الأعداد، وقد أسِّس على يد الرّياضياتي الألماني **كانتور** Georg Cantor (1845-1918)، ولكنَّنا سنقدِّم قسماً يسيراً من نظرية المجموعات مع التركيز على المواضيع التي تهمّنا في إطار هذا الكتاب، وسنستخدم ما اتفق عليه علمياً فقط.

في الحقيقة إنَّ نظرية المجموعات هي أحد فروع علم المنطق الرّياضياتي الذي يهتمّ بدراسة المجموعات والعمليات الجبرية عليها، فبالرغم من أنَّ أي تجمّع لأشياء ذات طبيعة ما يمكن تمثيلها في مجموعة، إلاَّ أنَّنا سنقوم بتطبيق نظرية المجموعات في معظم الأحيان على الأشياء التي لها صلة بعلم الرّياضيّات (**وكجزء منها الاحتمالات والإحصاء**)، وذلك أنَّه يمكن للغة نظرية المجموعات أن تستخدم في صياغة التعاريف لمفاهيم رياضية. إن مفهوم المجموعة الذي سيقدِّمه التّعريف الآتي يعود إلى كانتور.

1-2- تعريف المجموعة(*Set*) وطرق تمثيلها

المجموعة هي أي تجمّع لأشياء (**أو كائنات**) محدَّدة ومتمايزة جيداً (**أو مختلفة بعضها عن البعض الآخر**) بحسب حدسنا أو تفكيرنا، وصُبَّت في قالب موحّد (**أو في شكل كلي واحد**).

بمعنى آخر. المجموعة هي **تَجمُّع** لأشياء (**أو كائنات**) محدَّدة ومتمايزة(أي غير مكررة) بشكل جيد وليست مرتَّبة بالضرورة، ولكنَّها تشترك فيما بينها بصفة واحدة على الأقل .

وهناك طريقتان للتعبير(لتمثيل) عن المجموعة:

أولا: طريقة التمثيل السَّردي للمجموعة

يُعبَّر عن المجموعة(تمثل المجموعة) رياضياً بقوسين كبيرين متقابلين يحتويان بينهما الرموز الممثِّلة لتلك الأشياء (**أو الكائنات**) وذلك كما في الشكل {•,•,...,•}.

فعلى سبيل ،المثال تُمثَّل مجموعة الأرقام في النظام العشري كما يلي:

$$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

ثانيا: طريقة القاعدة لتمثيل المجموعة وفي هذه الطريقة يُرمز للصفة المميِّزة لعناصر المجموعة بحرفٍ مع التنويه إلى دلالة هذا الحرف ومن ثمَّ يحاط الجميع بقوسين كبيرين.

فعلى سبيل المثال لو أخذنا طلاب السّنة الأولى المشتركة (**في عام معيَّن**) فإنَّهم يكوّنون مجموعة (**ولتكن** E **مثلاً**):

$$E=\{x \mid x \text{ طالب في السّنة الأولى المشتركة}\}$$

وهنا نشير إلى أنَّ الرّمز (|) داخل قوسي المجموعة يقصد به "**علماً أنَّ**" أو "**حيث أنَّ**".

ملاحظات

1- لقد درجت العادة على أن يُرمز للمجموعة بأحرف لاتينيّة كبيرة من قبيل A و B و C أو...، أو بأحرف إغريقيّة كبيرة من قبيل Ω و Ξ و Θ ...

2- إنَّ الأشياء (**أو الكائنات**) المكوِّنة للمجموعة تُدعى **عناصر** Elements ويُرمز لها عادةً بأحرف لاتينيّة صغيرة من قبيل a و b و c و... ، أو بأحرف إغريقية صغيرة من قبيل α و β و γ و ... أو برموزٍ أخرى حسب طبيعة العناصر المكوِّنة للمجموعة.

3- من جهة أخرى، فإذا كان a عنصراً من مجموعة A فعندئذٍ يُقال إنَّ العنصر a ينتمي إلى A ويُرمز لذلك بالشكل:

$$a \in A$$

وأمّا إن كان a ليس عنصراً من المجموعة A فحينئذٍ يُرمز لذلك بالشكل: $a \notin A$

4- يُقال عن المجموعة التي لا تملك أي عنصر إنَّها مجموعة خالية، ويرمز لها بـ $\varnothing$، أي أنَّ:

$$\varnothing = \{\ \}$$

5- يُقال عن مجموعتين A و B غير خاليتين إنَّهما **متساويتان** إذا كانتا تملكان العناصر نفسها، ويكتب حينئذٍ :

$$A = B$$

فعلى سبيل المثال:

أ- نجد أنَّ المجموعتين $A = \{7, 2, 5, 1, 15, 3\}$ و $B = \{1, 2, 3, 5, 7, 15\}$ متساويتان لأنَّهما تملكان العناصر نفسها.

ب- إنَّ المجموعة $A = \{a, b, c, ..., x, y, z\}$ تساوي المجموعة الآتيّة لأنَّ لهما العناصر نفسها.

$B = \{x \mid x$ **حرف أبجدي إنكليزي**$\}$

6- يُقال عن مجموعة A إنَّها مجموعة **جزئيّة** من مجموعة B إذا كانت جميع عناصر المجموعة A تنتمي إلى المجموعة B ويُكتب حينئذٍ:

$$B \supseteq A$$

وفي حال وجود عنصر واحد على الأقل في B لا ينتمي إلى A فحينئذٍ يُقال إنَّ المجموعة A **محتواه تماماً** في المجموعة B ويُكتب $B \supset A$.

7- إذا كنّا نتعامل مع مجموعات جزئيّة من مجموعة ما غير خالية Ω، فعندئذٍ يُقال عن Ω إنَّها **مجموعة شاملة**.

8- إنَّ كلّ مجموعة محتواه في نفسها. أي أنَّه من أجل مجموعة A يمكننا أن نكتب $A \supseteq A$.

9-إذا كانت A وB مجموعتين من مجموعة Ω، وكان $B \supseteq A$ و $A \supseteq B$، فعندئذٍ تكون المجموعتان متساويتين، ويُكتب:

$$A = B$$

10- نشير هنا إلى أنَّه من أجل مجموعة غير خالية Ω تكون المجموعة الخالية $\varnothing$ محتواه فيها وفي أية مجموعة جزئيّة منها، بمعنى أنَّه من أجل $\Omega \supseteq A \neq \varnothing$ يكون لدينا $A \supset \varnothing$ أيضاً.

1-3- أمثلة

1- لنقم برمي حجر نرد (**سداسي الوجوه**) لمرَّةٍ واحدةٍ فقط، فعندئذٍ سنحصل على أحد الأعداد الطبيعيّة 1 أو2 أو... أو6، علماً أنَّ مجموعة

من هذه العملية يكون لمجموعة القيم (**ولتكن A مثلاً**) العرض الآتي:

$$A = \{1,2,3,4,5,6\}$$

2- المجموعة التالية $\{1,2,3,.....\}$ *تسمى مجموعة الاعداد الطبيعية ونرمز لها عادة بـ* N:

$$\mathrm{N} = \{1,2,3,4,.....\}$$

3- تسمى مجموعة الاعداد $.....-3,-2,-1,0,1,2,3,4,.....$ *بمجموعة الاعداد الصحيحة ونرمز لها بـ* Z *وعليه:*

$$Z = \{...-3,-2,-1,0,1,2,3,4,.....\}$$

4- تسمى الاعداد والتي على شكل نسبة(كسر) مثل

$$\frac{1}{6},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},1,\frac{2}{5},\frac{2}{3},2,\frac{3}{5},\frac{3}{4},\frac{3}{2},3,\frac{4}{5},\frac{4}{3},4,\frac{5}{6},\frac{5}{4},\frac{5}{3},\frac{5}{2},5,\frac{6}{5},6$$

بمجموعة الأعداد العاديّة أو الأعداد الكسريّة ونرمز لها بـ Q وعليه:

$$\mathrm{Q} := \left\{ x \mid x = \frac{a}{b} \;;\; a,b \in \mathrm{Z},\ b \neq 0 \text{ and } a,\ b \text{ are coprime} \right\}$$

5- إنَّ مجموعة الأعداد غير النسبيّة (**الأعداد التي لا يمكن كتابتها على شكل نسبة لعددين صحيحين - مع الأخذ بالحسبان أنَّ المقام لا يساوي الصفر- ويُرمز لهذه المجموعة بـ** ا) يمكن عرضها على النّحو الآتي:

$$ا = \{x \mid x \text{ عدد غير نسبي}\}$$

6- لو قمنا بتحليل ضوء الشمس باستخدام موشور، فعندئذٍ يكون لمجموعة الألوان المرئية (**ولتكن E مثلاً**) التي تنتج عن هذه العملية العرض الآتي:

$$E = \{\text{أحمر, برتقالي, أصفر, أخضر, أزرق, بنفسجي}\}$$

7- إنَّ المقاولين في المملكة العربيّة السعوديّة يكوّنون مجموعة (**ولتكن** F **مثلاً**)، حيث لدينا أنواع كثيرة من المقاولات (**مقاولات الطرق، مقاولات البناء، مقاولات التعليم، ...**) ولكنّهم جميعاً يتصفون بصفة المقاول، ولذلك يمكننا تمثيلهم في مجموعة على النّحو الآتي:

$$F = \{x \mid x \text{ مقاول}\}$$

8- بالعودة إلى المثال السّابق (1) (**رمي حجر نرد سداسي الوجوه لمرّة واحدة فقط**) سنقوم بتعيين المجموعات التي تُعبِّر عن حصولنا على:

أ- عدد أكبر من 2.

ب- عدد أكبر أو يساوي 3 وأصغر من 6.

ج- العدد 3.

د- عدد أصغر من 1.

هـ- عدد أكبر أو يساوي 1.

✍ **الحلول:** لدينا ممّا سبق $A=\{1,2,3,4,5,6\}$، ومن ثمَّ من أجل الطلب:

أ- لنرمز بـ B للمجموعة التي تُعبِّر عن حصولنا على عدد أكبر من 2، فيكون لدينا:

$$B=\{3,4,5,6\}$$

فنلاحظ أنَّ $A \supset B$ (**لاحظ أنَّ العكس غير صحيح، وذلك لأنَّ علاقة الاحتواء** $\supseteq$ **أو** $\supset$ **ليست انعكاسيّة**).

ب- لنرمز بـ C للمجموعة التي تُعبِّر عن حصولنا على عدد أكبر أو يساوي 3 وأصغر من 6، فيكون لدينا $C=\{3,4,5\}$، فنلاحظ أنَّ $B \supset C$، ومن ثمَّ $A \supset C$ (**وذلك لأنَّ علاقة الاحتواء** $\supseteq$ **أو** $\supset$ **متعديّة**).

ج- لنرمز بـ D للمجموعة التي تُعبِّر عن حصولنا على العدد 3، فيكون لدينا $D=\{3\}$، وهنا نلاحظ أنَّ $C \supset D$.

د- لنرمز بـ E للمجموعة التي تُعبِّر عن حصولنا على عددٍ أصغر من 1، فيكون لدينا:

$$E=\{\}=\varnothing$$

هـ- لنرمز بـ F للمجموعة التي تُعبِّر عن حصولنا على عددٍ أكبر أو يساوي 1، فيكون لدينا:

$$F=\{1,2,3,4,5,6\}=A$$

ملاحظات

1- لاحظ هنا أنَّ المجموعة A أخذت دور المجموعة الشّاملة Ω.

2- نلاحظ من الأمثلة السابقة أنَّه أمكننا عرض بعض المجموعات من خلال ذكر جميع عناصرها كما في الأمثلة السابقة 1، 2، 3، 5، 6 و8، وبعضها الآخر عُرِضَ من خلال كتابة القاعدة التي تُسْتَنْبط منها العناصر كما في المثالين السّابقين 4 و7.

1-4- العمليات الجبريّة على المجموعات

بادئ ذي بدئ نشير إلى بعض الرموز التي يمكن أن تستخدم لدى صياغة المجموعات أو في العلاقات الرّياضية ومنها مُحدِّدات الكميّة المنطقيّة وهي:

$\forall$ بمعنى "**من أجل كلِّ**" أو "**من أجل أي**"، ويدعى مُحدِّد الكميّة الكلي (**أو الشّامل**) Universal Quantifier ، فعلى سبيل المثال $\forall x \in A$ تُقرأ على النّحو الآتي: من أجل أي عنصر x من A، أو من أجل كلّ عنصر x من A.

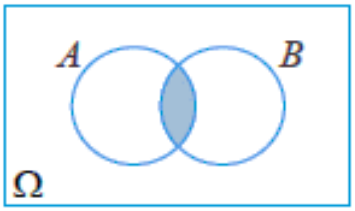
$\exists$ بمعنى "**يوجد على الأقل**"، ويدعى مُحدِّد الكميّة الوجودي Existential Quantifier، فعلى سبيل المثال $\exists x \in A$; ... تُقرأ بالعبارة: يوجد على الأقلِّ عنصر x من A بحيث يكون ... .

من المعلوم أنَّه في علم المنطق يمكن تشكيل أي قضية من القضايا الأوليّة باستخدام العمليات المنطقيّة (**و– أو– كلا**)، وهذه العمليات الثّلاث يقابلها في علم المجموعات العمليات الثّلاث الآتيّة على الترتيب:

1- التّقاطع Intersection:

يُعرَّف **تقاطع** مجموعتين A وB على أنَّه مجموعة العناصر التي تنتمي إلى كلٍ من A وB بآنٍ واحد، ويستخدم الرّمز $\cap$ بين المجموعات للدلالة على التّقاطع بينها (**أنظر الشكل**) ومن ثمَّ يُرمز للمجموعة الممثِّلة لتقاطع A وB بالرمز $A \cap B$، أي أنَّه لدينا:

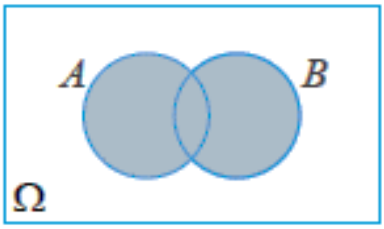
$$A \cap B := \{x |\ x \in A \ \ and \ x \in B\}$$



2- الاتحاد Union:

يُعرَّف **اتحاد** مجموعتين A وB على أنَّه مجموعة كلّ العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B أو إلى كليهما معاً، علماً أنَّ " **أو**" هنا لا تفيد الحصر (**أنظر الشكل**)، ويستخدم الرّمز $\cup$ بين المجموعات للدلالة على الاتحاد بينها، ومن ثمَّ يرمز للمجموعة الممثِّلة لاتحاد A وB بالرمز $A \cup B$، أي أنَّه لدينا:

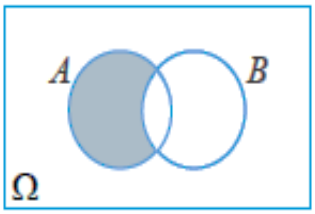
$$A \cup B := \{ x \mid x \in A \ or \ x \in B \}$$



3- الفرق Difference:

يُعـرَّف بـين مجموعتين A وB على أنَّه مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A ولكن دون B (**أنظر الشكل**) و يُستخدم الرّمز \ بين المجموعات للدلالة على الفرق بينها، ومن ثمَّ يرمز للمجموعة الممثِّلة لفرق A وB بالرمز $A \setminus B$ ، أي أنَّه لدينا:

$$A \setminus B := \{ x \mid x \in A, \ x \notin B \}$$

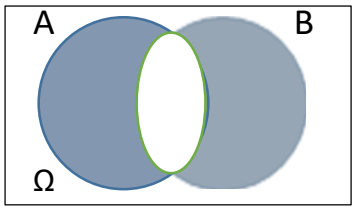


4-الفرق التناظري

يُعـرَّف **الفرق التناظري** لمجموعتين A وB على أنَّه مجموعة العناصر والغير مشتركة من المجموعتين A و B (**أنظر الشكل**) و يُستخدم الرّمز Δ بين المجموعات للدلالة على الفرق التناظري بينها، ومن ثمَّ يرمز للمجموعة الممثِّلة لفرق A وB بالرمز $A \Delta B$ ، أي أنَّه لدينا:

$$A \Delta B = (A \setminus B) U (B \setminus A)$$

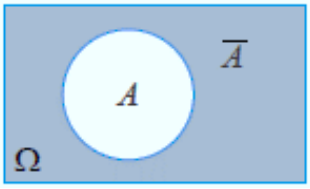
نلاحظ ان الفرق التناظري بين مجموعتين معاكس للتقاطع .



5- متمّمة مجموعة Complement of a Set:

لتكن Ω مجموعة شاملة، ولنأخذ $\Omega \supseteq A$ (**من الممكن أن تكون** $A = \varnothing$). عندئذٍ يُطلق على مجموعة كلّ العناصر من Ω والتي **لا** تنتمي إلى المجموعة A اسم "**متمّمة المجموعة** A" (**أو المتمم المطلق للمجموعة** A **أيضاً**)، ويُرمز عـادة لمتمّم المجموعة A بالشكل $\bar{A}$. أي أنَّه لدينا:

$\bar{A} := \Omega \setminus A$



في الحقيقة إنَّ العمليات المنطقيّة على المجموعات (**التّقاطع – الاتحاد–الفرق**)، وبعض الخصائص الأساسية لهذه العمليات (**مثل الخاصة التّبديليّة، والتجميعية، والتوزيعية**) وبعض العلاقات الشّهيرة المتعلِّقة بهذه المواضيع تعدّ الحجر الأساس لفهم علم المجموعات، ولذلك سنقدِّمها بشكل موجز ودون الخوض في تفاصيلها.

1-5- بعض خصائص العمليات الجبريّة على المجموعات

لتكن Ω مجموعة شّاملة، ولنأخذ A، B وC مجموعات جزئيّة من Ω، فعندئذٍ يمكن للقارئ التحقُّق من صحة العلاقات الآتيّة:

1- الخاصة التّبديليّة (أو التّناظريّة) Commutative Property:

إنَّ كلّ من الاتحاد والتّقاطع يتمتَّع بالخاصة التّبديليّة التي يعبَّر عنها بالعلاقتين الآتيتين:

a) $A \cup B = B \cup A$ **b)** $A \cap B = B \cap A$

2- الخاصة التّجميعيّة Associative Property:

إنَّ كلّ من الاتحاد والتّقاطع يتمتَّع بالخاصة التّجميعيّة التي يعبَّر عنها بالعلاقتين الآتيتين:

a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ **b)** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3- الخاصة التوزيعية Distributive Property:

إنَّ كلّ من الاتحاد والتّقاطع يقبل التوزيع على الآخر ويعبَّر عن ذلك بالعلاقتين الآتيتين:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4- قانونا ديمورغان De Morgan's laws:

لدينا العلاقتين الآتيتين محقَّقتين دائماً، وتدعيان **قانوني ديمورغان (نسبة للرّياضياتي الفرنسي أوغستس ديمورغان (1806-1871) Augustus De Morgan)**:

a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

b) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

أمثلة

1- لتكن لدينا المجموعة الشّاملة الآتيّة:

$\Omega = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

ولنأخذ منها المجموعات الجزئيّة الآتيّة:

$A = \{d, e, f, g\}$ **&** $B = \{c, d, e, f\}$

$C=\{a, b, e, f, g\}$ & $D=\{a\}$

ولنقم بتعيين المجموعات الآتية:

a) $A\cap B$ & **b)** $B\cap D$ & **c)** $A\cup B$

d) $B\cup C$ & **e)** $C\setminus B$ & **f)** $\bar{B}$

✍ **الحلول:** لدينا من أجل الفقرة:

a) $A\cap B=\{d, e, f\}$

b) $B\cap D=\{\}=\varnothing$

c) $A\cup B=\{c, d, e, f, g\}$

d) $B\cup C=\{a, b, c, d, e, f, g\}=\Omega$

e) $C\setminus B=\{a, b, g\}$

f) $\bar{B}=\Omega\setminus B=\{a, b, g\}$

2- لنقم برمي حجر نرد سداسي الوجوه لمرّةٍ واحدةٍ فقط، فتكون لدينا مجموعة النتائج الآتيّة:

$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ولنقم بتعيين المجموعات التي تُعبِّر عن حصولنا على:

أ- عدد أصغر من 3.

ب- عدد أصغر من 3 أو عدد أكبر من 4.

ج- عدد فردي وأصغر من 3.

د- عدد أصغر من 3 وأكبر من 4.

✍ **الحلول:** من أجل الطّلب:

أ- لنرمز بـ A للمجموعة التي تُعبِّر عن حصولنا على عدد أصغر من 3، فتكون $A=\{1,2\}$.

ب- لنرمز بـ B للمجموعة التي تُعبِّر عن حصولنا على عدد أكبر 4، فيكون المطلوب:

$A\cup B=\{1, 2\}\cup\{5,6\}=\{1,2,5,6\}$

ج- لنرمز بـ C للمجموعة التي تُعبِّر عن حصولنا على عدد فردي، فيكون المطلوب:

$C\cap A=\{1,3,5\}\cap\{1,2\}=\{1\}$

د- لنرمز بـ D للمجموعة التي تُعبِّر عن حصولنا على عدد أصغر من 3 وأكبر من 4، فيكون لدينا:

$D=\{\}=\varnothing$

لاحظ هنا أنَّ المجموعة Ω أخذت دور المجموعة الشّاملة.

تمرين: اذا كانت A وB مجموعتان غير متقاطعتان $(A\cap B)=\emptyset$ من المجموعة الشاملة Ω اثبت ان :

1- $A\Delta B=(A\cup B)$

2- $A\setminus B=A$

1-7- تعريف (قدرة مجموعة *Cardinality of a set*)

لتكن A مجموعة ما. عندئذٍ تُعَرَّف **قدرة** هذه المجموعة بأنَّه العدد الذي يمثّل عدد عناصرها، ويرمز له بـ $|A|$.

فعلى سبيل المثال يكون للمجموعة $A=\{3,-1,7,15,4,-13,2,0,-5\}$ قدرة تساوي 9، وللمجموعة $A=\{a,b,c,d\}$ قدرة تساوي 4.

1-8-المجموعة المنتهية والغير منتهية

1- المجموعة المنتهية

نقول أنَّ مجموعة ما A منتهية (**أي تحوي عدداً منتهياً من العناصر**) اذا كان عدد العناصر منتهية، على سبيل المثال فإذا كان لدينا على سبيل المثال $A=\{a_1, a_2,..., a_n\}$ مع n عدد طبيعي مثبَّت، فإنَّه سيكون لدينا:

$$|A|=n$$

بكلام اخر اذا كانت قدرة المجموعة (عدد عناصر المجموعة) يعبر عنها بعدد طبيعي محدود .
مثال على ذلك مجموعة عدد سكان الكرة الأرضية مجموعة محدودة رغم ان العدد كبير.

2-المجموعة الغير منتهية

وأمّا إذا كانت قدرة المجموعة A غير منتهية(**عدد عناصرها غير منته**) فعندئذٍ نقول ان المجموعة غير منتهية.
مثل مجموعة الأعداد الطبيعية N والصحيحة Z والحقيقية R كلها تمثل مجموعات غير منتهية.

1-9-المجموعة القابلة للعد والغير قابلة للعد

سنميّز بين حالتين:

1-المجموعة القابلة للعد

إذا كانت المجموعة A منتهية او غير منتهية ولكن يمكن ترقيم عناصرها بوساطة الأعداد الطّبيعيّة، فعندئذٍ يُقال إنَّ هذه المجموعة **قابلة للعدّ**، ويُكتب $|A|=+\infty$ اذا كان عدد عناصرها غير منته نكتب $|A|=m$ اذا كان عدد العناصر منته.
مثال على ذلك مجموعة الأعداد الطبيعيّة N هي مجموعة قابلية العدّ، وكذلك مجموعة الأعداد الصحيحة .

2-المجموعة الغير قابلة للعد

إذا كانت المجموعة A غير منتهية ولا يمكن ترقيم عناصرها بوساطة الأعداد الطبيعيّة، فعندئذٍ يُقال إنَّ هذه المجموعة **غير قابلة للعدّ**، ويُكتب $|A|=+\infty$ أيضاً، ولكن يُقال في هذه الحالة إنَّ للمجموعة A **قدرة المستمر**.
مثال على ذلك **مجموعة الأعداد الحقيقيّة**.

كما يمكن إثبات أنَّ كلّ فترة I من R ذات طول موجب تماماً هي مجموعة غير قابلة للعدّ أيضاً.

يمكن تمثيل مجموعة الأعداد الحقيقيّة هندسيا بالمحور **OX** حيث يمكن تمثيل الأعداد الحقيقيّة تصويرياً من خلال خط مستقيم موجَّه **OX** (**أي على شكل سهم**) يكون فيه الرّأس دالاً على تزايد القيم الممثلة عليه، ويُؤخذ (**غالباً**) أفقياً على الشكل الآتي:

من جهةٍ أخرى يمكن إثبات أن كلّ عدد حقيقي يمكن تخصيصه بنقطة وحيدة على المحور الحقيقيOX (**حيث حرف الـ o هنا يعني نقطة الأصل Origin Point وموضعها ينطبق على الصفر**)، وبالعكس فإذا كان a هو العدد الموافق لنقطة M فإنَّ a تُدعى **إحداثي النقطة** M ويُدعى الخط المستقيم OX بـــ **خط الإحداثيات** أو **المحور الحقيقي** أو **المستقيم الحقيقي**.

ان اتحاد مجموعات الاعداد الطبيعية والصحيحة والكسرية وغير الكسرية I,Q,Z,N تسمى بمجموعة الاعداد الحقيقية ونرمز لها R أي ان R هي المجموعة الشاملة لتلك المجموعات العددية السابقة.

ملاحظة

كل مجموعة منتهية هي مجموعة قابلة للعد لكن العكس غير صحيح دائما فيمكن ان تكون المجموعة قابلة للعد لكنها غير منتهية مثل N.

1-10بعض العلاقات مهمة

اذا اكانت المجموعة الخالية $\emptyset$ وAوB مجموعتان جزئيتان من المجموعة الشاملة Ω واذا رمزنا $\bar{A}$ متممة A :

1. $\emptyset = \{\}$
2. $\emptyset \subseteq A$
3. $\overline{\Omega} = \emptyset \quad \& \quad \overline{\emptyset} = \Omega$
4. $\varnothing \cap A = A \cap \varnothing = \varnothing$
5. $\varnothing \cup A = A \cup \varnothing = A$
6. $A \subseteq \Omega$
7. $\overline{\overline{A}} = A$
8. $\overline{A} \cap A = A \cap \overline{A} = \emptyset$
9. $\overline{A} \cup A = A \cup \overline{A} = \Omega$

10. $A \setminus \overline{B} = A \cap B$
11. $A \cap \Omega = \Omega \cap A = A$
12. $A \cup \Omega = \Omega \cup A = \Omega$
13. $A \setminus \Omega = \varnothing$ & $\Omega \setminus A = \overline{A}$
14. $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
15. $A \Delta B = B \Delta A$
16. $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

عبارات خاطئة: جميع العبارات التالية غير صحيحة لان العلاقات بين المجموعات ليس علاقة انتماء او عدم انتماء انما احتواء او عدم احتواء.

$A \in \Omega$, $\varnothing \in A$, $a \subseteq A$

1-11-تمارين وامثلة للحل

الباب الثاني

طرق المد المبدأ الأساسي في المد

أهداف التعلم: في نهاية هذا الفصل، يجب أن يكون الطالب قادراً على

1. فهم طرف العد والمبدأ الأساسي في العد.
2. استخدام والمبدأ الأساسي في العد .
3. فهم مفهوم التباديل والتوافيق .
4. المقدرة على حساب واستخدام التباديل والتوافيق.

مواضيع الباب

طرق العد والمبدأ الأساسي في العد

1. قاعدة الضرب
2. قاعدة الجمع
3. التباديل
4. التوافيق

2-1- طرق العد والمبدأ الأساسي في العد

القاعدتين الأساسيتين في العدّ: Basic Rules of Counting

إنَّ من متطلبات الحساب الاحتمالي التعرّف على بعض قواعد العدّ والحساب التي يحتاجها الطالب في حساب بعض الاحتمالات لحوادث وسنبدأها بالمفهوم الآتي.

1- قاعدة الضرب Multiplication Rule

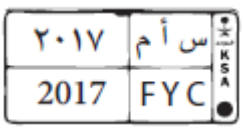
لنفترض أنَّ عمليّة ما A يمكن أن تُنجز بـ n طريقة، وعمليّة أخرى B يمكن أن تُنجز بـ m طريقة، فعندئذٍ يمكننا إنجاز كلاً من العمليتين A و B بآنٍ واحدٍ بعدد من الطرائق يساوي $n \times m$. إنَّ هذا الإجراء الحسابي لهذا النوع من المسائل يُعرف باسم "**قاعدة الضرب**"، ويمكن تعميم هذه الطريقة في الحساب على ثلاث او اكثر من العمليات.

أمثلة

1- لدينا قفل رقمي عشري لحقيبة مكوَّن من خمس خانات (**كما في الشكل الجانبي**). بكم طريقة يمكننا أن نختار رقماً لقَفل هذا القِفل؟

✍ **الحل:** بملاحظة أن أول رقم في الخانة اليسرى يمكننا اختياره بعددٍ من الطرائق يساوي إلى 10، وكذلك الأمر بالنسبة إلى الخانات الأربع الأخرى المتبقية، فإنَّه يمكننا أن نختار رقماً لقفل هذا القفل بعدد من الطرائق يساوي:

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 100000$$



2- إنَّ لوحات السيارات في بعض البلدان تُصمَّم بحيث تكون اللوحة المميّزة للسيارة تحتوي على أربعة أرقام عشرية وثلاثة أحرف عربية، فما هو عدد السيارات التي يمكن أن تحمل لوحة من هذا النموذج؟

✍ **الحل:** بملاحظة أنَّ أول رقم في اللوحة يمكننا اختياره بعددٍ من الطرائق يساوي إلى 10، وكذلك الأمر بالنسبة إلى بقية الأرقام الموجودة على اللوحة، أمّا بالنسبة إلى الأحرف فيمكننا اختيار أول حرف بعددٍ من الطرائق يساوي 28 طريقة، وبالمثل نجد من أجل اختيار بقية الأحرف الموجودة على اللوحة، ومن ثمَّ يكون عدد اللوحات التي يمكن إنتاجها وفقاً لهذا التقديم يساوي (**وهو عدد السيارات التي يمكن أن تحمل لوحة من هذا النموذج**):

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 28 \times 28 \times 28 = 219520000$$

2-قاعدة الجمع Addition Rule

لنفترض أنَّ عمليّة ما A يمكن أن تُنجز بـ n طريقة، وعمليّة أخرى B يمكن أن تُنجز بـ m طريقة، فعندئذٍ يمكن إنجاز العمليّة A أو العمليّة B بعدد من الطرائق يساوي $n+m$. إنَّ هذا الإجراء الحسابي لهذا النوع من المسائل يُعرف باسم "**قاعدة الجمع**"، ويمكن تعميم هذه التقنية في الحساب على ثلاث او اكثر من العمليات.

أمثلة

1- يرغب أحد العاملين في أرشيف ترميز ملفاته باستخدام حرف عربي أو رقم عشري، فكم ملفاً يمكن ترميزه بهذه الطريقة؟

✍ **الحل:** بملاحظة أنَّ العامل لا يستطيع استخدام إلَّا حرف عربي **أو** رقم عشري فقط، فإنَّه يستطيع ترميز 28 ملفاً بوساطة الأحرف العربية و10 ملفات بوساطة الأرقام العشرية فقط، ومن ثمَّ يكون عدد الملفات التي يمكن ترميزها وفقاً لهذا التقديم يساوي $28 + 10 = 38$.

2- يريد باحث تنفيذ تجربة تربوية على تلاميذ إحدى المدارس، حيث يمكنه تطبيقها إمَّا على التلاميذ الذكور ولديه ست مدارس فقط أو على التلميذات ولديه ثمانية مدارس. كم إمكانية لديه لتنفيذ تجربته؟

✍ **الحل:** نلاحظ أنَّه يمكن للباحث تنفيذ تجربته بعدد من الطرائق يساوي $6 + 8 = 14$.

3- كم عددا مكونا من منزلتين يمكن تكوينه بحيث نختار رقم الاحاد من بين عناصر المجموعة (2 ،3,8) ورقم العشرات من بين عناصر المجموعة (5 ، 4) ؟

✍ **الحل:** يمكن استخدام الشجرة البيانية لأجراء احصاء فعلي لجميع الاعداد الممكنة هكذا:

اذن عدد جميع الاعداد الناتجة = 6

لاحظ ان هناك 3 طرق مختلفة لاختيار رقم الاحاد و ان هناك طريقتين مختلفتين لاختيار رقم العشرات مقابل كل طريقة من الطرق الثلاثة الاولى فيكون لدينا 3*2=6 طرق مختلفة لاختيار رقمي الاحاد و العشرات

4- صندوق فيه 8 كرات مختلفة سحبت 3 كرات الواحدة تلو الاخرى . جد عدد طرق سحب الكرات الثلاث اذا كان السحب::

أ-دون ارجاع

ب-مع ارجاع

✍ **الحل:**

أ-السحب دون ارجاع

عدد طرق سحب الكرة الاولى =8
عدد طرق سحب الكرة الثانية =7

عدد طرق سحب الكرة الثالثة =6
اذن عدد طرق سحب الكرات الثلاث =8*7*6=336 طريقة
ب-السحب مع ارجاع
عدد طرق سحب الكرة الاولى=8
عدد طرق سحب الكرة الثانية =8
عدد طرق سحب الكرة الثالثة =8
اذن عدد طرق سحب الكرات الثلاث =8*8*8=512 طريقة
5- تقوم مكتبة بترميز كتبها بوساطة إحدى الطريقتين الآتيتين:

- إمَّا باستخدام رقمين وثلاثة أحرف لاتينية،

- أو باستخدام ثلاثة أرقام وحرفين عربيين،

فما هو عدد الكتب التي يمكن ترميزها وفقاً لهذه الشروط؟

✍ **الحل:** بملاحظة أنَّه يمكن للمكتبة أن ترمِّز باستخدام رقمين وثلاثة أحرف لاتينية عدداً من الكتب يساوي:

$$10 \times 10 \times 26 \times 26 \times 26 = 1757600$$

وكذلك باستخدام ثلاثة أرقام وحرفين عربيين تستطيع أن ترمِّز عدداً من الكتب يساوي:

$$10 \times 10 \times 10 \times 28 \times 28 = 784000$$

2-2-تمارين ومسائل للحل

1- لحديقة 4 ابواب بكم طريقة تستطيع شخص الدخول للحديقة من احد الابواب و الخروج من الباب آخر؟

2- يعمل في شركة 8 مهندسين ، 3 فنيين ، 24 عاملا . بكم طريقة يمكن تكوين فريق عمل مكون من مهندس و فني و عامل ؟

3- اراد شخص السفر من نابلس الى بيت لحم ، فاذا كان امامه 3 طرق مختلفة للسفر من نابلس الى رام الله ، وطريقتان مختلفتان للسفر من رام الله الى بيت لحم ، فبكم طريقة يمكنه السفر من نابلس الى بيت لحم مارا برام الله ؟

من المفاهيم الهامَّة في الحساب الاحتمالي التقليدي أيضاً ما يُعرف باسم **"التراتيب والتوافيق"**، والذين سنقدمهما من خلال الفقرتين الآتيتين:

2-3-التراتيب (او التباديل)

ان من اهم التطبيقات لمبدأ العد الاساسي استخدامه في معرفة عدد طرق التي يتم بها ترتيب عناصر مجموعة ما بكل الطرق الممكنة فمثلا اذا كان لدينا 3 كتب مختلفة هي : رياضيات ، فيزياء ، احياء . واردنا ترتيبها متجاورة على رف بكل الطرق الممكنة فإننا نحصل على التراتيب التالية::

المكان الاول المكان الثاني المكان الثالث
رياضيات فيزياء احياء
رياضيات احياء فيزياء
احياء رياضيات فيزياء
احياء فيزياء رياضيات
فيزياء رياضيات احياء
فيزياء احياء رياضيات

اذن عدد التراتيب =6 نسمي كل ترتيب تبديلاً

تعريف:

التبديل لمجموعة مكونة من n من العناصر هو اي ترتيب لعناصر هذه المجموعة يرمز لعدد جميع هذه التراتيب (التباديل) بالرمز $p(n,n)$.

مثال:(1)

اراد اربعة اشخاص اخذ صورة جماعية بوقوفهم معا في صف واحد بكم طريقة مختلفة يمكن ان يصطف هؤلاء الاشخاص ؟؟

الحل: الطرق المختلفة لاصطفاف الاشخاص هي التباديل المختلفة لمجموعة مكونة من اربعه عناصر اي $p(4,4)$ ولإيجاد $p(4,4)$ يمكننا تصور المواقع الاربعة التي يقف بها الاشخاص الاربعة هكذا::

يمكن اشغال الموقع الاول بـ4 طرق
يمكن اشغال الموقع الثاني بـ3 طرق

يمكن اشغال الموقع الثالث بـِ2 طرق
يمكن اشغال الموقع الرابع بـِ1 طرق
عدد جميع الطرق = 4*3*2*1=24 طريقة
اي ان 24=(4*3*2*1=p(4,4)

و بوجه عام:
اذا كانت x مجموعة عدد عناصرها n ، فان عدد تباديل (تراتيب) هذه العناصر يساوي
p(n,n)=1*2*3…..*(n-2)*(n-1)*n
و اختصارا في كتابة حاصل الضرب 1*2*3…..*(n-2)*(n-1)*n فاننا نكتبه على صورة n!
وتقرأ مضروب n(n factorial).
تعريف: اذا كان nعددا صحيحا موجبا فان مضروب n (ويرمز له بالرمز n!) يعرف بالشكل:

n!= 1*2*3…..*(n-2)*(n-1)*n
0! = 1

اي ان مضروب n! يساوي حاصل ضرب n من الاعداد الطبيعية المتتالية تبدأ بالعدد n و تنتهي بالعدد 1

مثال:(2)
جد ناتج 5!
الحل: 5!=5*4*3*2*1=120

مثال:(3)
بين ان 8!=6!*56
الحل: الطرف الأيمن

8!=8*7*6*5*4*3*2*1=8*7*(6*5*4*3*2*1)=8*7*6!=56*6!

مثال:(4)
اكتب كلا مما يلي باستخدام رمز المضروب
أ- 5*4*6*3*1*2
ب- 10*9*8
الحل:
أ- 5*4*6*3*1*2= 2*3*4*5*6=1*2*3*4*5*6=!6
ب- 10*9*8 = 7!/7! = 10*9*8*7!/10!=7!

مثال:(5)
اذا كان n!=720 فما قيمة n ؟
الحل:
n!حاصل ضرب n من الاعداد الطبيعية المتتالية اكبرها n و اصغرها 1 لذا نكتب الطرف الايسر

على صورة حاصل ضرب عوامل متتالية اصغرها 1 فيكون اكبرها n.

$6! = 6*5*4*3*2*1 = 720$

$n=6$

ملاحظة::

تم اخراج العوامل عن طريق التحليل

$720/1=720$

$720/2=360$

$360/3=120$

$120/4=30$

$30/5=6$

$6/6=1$

مثال:(6)

اذا كان $n!/(n-2)!=20$ فما قيمة ن ؟

الحل:

$n!/(n-2)!=20$

$n(n-1)(n-2)!/(n-2)!=20$

$n(n-1)=20$

$n^2-n=20$

$n^2-n-20=0$

$(n-5)(n+4)=0$

ان $n=5,n=-4$ و يرفض الجواب السالب اذن $n=5$

تباديل n من العناصر المختلفة مأخوذة عدد k :

في كثير من الاحيان نهتم بترتيب بعض عناصر مجموعة من الاشياء المختلفة وليس جميعها.

لنفترض أنَّه لدينا 3 كتب، ونودّ ترتيبها واحداً تلو الآخر على رفٍ فيه 5 مواضع للكتب. بكم طريقة يمكننا ترتيب هذه الكتب الثلاثة؟

نلاحظ أنَّه لدينا خمسة اختيارات من أجل وضع الكتاب الأول، وبعد ذلك يتبقى لدينا أربعة مواضع شاغرة على الرف من أجل وضع الكتاب الثاني، وبعد وضع الكتاب الثاني يمكننا وضع الكتاب الأخير بإحدى ثلاث طرائق. إذاً، وبحسب قاعدة الضرب يمكننا أن نضع الكتب الثلاثة على هذا الرف واحداً تلو الآخر بعدد من الطرائق يساوي:

$$5\cdot(5-1)\cdot(5-2)=5\times4\times3=\frac{5\times4\times3\times2\times1}{2\times1}=\frac{5!}{(5-3)!}=60$$

اي ان عدد تباديل خمسة اشياء مأخوذة ثلاثة ثلاثة في كل مرة يساوي60 و نرمز لذلك $p(5,3)$ في الحقيقة يمكننا تعميم هذه القاعدة من أجل عدد منتهٍ من الأشياء على النحو الآتي.

لنفترض أنَّه لدينا n من الأشياء المتمايزة ونريد أخذ k شيء منها واحداً تلو الآخر دون إعادة، فعندئذٍ يمكننا اختيار الشيء الأول بعدد من الطرائق يساوي n، وأمّا من أجل اختيار الشيء الثاني فيكون قد تبقى لدينا $n-1$ من إمكانيات الاختيار، ومن أجل اختيار الشيء الذي يليه يتبقى لدينا $n-2$ من إمكانيات الاختيار، وهكذا على هذا النحو فيتبقى لدينا من أجل اختيار الشيء الأخير $[n-(k-1)]$ من إمكانيات الاختيار، وبالتالي بحسب قاعدة الضرب يكون لدينا من أجل اختيار الـ k شيء عدداً من الطرائق يساوي:

$$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot[n-(k-1)]=\frac{n!}{(n-k)!}$$

ويُرمز لهذا المقدار بـ $p(n,k)$، أي أنَّه لدينا:

$$P(n,k)=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot[n-(k-1)]=\frac{n!}{(n-k)!}$$

ويُقرأ "تراتيب لـ k شيء مأخوذة من n شيء متمايز على التتالي، علماً أنَّ:

$$n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$$

ويُدعى " n **مضروب** n-**Factorial** "، والجدول الآتي يزودنا ببعض القيم لـ $n!$ من أجل استخدامها في حل التمارين والمسائل.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

وأمّا إذا كانت قيمة n كبيرة نسبياً فمن المفيد استخدام العلاقة الآتية التي تنتج من نشر سترلنغ Stirling Expansion (**نسبة إلى الرياضياتي الأسكتلندي سترلنغ -James Stirling (1692**) لحساب المقدار $n!$:

$$n!\approx\sqrt{2\,n\,\pi}\;\;n^{n}\;\;e^{-n}\qquad;n\in N$$

الآن، وفي الحالة الخاصَّة عندما يصبح لدينا $k=n$ فإنَّه يُقال عن تبديل لـ n من الأشياء المتمايزة، ويكون لدينا في هذه الحالة:

$$p(n,k)=n(n-1)(n-2).....3.2.1=n!$$

سنقدِّم فيما يلي أمثلة بسيطة على سبيل التوضيح

مثال

1- لدينا صندوق يحوي 3 كرات متماثلة تماماً ومرقّمة بالأعداد 1، 2 و3. عندئذٍ:

أ- إذا قمنا بسحب عشوائي لكرتين من الصندوق على التوالي وبدون إعادة، فبكم طريقة يمكننا اختيار هاتين الكرتين؟

ب- إذا قمنا بسحب عشوائي لثلاث كرات من الصندوق على التوالي وبدون إعادة، فبكم طريقة يمكننا اختيار هذه الكرات الثلاث؟

ج- نسحب عشوائياً كرتين من الصندوق على التوالي ومع الإعادة، فبكم طريقة يمكننا اختيار هاتين الكرتين؟

الحل: من أجل كل الطلب:

أ- بملاحظة أنَّه يمكننا سحب الكرة الأولى بعدد من الطرائق يساوي 3، والتي تليها بعدد من الطرائق يساوي 2، ومن ثمَّ بحسب قاعدة الضرب يمكننا اختيار الكرتين بعدد من الطرائق يساوي:

$$3 \times 2 = 6 = \frac{3!}{(3-2)!}$$

وهذا موافق للسحوبات الممكنة الآتية حيث يُلاحظ أنَّ للترتيب أهمية في هذا النوع من السحب:

$(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2)$

ب- بملاحظة أنَّه يمكننا سحب الكرة الأولى بعدد من الطرائق يساوي 3، والتي تليها بعدد من الطرائق يساوي 2، والكرة الأخيرة بعدد من الطرائق يساوي 1، ومن ثمَّ بحسب قاعدة الضرب يمكننا اختيار الكرات الثلاث بعدد من الطرائق يساوي:

$$p(3,3) = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = 3! = 3.2.1 = 6$$

وهذا يعني أنَّه لدينا في هذه الحالة تباديل لثلاثة أشياء. لاحظ أنَّ للترتيب أهمية في هذا النوع من السحب أيضاً حيث لدينا:

$(1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)$

ج- بملاحظة أنَّه يمكننا سحب الكرة الأولى بعدد من الطرائق يساوي 3، وكذلك التي تليها يمكننا سحبها بعدد من الطرائق يساوي 3 أيضاً، ومن ثمَّ بحسب قاعدة الضرب يمكننا اختيار الكرتين بعدد من الطرائق يساوي:

$$3 \times 3 = 3^2 = 9$$

وهذا موافق للسحوبات الممكنة الآتية حيث يُلاحظ أنَّ للترتيب أهمية في هذا النوع من السحب:

$(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)$

ولكن لم تعد المسألة هي مسألة تراتيب رغم أهمية الترتيب لنتائج السحب، والسبب في ذلك يعود إلى عملية الإعادة للكرات المسحوبة.

4-2 التوافيق

عرفنا ان التباديل هي اختيارات مرتبة يمكن تكوينها من مجموعة من الاشياء مأخوذة كلها او بعضها في كل مرة ، وفي بعض الاحيان نحتاج الى اجراء اختيار دون ترتيب(أي ان الترتيب ليس له اهمية) كما يحصل مثلا عند تشكيل لجنة خماسية من الاعضاء يتم اختيارهم من بين 30 عضو او تكوين مجموعة من 3 عناصر مأخوذة من مجموعة عدد عناصرها 5 عناصر او . . . الخ فهذه الحالات لا يكون الترتيب فيها ذا اهمية

مثال:(1)

بكم طريقة يمكن اختيار 3 كتب من بين خمسة كتب هي : علوم ، رياضيات تكنولوجيا ، ادارة ،تاريخ ؟

الحل:

جميع الاختيارات الممكنة هي:

(علوم ، رياضيات ، تكنولوجيا) ، (علوم ، ادارة ،تاريخ)

(علوم ، رياضيات ، ادارة) ، (رياضيات ، تكنولوجيا ، ادارة)

(علوم ، رياضيات ، تاريخ) ، (رياضيات ، ادارة ، تاريخ)
(علوم ، تكنولوجيا ، ادارة) ، (رياضيات ، تكنولوجيا ، تاريخ)
(علوم ، تكنولوجيا ، تاريخ) ، (تكنولوجيا ، ادارة ، تاريخ)

عدد الاختيارات يساوي 10 ، يسمى كل اختيار من هذه الاختيارات توفيقا.
لاحظ ان الترتيب في كل اختيار غير مهم فالاختيار (علوم ، رياضيات ،تكنولوجيا) هو نفسة (رياضيات ، علوم ، تكنولوجيا) وهو نفسه (تكنولوجيا ،رياضيات ، علوم) . .. ,

تعريف التوافيق: هي اختيارات غير مرتبة (مجموعة جزئية لها عدد العناصر نفسه) يمكن تكوينها من مجموعة من الاشياء مأخوذة راءً راءً في كل مرة بالرمز و تقرأ n توفيق r , حيث n , r عددان طبيعيان و n اكبر او تساوي من r .

نظرية $$q(n,r)=\frac{n!}{k!*(n-r)!}$$

برهان:
التوافيق هي اختيارات غير مرتبة فاذا ما رتبنا عناصر كل توفيق التي عددها n فانه ينتج لدينا
$p(n , r)*r! = q(n,r)$ من التباديل اي ان $q(n,r) *r!$
اذن

$$q(n,r)=\frac{n!}{r!*(n-r)!}$$

وهو المطلوب
نتيجة:(1)

$$q(n,r)=\frac{n!}{r!*(n-r)!}$$

مثال:(1) : جد قيمة $q(7,3)$
الحل:

$$q(7,3)=p(7,3)/3!= 7*6*5/3*2*1=35$$

مثال:(2) : مدرسة فيها 15 معلما ، يراد تشكيل لجنة مكونة من 4 معلمين بكم طريقة يتم ذلك ؟
الحل:
عدد طرق تشكيل اللجنة

$$q(15,4)= p(15,4)/4!=1*2*3*4/12*13*14*15$$

أي ان عدد الطرق 1365
مثال:(3)
التقى 4 اصدقاء فصافح كل منهم الاخر ، كم مصافحة تمت بين الاصدقاء ؟؟

الحل:

عدد المصافحات

$q(4,2)= p(4,2)/2!=4*3/2*1=6$

اذا رمزنا للاصدقاء الاربعة بالرموز a,b,c,d فان المصافحات بين كل اثنين تمثلها المجموعة الجزئية التالية::

(a ،b) ، (a,c) ، (a,d) ، (b,c ، (b,d) ، (c,d) وهذه 6مجموعات

نتيجة:(2)

$$q(n,r)=q(n,n-r)$$

البرهان:

الطرف الأيمن

$$q(n,n-r)= \frac{n!}{(n-r)!*r!}$$

الطرف الايسر

$$q(n,r)= \frac{n!}{r!*(n-r)!}$$

الطرفان متساويان

وهذه النتيجة تقول ان عدد توافيق n من العناصر مأخوذة r,r في كل مرة يساوي عدد توافيق nمن العناصر مأخوذة (n-r) في كل مرة و هذا واصح لان تكوين مجموعة جزئية من 3 عناصر من بين 10 عناصر مثلا يقابله مباشرة تكوين مجموعة جزئية من 7 عناصر من نفس المجموعة اي ان عدد المجموعات الجزئية الثلاثية لمجموعة مكونة من 10 عناصر مختلفة يساوي عدد المجموعات الجزئية السباعية للمجموعة اي ان:

$$q(n,r)=q(n,n-r)$$

ملاحظة:

1- إن العلاقة التالية صحيحة

$$q(n,k)= \frac{n!}{k!*(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)....(n-(k-1))}{k!}$$

2- إن

$$q(n,n)=1$$
$$q(n,n-1)=n$$

فمثلا:

$$q(8,8)=8!/81*0!=1 \quad \& \quad q(50,50)=50!/50!*0!=1$$
$$q(8,7)=8!/7!*1!=8 \quad \& \quad q(50,49)=50!/49!*1!=50$$

والأمثلة الآتية توضِّح لنا ذلك.

أمثلة

1- لدينا صندوق يحوي 3 كرة متماثلة تماماً ومرقّمة بالأعداد 1 وحتى 3. نسحب عشوائياً كرتين من الصندوق دفعة واحدة. بكم طريقة يمكننا اختيار هاتين الكرتين؟

✍ **الحل:** بملاحظة أنَّ السحوبات الممكنة هي **(1,2)**، **(1,3)** و **(2,3)**، وذلك لأنَّ النتيجتين **(1,2)** و **(2,1)** تعدّ نتيجة واحدة فقط بسبب عدم أهمية الترتيب، وذلك لأنَّنا لا نعلم أي منهما الأولى وأيها الثانية بسبب سحبهما بآن واحد. كذلك الأمر بالنسبة إلى النتيجتين **(1,3)** و **(3,1)** والنتيجتين **(2,3)** و **(3,2)**.

إذاً، فعدد الطرائق الممكنة لسحب هاتين الكرتين يساوي ض $q(3,2)$حيث لدينا:

$$= \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{6}{(2)\cdot(1)} = 3$$

2- في مركز صحي يوجد تسع ممرضات وأربعة أطباء، وطُلِب منّا تشكيل لجنةٌ من أجل إدارة هذا المركز بحيث تكون مكوَّنة من طبيبين وثلاث ممرضات. بكم طريقة يمكننا تشكيل هذه اللجنة؟

✍ **الحل:** بملاحظة أنَّه يمكننا أن نختار طبيبين من أربعة أطباء بعدد من الطرائق يساوي $q(4,2)$ **(لأنَّه لا أهمية للترتيب هنا، فالمهم الحصول على طبيبين فقط)**، وكذلك يمكننا أن نختار ثلاث ممرضات من تسع ممرضات بعدد من الطرائق يساوي $q(9,3)$ **(لأنَّه لا أهمية للترتيب هنا أيضاً، والمهم الحصول على ثلاث ممرضات)**، ومن ثمَّ بحسب قاعدة الضرب يمكننا اختيار طبيبين وثلاث ممرضات بعدد من الطرائق يساوي $q(4,2).\ q(9,3)$ ، حيث لدينا:

$$= \frac{4!}{2!\,(4-2)!}\cdot\frac{9!}{3!\,(9-3)!} = 6\times 84 = 504$$

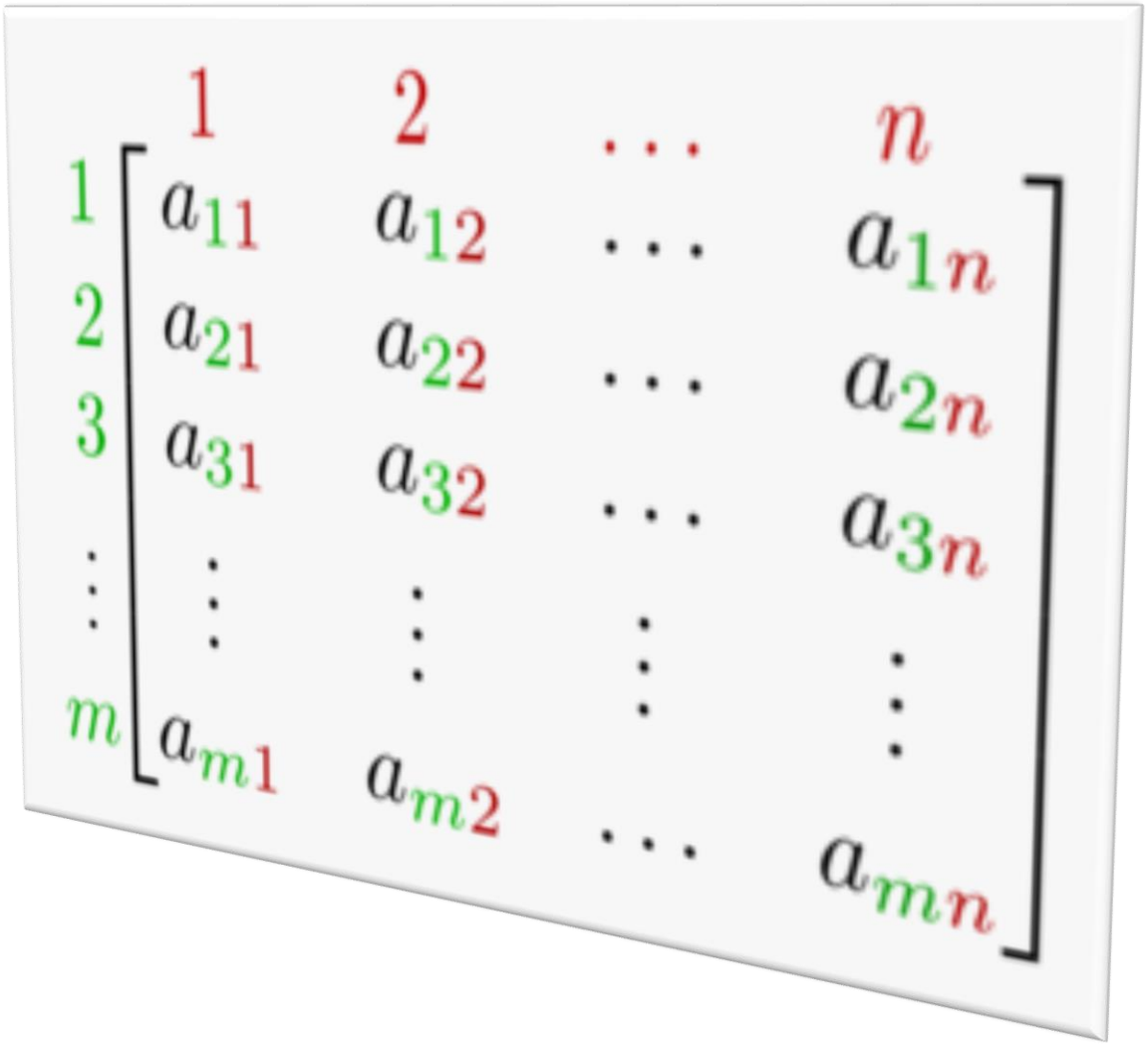
3- شَهِد وقوع حادثة جنائية في مركز للتسوق سبعة رجال وثمان نساء. بكم طريقة يمكن اختيار الشهود على هذه الواقعة **(وفقاً للقاعدة الشرعية للشهادة)؟**

✍ **الحل:** من المعلوم أنَّ الشهادة تتمّ برجلين أو رجل وامرأتين، وبما أنَّ الترتيب بين كل الرجال والنساء من الشهود ليس له أهمية فإنَّه يمكننا اختيار الشهود على هذه الواقعة بعدد من الطرائق يساوي **(مستخدمين في ذلك قاعدتي الجمع والضرب)**:

$$q(7,2)\cdot q(7,1)q(8,1) = \frac{7!}{2!(7-2)!} + \frac{7!}{1!(7-1)!}\cdot\frac{8!}{2!(8-2)!}$$
$$= 21 + (7\times 28) = 217$$

الباب الثالث

المصفوفات و المحدِّدات



أهداف التعلم: في نهاية هذا الفصل، يجب أن يكون الطالب قادراً على

1. فهم التعريفات الخاصة بالمصفوفات والمحددات.
2. معرفة أنواع المصفوفات.
3. اجراء العمليات الأساسية المتعلقة بالمصفوفات.
4. حساب المحددات.
5. فهم دور تحليل الحساسية
6. استخدام اكسل

مواضيع الباب

1. المصفوفات وتعريف المصفوفة.
2. العمليات الجبرية على المصفوفات.
3. خواص العمليات الجبرية على المصفوفات.
4. أنواع المصفوفات وخواصها.
5. المصفوفات الشهيرة.
6. المحددات وطرق حسابها.

3-1-رموز ومصطلحات

N هي مجموعة الأعداد الطبيعية 1و 2 و 3و ..... .

Z هي مجموعة الأعداد الصحيحة $\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$.

Q هي مجموعة الأعداد العادية $\left\{\frac{k}{n} \mid k \in \mathrm{Z} \quad \& \quad n \in \mathrm{N}\right\}$.

R هي مجموعة الأعداد الحقيقية .

3-2- المصفوفات

تظهر لنا في مسائل كثيرة قيماً عددية **مرتبة** في صفوف وأعمدة على شكل مستطيل تُدعى بـ **ترتيبة مستطيلة** ، فعلى سبيل المثال لو أخذنا منظومة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} x_1+7x_2-x_3 &= 9 \\ 2x_1+3x_2-2x_3 &= 5 \\ 8x_1+4x_2+5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

فإنَّه يمكننا أن نشكل منها الترتيبات المستطيلة التالية :

$$\begin{matrix} 1 & 7 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 8 & 4 & 5 \end{matrix} \quad \& \quad \begin{matrix} 1 & 7 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 8 & 4 & 5 & 0 \end{matrix} \quad \& \quad \begin{matrix} 9 \\ 5 \\ 0 \end{matrix}$$

إنَّ هذه الترتيبات المستطيلة ستُعرِّف لنا ما يُسمَّى بـ **المصفوفات** ، والتي ستلعب دوراً هاماً في قطاعاتٍ رياضيَّةٍ كثيرةٍ وعلى وجه الخصوص لدى دراسة حل أنظمة من المعادلات الخطية .

1- تعريف (المصفوفة) : تُعرَّف المصفوفة على أنَّها ترتيبة مستطيلة لقيم عددية (**أي أنَّ ترتيب توضعات القيم ذو أهميَّة**) ومحاطة بقوسين على النحو الآتي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}.....a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}.....a_{2n} \\ ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}.....a_{mn} \end{bmatrix} \quad ; \quad n \, , \, m \in \mathrm{N}$$

حيث تُدعى هذه المصفوفة بـ **مصفوفة مستطيلة من المرتبة** $m \times n$ ، وسنرمز لها بأحرف لاتينية قائمة وغامقة من قبيل **A و B و C** و ... إلخ ، وأمَّا القيم التي في

المصفوفة فتُسمَّى بـ **عناصر المصفوفة** ، كما سنرمز للعنصر الواقع في السطر i والعمود j من المصفوفة السابقة بالرمز a_{ij} .

2-ملاحظات :

1- من النموذج العام للمصفوفة ينتج لدينا أحد النماذج التالية :

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots\ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix} \quad \& \quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots a_{1n} \end{bmatrix} \quad \& \quad \mathbf{E}=\begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix}$$

حيث تُدعى المصفوفة **C** بـ **مصفوفة عامود** ، وأمَّا **D** بـ مصفوفة **سطرية** أو **متَّجه** ولذلك يُرمز لها على شكل متَّجه من قبيل $\mathbf{D}=(a_1 , a_2 , a_3 , \ldots\ldots , a_n)$ ، في حين أنَّ **E** تُسمَّى مصفوفة **وحيدة العنصر** وأخيراً **B** يُقال لها مصفوفة **مربَّعة** .

2- على سبيل الاختصار والتبسيط سنرمز بـ $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m\times n}$ للمصفوفة التالية :

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots\ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}$$

وعندما يكون لدينا $m=n$ فإنَّنا سنرمز لها بـ $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_n$ ، ونلجأ للعرض التفصيلي عند الضرورة فقط .

3- تُحدَّد مرتبة المصفوفة من خلال ذكر عدد الصفوف ، والأعمدة التي توجد في المصفوفة ، وفي الحالة الخاصة عندما تكون المصفوفة **A** مربَّعة من المرتبة $n\times n$ فإنَّنا سنكتب **A** من المرتبة n وذلك على سبيل الاختصار والتبسيط .

4- سنرمز لعناصر المصفوفة بحروف صغيرة موافقة للحرف الممثِّل للمصفوفة إن أمكن ذلك ، فعلى سبيل المثال ، فسنرمز للعنصر الذي في الصف i والعمود j للمصفوفة **A** و **B** على الترتيب بـ a_{ij} و b_{ij} ، وهكذا دواليك بالنسبة لبقية الحروف الأبجدية .

5- تكون المصفوفتان A و B متساويتين :إذا كانتا من المرتبة نفسها وتساوت العناصر المتقابلة في المصفوفتين .

أمثلة : لنأخذ المصفوفات الآتية :

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 10\\ 3 & 14\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-2 & 10\\ 3 & 5\end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}-2 & 10 & 0\\ 3 & 14 & 0\end{bmatrix}$$

فنلاحظ أنَّ $\mathbf{A}\neq\mathbf{C}$ وذلك لأنَّ **A** و **C** ليستا من المرتبة نفسها ، وللسبب نفسه لدينا $\mathbf{B}\neq\mathbf{C}$ أيضاً ، وأخيراً نجد أنَّ $\mathbf{A}\neq\mathbf{B}$ بسبب عدم تساوي جميع العناصر المتقابلة في كلٍ من المصفوفتين **A** و **B**

3-3-العمليات الجبرية على المصفوفات

1-ضرب مصفوفة بعدد

لتكن $\mathbf{A}=[\,a_{ij}\,]_{m\times n}$ مصفوفة ما ان ضرب المصفوفة A بالعدد λ (حيث λ≠0)يعني ضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة **A** بالعدد λ ، بمعنى أنَّه من أجل λ ∈ R^* سيكون لدينا :

$$\lambda\cdot\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \lambda\cdot a_{13} & \ldots\ldots\ldots & \lambda\cdot a_{1n}\\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \lambda\cdot a_{23} & \ldots\ldots\ldots & \lambda\cdot a_{2n}\\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ \lambda\cdot a_{m1} & \lambda\cdot a_{m2} & \lambda\cdot a_{m3} & \ldots\ldots\ldots & \lambda\cdot a_{mn}\end{bmatrix} \qquad [\,1-1\,]$$

ملاحظة : إذا كانت **A** مصفوفة ما ، فإنَّ $-\mathbf{A}$ سترمز لحاصل الضرب $(-1)\cdot\mathbf{A}$.

2-مجموع مصفوفتين

لتكن **A** و **B** مصفوفتين لهما المرتبة نفسها ، عندئذ يُعرَّف **مجموع المصفوفتين A و B** ، والذي يُرمز له بـ **A+B** ، على النحو التالي :

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} & \ldots\ldots\ldots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} & \ldots\ldots\ldots & a_{2n}+b_{2n}\\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & a_{m3}+b_{m3} & \ldots\ldots\ldots & a_{mn}+b_{mn}\end{bmatrix} \qquad [\,1-2\,]$$

ملاحظات :

1- من تعريف مجموع مصفوفتين نلاحظ عدم إمكانية جمع مصفوفتين من مرتبتين مختلفين

2- إذا كانت المصفوفتان **A** ، **B** من مرتبة واحد ، فعندئذ تكون المصفوفة $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ هي المصفوفة الناتجة عن المجموع $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})=\mathbf{A}+(-1)\mathbf{B}$.

3- أمثلة :

1- لنأخذ المصفوفات التالية :

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 0 & 3\\ -1 & -2 & 2 & 4\\ 4 & -2 & 4 & 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-4 & 3 & 5 & 1\\ 2 & 2 & 0 & -1\\ 3 & 2 & -4 & 5\end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

فنجد أنَّ $\mathbf{A}+\mathbf{C}$ و $\mathbf{B}+\mathbf{C}$ غير ممكنة الحساب ، في حين أنَّ :

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 4 & 5 & 4\\ 1 & 0 & 2 & 3\\ 7 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

2- لنأخذ المصفوفتين :

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \mathrm{B}=\begin{bmatrix}10 & 2 & 7\\ 1 & -3 & 5\end{bmatrix}$$

فنجد أنَّ :

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-10 & -2 & -7\\ -1 & 3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12 & 1 & -3\\ 0 & 5 & -6\end{bmatrix}$$

لاحظ إمكانية الحصول $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ مباشرة من خلال طرح عناصر المصفوفة **B** من العناصر المقابلة لها في المصفوفة **A** .

لقد عرَّفنا فيما سبق عملية ضرب مصفوفة بعدد حقيقي ، والآن لنعرِّف عملية ضرب مصفوفتين مع بعضهما .

3-ضرب مصفوفتين

لتكن **A** مصفوفة من المرتبة $m \times r$ و **B** مصفوفة من المرتبة $r \times n$ ، عندئذ حاصل **ضرب المصفوفتين A و B** ، والتي يُرمز لها بـ **AB** ، يُعرَّف على أنَّه مصفوفة من المرتبة $m \times n$ من الشكل الآتي :

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}:=\mathbf{C}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\ldots\ldots c_{1n}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\ldots\ldots c_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3}\ldots\ldots c_{mn}\end{bmatrix}$$

علماً أنَّ :

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{r}a_{is}\cdot b_{sj} \quad ; \ i\in \mathbb{N}_n \ , \ j\in \mathbb{N}_m \qquad [\ 2-3\text{ - b }]$$

ملاحظة : من التعريف السابق نلاحظ أنَّ ضرب مصفوفتين يتطلب أن يكون عدد أعمدة العامل الأيسر للجداء AB هو عدد صفوف العامل الأيمن نفسه لهذا الجداء ، وأمَّا في حال عدم تَحقُّق هذا الشرط فلن يُعرَّف حاصل الضرب لهاتين المصفوفتين .

أمثلة :

1- لنقم بحساب المصفوفة الناتجة عن ضرب المصفوفتين الآتيتين :

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 2 & 6 & 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 4 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 1\\ 2 & 7 & 5 & 2\end{bmatrix}$$

بما أنَّ **A** مصفوفة من المرتبة 2×3 و **B** مصفوفة من المرتبة 3×4 فيكون حاصل الضرب **AB** مُعرَّفاً ، ولنفترض أنَّها **C** ، وبتطبيق العلاقة [2 – 3 - b] يكون لدينا :

$$c_{11}=(1\times 4)+(2\times 0)+(4\times 2)=12 \ \ \& \ \ c_{12}=(1\times 1)+(2\times -1)+(4\times 7)=27$$
$$c_{13}=(1\times 4)+(2\times 3)+(4\times 5)=30 \ \ \& \ \ c_{14}=(1\times 3)+(2\times 1)+(4\times 2)=13$$
$$c_{21}=(2\times 3)+(6\times 1)+(0\times 2)=8 \ \ \& \ \ c_{22}=(2\times 1)+(6\times -1)+(0\times 7)=-4$$
$$c_{23}=(2\times 4)+(6\times 3)+(0\times 5)=26 \ \ \& \ \ c_{21}=(2\times 3)+(6\times 1)+(0\times 2)=12$$

ومن ثمَّ ينتج لدينا :

$$\mathbf{AB}=\mathbf{C}=\begin{bmatrix}12 & 27 & 30 & 13\\ 8 & -4 & 26 & 12\end{bmatrix}$$

2- لنقم بحساب المصفوفة الناتجة عن ضرب المصفوفتين الآتيتين :

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix} \quad \& \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

من أجل ذلك نلاحظ أولاً أنَّ شرط تنفيذ عملية الضرب مُحقَّقاً ، ومن ثمَّ سيكون لدينا ما يلي :

$$c_{11}=(0\times 1)+(1\times 0)+(-1\times 2)=-2$$
$$c_{12}=(0\times 0)+(1\times 3)+(-1\times -1)=4 \ .$$

ومن ثمَّ فالمصفوفة **AB** هي $\mathbf{AB}=\mathbf{C}=[-2 \quad 4]$.

3- لنأخذ المصفوفتين :

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \quad \& \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1- & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

ولنقم بحساب المصفوفتين **AB** و **BA** ؟

أ- من أجل المصفوفة **AB** لدينا :

$$c_{11}=(1\times -1)+(2\times 2)=-5 \quad \& \quad c_{12}=(1\times 0)+(2\times 1)=2$$

$$c_{21}=(3\times -1)+(4\times 2)=-11 \quad \& \quad c_{22}=(3\times 0)+(4\times 1)=4$$

ومن ثمَّ فالمصفوفة **AB** سيكون لها الشكل :

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}-5 & 2\\ -11 & 4\end{bmatrix}$$

ب- من أجل المصفوفة **BA** لدينا :

$$c_{11}=(-1\times 1)+(0\times 3)=-1 \quad \& \quad c_{12}=(-1\times 2)+(0\times 4)=-2$$

$$c_{21}=(2\times 1)+(1\times 3)=5 \quad \& \quad c_{22}=(2\times 2)+(1\times 4)=8$$

ومن ثمَّ فالمصفوفة **AB** الناتجة هي :

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 5 & 8\end{bmatrix}$$

ملاحظة : من المثال الأخير نلاحظ أنَّ ضرب المصفوفات غير تبديلي ، أي أنَّه في الحالة العامة لدينا $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$ ، وأمَّا إذا كان من أجل مصفوفتين A , B

ولدينا $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ ، فعندئذ نقول إنَّ المصفوفتين **A** و B **قابلتين للمبادلة** ، فعلى سبيل المثال لو أخذنا المصفوفتين التاليتين :

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix} \quad \& \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -2 & -4\end{bmatrix}$$

لوجدنا أنَّهما قابلتين للمبادلة ، وذلك لأنَّ :

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}-7 & -6\\ 6 & -4\end{bmatrix} \qquad \& \qquad \mathbf{BA}=\begin{bmatrix}-7 & -6\\ 6 & -4\end{bmatrix}$$

المبرهنة التالية التي سنقدِّمها دون برهان تعرض لنا بعض الخواص التي تتمتَّع بها بعض العمليات الجبرية على المصفوفات .

3-4-خواص العمليات الجبرية على المصفوفات

مبرهنة : لتكن **A** و **B** و **C** ثلاث مصفوفات مفروضة وكذلك α و β ∈ R^* ، عندئذ تحت الفرض بأنَّ الشروط اللازمة لإنَّجاز العمليات التالية مُحقَّقةً ، فإنَّه سيكون لدينا ما يلي :

$a)\ \mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ & $b)\ \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$

$c)\ \mathbf{A}(\mathbf{BC})=(\mathbf{AB})\mathbf{C}$ & $d)\ \mathbf{A}(\mathbf{B}\pm\mathbf{C})=\mathbf{AB}\pm\mathbf{AC}$

$e)\ \mathbf{A}\pm(\mathbf{BC})\neq(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}\pm\mathbf{C})$ & $f)\ \alpha\cdot(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})=\alpha\cdot\mathbf{A}\pm\alpha\cdot\mathbf{B}$

$g)\ (\alpha\pm\beta)\mathbf{A}=\alpha\cdot\mathbf{A}\pm\beta\cdot\mathbf{A}$ & $h)\ (\alpha\cdot\beta)\cdot\mathbf{A}=\alpha\cdot(\beta\cdot\mathbf{A})$

$j)\ \alpha\cdot(\mathbf{AB})=(\alpha\cdot\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(\alpha\cdot\mathbf{B})$

أمثلة : لتكن لدينا المصفوفات التالية :

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

1- لنثبت صحة الخاصيَّة (c) والتي تُعبِّر عن الخاصة التجميعيَّة لضرب المصفوفات ؟

من أجل ذلك لدينا :

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 5\\ 20 & 13\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

ومن ثمَّ يكون :

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\begin{bmatrix}8 & 5\\ 20 & 13\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18 & 15\\ 46 & 39\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

من ناحية أخرى نجد :

$$\mathbf{BC}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 9\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

ومنه يصبح لدينا :

$$\mathbf{A(BC)}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 9\\ 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18 & 15\\ 46 & 39\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

وهكذا نستنتج أنَّ : $\mathbf{(AB)C=A(BC)}$

2- لنثبت صحة الخاصيَّة (j) ، حيث سنأخذ على سبيل التبسيط $\alpha=2$ ؟

من أجل ذلك لدينا :

$$2\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\\ 0 & 2\end{bmatrix} \quad \& \quad 2\mathbf{B}=\begin{bmatrix}8 & 6\\ 4 & 2\end{bmatrix} \quad \& \quad 2(\mathbf{AB})=\begin{bmatrix}16 & 10\\ 40 & 26\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

ومن ثمَّ نجد المطلوب من خلال العلاقة التالية :

$$(2\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}\,(2\mathbf{B})=2(\mathbf{AB})=\begin{bmatrix}16 & 10\\ 40 & 26\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

4- منقول المصفوفة

تعريف (منقول المصفوفة) : لتكن مصفوفة من المرتبة ، ولنقم بجعل الأسطر لهذه المصفوفة أعمدة مرتبة بحسب التتالي الطبيعي لتواجدها ،

عندئذ نحصل على مصفوفة أخرى $\mathbf{B}$ من المرتبة $n\times m$ تدعى بـ **منقول المصفوفة** $\mathbf{A}$ ، ويُرمز لها بـ $\mathbf{A}^T$.

المبرهنة التالية التي سيترك برهانها للقارئ أيضاً تُقدِّم لنا بعض الخواص لمنقول مصفوفة ما

مبرهنة (خواص منقول مصفوفة **) :** لتكن $\mathbf{A}$ مصفوفة من المرتبة $m\times n$ ، عندئذ :

1- يكون لدينا :

$$(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}$$

2- بفرض أنَّ $\mathbf{B}$ مصفوفة من المرتبة $m\times n$ ، فسيكون لدينا ما يلي :

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$$

3- بفرض أنَّ $\mathbf{B}$ مصفوفة من المرتبة $n\times r$ ، عندئذ يكون لدينا ما يلي :

$$(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\,\mathbf{A}^T$$

3-5- بعض الأنواع الشهيرة من المصفوفات

1-تعريف (المصفوفة الصفرية) : لتكن $\mathbf{A}=[\,a_{ij}\,]_{m\times n}$ مصفوفة ما ، فإذا كانت جميع عناصر $\mathbf{A}$ أصفاراً ، عندئذ تُسمَّى المصفوفة $\mathbf{A}$ بـ

مصفوفة صفرية ، وسنرمز لها بـ 0 ، وفي حال الضرورة لذكر المرتبة فسنكتب $0_{m\times n}$.

أمثلة : إنَّ كلاً من المصفوفات التالية تمثِّل مصفوفة صفريَّة:

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\quad\&\quad\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\&\quad\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad\&\quad[0]$$

ملاحظة : إنَّ المصفوفة الصفريَّة تلعب دور العنصر المحايد بالنسبة لعملية جمع المصفوفات ، فإذا كانت $\mathbf{A}$ أية مصفوفة و 0 المصفوفة الصفرية من المرتبة نفسها ، فعندئذ نجد أنَّ $\mathbf{A}+0=\mathbf{A}$ ، وهكذا نلاحظ أنَّ المصفوفة الصفرية في هذه

المعادلة للمصفوفات تلعب نفس الدور الذي يلعبه العدد 0 في المعادلة العددية $\alpha+0=\alpha$

مبرهنة : لتكن $\mathbf{A}$ مصفوفة ما ، ولنفترض أنَّ العمليات التالية على المصفوفات ممكنة ، عندئذ تكون القواعد التالية لحساب المصفوفات صحيحة :

$$a)\quad \mathbf{A}+0=0+\mathbf{A}=\mathbf{A}\qquad\&\qquad b)\quad \mathbf{A}-\mathbf{A}=0$$

$$c)\quad 0-\mathbf{A}=-\mathbf{A}\qquad\&\qquad d)\quad \mathbf{A}0=0\quad\&\quad 0\mathbf{A}=0$$

2-تعريف (المصفوفة المربعة): هي المصفوفة التي تساوى بها عدد الاسطر مع عدد الاعمدة أي ان m=n ونرمز لها اختصارا بـ $\mathbf{A}=[\,a_{ij}\,]_n$.

بعض المفاهيم التي تتعلق بالمصفوفة المربعة

القطر الرئيسي والقطر الثانوي في المصفوفة المربعة: لتكن $\mathbf{A}=[\,a_{ij}\,]_n$ مصفوفة مربعة من المرتبة n ،ان مجموعة العناصر: $a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ .....a_{nn}$ تسمى بعناصر القطر الرئيسي كما هو موضح بالشكل:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

اما العناصر المقابلة لها قطريا فتسمى بالقطر الثانوي كما في الشكل:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

تعريف (المصفوفة المثلثيَّة) : لتكن A مصفوفة مربَّعة من المرتبة n عندئذ : إذا كانت العناصر الواقعة **فوق** ((أو **تحت**)) القطر الرئيسي لهذه المصفوفة أصفاراً ، فعندئذ تُسمَّى هذه المصفوفة بـ **مصفوفة مثلثيَّة** . أي أنَّ لـ A أحد العرضين التاليين

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)n} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة مثلثية سفلية

أو

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

مصفوفة مثلثية علوية

تعريف (المصفوفة القطريَّة): لتكن A مصفوفة مربَّعة من المرتبة n عندئذ : إذا كانت العناصر الواقعة **فوق** و **تحت** القطر الرئيس لهذه

لمصفوفة أصفاراً ، فعندئذ تُسمَّى هذه المصفوفة بـ **مصفوفة قطريَّة** . أي أنَّ :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

تعريف (المصفوفة السلميَّة) : لتكن $\mathbf{A}$ مصفوفة مربَّعة من المرتبة n ، فإذا كانت هذه **المصفوفة قطريَّة** ، وكانت جميع عناصر القطر الرئيسي متساوية ومغايرة للصفر ، فإنَّ $\mathbf{A}$ تُدعى **مصفوفة سلميَّة** .

مثال: المصفوفة الاتية مصفوفة سلمية من الرتبة الثالثة:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & & \\ & 4 & \\ & & 4 \end{bmatrix}$$

تعريف (المصفوفة الواحديَّة) : لتكن $\mathbf{A}$ مصفوفة مربَّعة من المرتبة n ، فإذا كانت هذه **المصفوفة سلميَّة** ، وكانت جميع عناصر القطر الرئيسي مساوية

للواحد ، فإنَّ هذه المصفوفة تُسمَّى **مصفوفة واحديَّة** ، ويُرمز لها بـ $\mathbf{I}$ ، وفي حال الضرورة لذكر المرتبة سنكتب $\mathbf{I}_n$.

مثال: المصفوفة الاتية واحدية من الرتبة الرابعة:

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعريف (المصفوفة المتناظرة) : لتكن $\mathbf{A}$ مصفوفة مربَّعة من المرتبة n ، فإذا حقَّقت المصفوفة $\mathbf{A}$ العلاقة $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ ، فإنَّ هذه المصفوفة $\mathbf{A}$ تُدعى **مصفوفة متناظرة** .

تعريف (المصفوفة ضد المتناظرة أو المخالفة تناظرياً) : لتكن $\mathbf{A}$ مصفوفة مربَّعة من المرتبة n ، فإذا حقَّقت المصفوفة $\mathbf{A}$ العلاقة

$$A^T=-A$$

فإنَّ المصفوفة $\mathbf{A}$ تُدعى **مصفوفة ضد متناظرة (أو متخالفة تناظرياً)**.

أمثلة : لنأخذ المصفوفات التالية :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\quad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&1&0&1\\0&3&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad \mathbf{G}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad \mathbf{H}=\begin{bmatrix}3&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}0&-1&6\\1&0&2\\-6&-2&0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{L}=\begin{bmatrix}0&10&-2&-4\\10&6&4&12\\-2&4&-4&16\\-4&12&16&24\end{bmatrix}$$

فنلاحظ أنَّ كلاً من المصفوفات **A** و **B** و **D** هي مصفوفات مثلثيَّة ، في حين أنَّ المصفوفة **E** و **H** و **G** هي مصفوفة **قطريَّة** منها **H سلميَّة و G واحديَّة** ،

وأمَّا المصفوفة **L** و فهي مصفوفة **متناظرة** ، و **K** نجدها مصفوفة **ضد متناظرة** ، وأخيراً فإنَّ المصفوفات **C** و **F** ليست من النماذج الشهيرة المصنَّفة سابقاً **.**

ملاحظة : إذا كانت **A** مصفوفة من المرتبة $m\times n$ فإنَّ :

$$\mathbf{I}_m\mathbf{A}=\mathbf{A}\qquad \&\qquad \mathbf{A}\mathbf{I}_n=\mathbf{A}$$

وعليه فإنَّ المصفوفة الواحديَّة تلعب دور العنصر المحايد بالنسبة لعملية ضرب المصفوفات ، والذي يماثل دور العدد 1 في العلاقات العددية $\alpha\cdot 1=\alpha$ و $1\cdot\alpha=\alpha$.

مثال : لنأخذ المصفوفة : $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}$

فنجد أنَّ :

$$\mathbf{I}_2\,\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}$$

وكذلك لدينا :

$$\mathbf{A}\mathbf{I}_3=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{bmatrix}=\mathbf{A}$$

6-3- المُحدِّدات

تعريف (محدِّد مصفوفة) : لتكن A_n مصفوفة مربعة نسمي det(A) محدد المصفوفة والذي هو عبارة عن عدد يمكن حسابه بعدد من الطرق من المصفوفة A_n كما سنرى من خلال الأمثلة فيما بعد .

ملاحظات :

1- في كثير من الأحيان يستخدم الرمز $|\mathbf{A}|$ للدلالة على قيمة مُحدِّد المصفوفة $\mathbf{A}$ ، وفي كتابنا هذا سنستخدم كلا الرمزين ، وذلك تبعاً لسهولة الكتابة و وضوح المعنى .

2- لتكن $\mathbf{A}$ مصفوفة مربَّعة ، فإذا كان $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ فعندئذ تُدعى $\mathbf{A}$ بـ **مصفوفة نظامية** ، وأمَّا إذا كان $\det(\mathbf{A}) = 0$ فعندئذ تُدعى $\mathbf{A}$ بـ **مصفوفة شاذَّة (أو غير نظامية)** .

طرق حساب المحددات

أولا: الطريقة المباشرة لنشر محدد

سوف نتعرف على طرق حساب المحددات(من المرتبتين الثانية والثالثة) من خلال الأمثلة الاتية:

أمثلة :

1-- لنأخذ $n = 2$ فنجد أنَّ :

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (-1)^o\, a_{11}\, a_{22} + (-1)^1\, a_{12}\, a_{21}$$
$$= a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

حيث نلاحظ أنَّه لدينا ثلاث عمليات حسابية ،فعلى سبيل المثال لو أخذنا المصفوفة :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

فإنَّنا نجد بحسب القاعدة السابقة أنَّ $\det(\mathbf{A}) = (5 \times -1) - (3 \times 2) = -11$

2- لنأخذ $n = 3$ فيكون لدينا :

$$A_3=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=(-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33}+(-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32}+(-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$+(-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31}+(-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32}+(-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

فنلاحظ أنَّه لدينا $(3\times 3!)-1=17$ من العمليات الحسابية ، فعلى سبيل المثال لو أخذنا المصفوفة :

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{bmatrix}$$

فإنَّنا نجد ما يلي :

$$\det(\mathbf{B})=(45)-(-48)-(-72)+(84)+(96)-(105)=240$$

ملاحظة : من أجل المصفوفات المربَّعة والتي من المرتبة **الثالثة فقط** يمكننا أنَّ نصيغ قاعدة حساب مُحدِّد هذه المصفوفة على النحو الآتي :

$$\det(\mathbf{A})=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

والذي يُمثِّل المجاميع للأقطار الرئيسية مطروحاً منه مجاميع الأقطار الثانوية للعرض الجدولي التالي :

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

إنَّ العلاقة الأخيرة تُعرف بـ **طريقة ساروس** لحساب محدِّد مصفوفة من المرتبة 3 ، وهنا أودُّ أن ألفت انتباه القارئ إلى أنَّ هذه الطريقة تصبح غير صالحة لحساب محدِّدات المصفوفات التي من المرتبة 4 وما فوق ، فلو قمنا بتطبيق هذه الطريقة في حساب مُحدِّد المصفوفة $\mathbf{B}$ السابقة لوجدنا ما يلي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -4 & 5 & 6 & -4 & 5 \\ 7 & -8 & 9 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(B) = (45) + (84) + (96) - (105) - (-48) - (-72) = 240$$

في الحقيقة ، إنَّ حساب قيم المحدِّدات مباشرة وفقاً للتعريف قد يؤدي إلى حسابات طويلة وصعبة ، إذ أنَّ الحساب المباشر لقيمة محدِّد مصفوفة من المرتبة الرابعة يحتاج إلى $4!-1=23$ عملية حسابية من حواصل الضرب

الأولية المميّزة ، في حين أنَّ حساب قيمة محدِّد مصفوفة من المرتبة العاشرة سيحتاج إلى

$$10\,!-1=3628799$$

عملية حسابية من حواصل الضرب الأولية المميّزة ، لذلك كان لا بدَّ من إيجاد وسائط تسهِّل عملية الحساب هذه ، ومنها على سبيل المثال **حساب**

قيم المحدِّدات باختزال الصفوف أو الأعمدة التي سنعرضها بعد قليل ، تُبيّن لنا أنَّ محدِّد أية مصفوفة مربَّعة يمكن حساب قيمته باختزال المصفوفة المُعطاة إلى الصورة

الصفية المميّزة ، وسنلاحظ حينها أنَّ هذه الطريقة لها أهمية خاصة لأنَّها تتجنب الحسابات المطوَّلة الناتجة عن التطبيق المباشر لتعريف المحدِّد .

فيما يلي سندرس صنفين من المصفوفات التي يمكن حساب مُحدِّداتها بسهولة وذلك بغض النظر عن كبر المصفوفة قيد الحساب .

مبرهنة : إذا كانت $\mathbf{A}$ مصفوفة مربَّعة وتحوي **صفاً** أو **عموداً** من الأصفار ، فإنَّه سيكون لدينا $\det(\mathbf{A})=0$.

مبرهنة : إذا كانت $\mathbf{A}$ مصفوفة مربَّعة مثلثية (او قطرية) من المرتبة n، فإنَّه سيكون لدينا:

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots\ldots\ldots \cdot a_{nn}$$

ملاحظة هامة: ان قيمة محدد المصفوفة المثلثية (او القطرية) يساوي حاصل ضرب عناصر قطره الرئيسي

أمثلة : لنأخذ المصفوفتين التاليتين :

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 \\ 0 & -3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \& \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 7 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فنجد أنَّ :

$$\det(\mathbf{A})=-324 \quad \& \quad \det(\mathbf{B})=10$$

4- لدينا :

$$\det(A^T) = \det(A)$$

5- لدينا :

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$$

6- في الحالة العامة لدينا ما يلي :

$$\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$$

أمثلة : لنأخذ المصفوفات الآتية :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \& \quad B_1 = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \& \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \& \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فإذا حسبنا قيم محدِّدات هذه المصفوفات ، فإنَّنا نحصل على القيم التالية :

$$\det(A) = -2 \quad \& \quad \det(B_1) = -8 \quad \& \quad \det(B_2) = 2 \quad \& \quad \det(B_3) = -2 \quad \& \quad \det(C) = 1$$

فنلاحظ أنَّ B_1 تنتج عن ضرب الصف الأول من A بالعدد 4 ، وأمَّا B_2 فنحصل عليها بتبديل الصفين الأولين من المصفوفة A ، وأخيراً نحصل

على B_3 بطرح ضعف الصف الثالث للمصفوفة A من الصف الثاني ، وكذلك لدينا :

$$A + C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \det(A) + \det(C) = -3 + 0 = -3 \\ \det(A + C) = -4 \end{cases}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A^T) = -3 = \det(A)$$

ثانيا: نشر المحدِّدات باستخدام المتمِّمات الجبرية

فيما يلي سنقدِّم طريقة أخرى لحساب قيم المحدِّدات ، وكنتيجة لعملنا هذا سنحصل على صيغة لمعكوس مصفوفة قابلة للعكس .

تعريف (المتمِّم المميِّز لعنصر في مصفوفة) : إذا كانت $\mathbf{A}$ مصفوفة مربَّعة ، عندئذ **المحدِّد المتمِّم للعنصر** a_{ij} يُعرَّف بأنَّه مُحدِّد المصفوفة

الجزئية المتبقية بَعد حذف الصف i والعمود j من المصفوفة $\mathbf{A}$ ، و يُرمز له بـ M_{ij} ، كما يُرمز

للعدد $(-1)^{i+j}M_{ij}$ بالرمز C_{ij} ، ويُسمَّى بـ **المتمِّم المميِّز للعنصر** a_{ij} .

مثال : لتكن لدينا المصفوفة :

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -4\\ 2 & 5 & 6\\ 1 & 4 & 8\end{bmatrix}$$

عندئذ نجد أنَّ المحدِّد المتمِّم للعنصر a_{11} هو :

$$M_{11}=\begin{vmatrix}3 & 1 & -4\\ 2 & 5 & 6\\ 1 & 4 & 8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 6\\ 4 & 8\end{vmatrix}=16$$

والمتمِّم المميِّز للعنصر a_{11} هو :

$$C_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=M_{11}=16$$

وبالمثل نجد أنَّ متمِّم العنصر a_{32} هو :

$$M_{32}=\begin{vmatrix}3 & 1 & -4\\ 2 & 5 & 6\\ 1 & 4 & 8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 2 & 6\end{vmatrix}=26$$

ومن ثمَّ المتمِّم المميِّز للعنصر a_{32} هو $C_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}=-26$.

ملاحظة : لاحظ أنَّ المتمِّم المميِّز ، والمتمِّم لعنصر ما a_{ij} يختلفان عن بعضهما البعض في الإشارة فقط ، أي أنَّ $C_{ij}=\pm M_{ij}$.

العرض التوضيحي التالي يساعدنا في تحديد ما إذا كنَّا سنستخدم الإشارة (**+**) أم الإشارة (**-**) لدى عملية النشر ،

$$\begin{bmatrix}+ & - & + & - & + & \cdots\\ - & + & - & + & - & \cdots\\ + & - & + & - & + & \cdots\\ - & + & - & + & - & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

وهكذا سيكون لدينا ما يلي :

$$C_{ij} = \begin{cases} +M_{ij} & for\ \ i+j \quad even \\ -M_{ij} & for\ \ i+j \quad odd \end{cases}$$

فعلى سبيل المثال لنأخذ المصفوفة :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ولقد أثبتنا سابقاً أنَّ :

$$\mathbf{det(A)} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

والتي يمكن كتابتها على النحو الآتي :

$$\mathbf{det(A)} = a_{11}(a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32}) + a_{21}(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

وبملاحظة أنَّ العبارات التي ضمن الأقواس هي المتمِّمات المميّزة C_{11} و C_{21} و C_{31} ، فإنَّه سينتج لدينا ما يلي :

$$\mathbf{det\,(A)} = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

نتيجة : من العلاقة الأخيرة نجد أنَّ محدِّد **A** يمكن حسابه بضرب عناصر العمود الأول للمصفوفة **A** في متمِّماتها المميّزة وجمع حواصل الضرب الناتجة .

هذه الطريقة لحساب قيمة $\mathbf{det\,(A)}$ تُسمَّى بـ **نشر المحدِّد باستخدام المتمِّمات المميّزة لعناصر العمود الأول للمصفوفة A** .

مثال : لتكن لدينا المصفوفة التالية :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

ولنحسب قيمة $\mathbf{det\,(A)}$ ، وذلك بنشر هذا المحدِّد باستخدام المتمِّمات المميّزة لعناصر العمود الأول للمصفوفة **A** .

الحل : من أجل ذلك نجد بتطبيق القاعدة السابقة ما يلي :

$$\det(A)=3\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 4 & -2\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & -2\end{vmatrix}+5\begin{vmatrix}1 & 0\\ -4 & 3\end{vmatrix}$$
$$=3(-4)-(-2)(-2)+5(3)=-1$$

مثال : لنأخذ المصفوفة المربَّعة **A** والمعطاة من خلال المثال (**السابق**) ، ولنحسب قيمة **det(A)** بنشره باستخدام المتمِّمات المميِّزة لعناصر الصف الأول ، فنجد :

$$\det(A)=\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ -2 & -4 & 3\\ 5 & 4 & -2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-4 & 3\\ 4 & -2\end{vmatrix}-(1)\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 5 & -2\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}-2 & -4\\ 5 & 4\end{vmatrix}$$
$$=3(-4)-(1)(-11)=-1$$

وهذا يتفق مع النتيجة التي حصلنا عليها لحساب محدِّد هذه المصفوفة سابقاً.

تمارين غير محلولة على المصفوفات والمحددات

2- لتكن لدينا المصفوفات التالية :

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix} \quad \& \quad B=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix} \quad \& \quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix} \quad \& \quad E=\begin{bmatrix}0 & 1 & -3\\ -1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad \& \quad F=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 3 & 4\\ 1 & 6\end{bmatrix}$$

والمطلوب ما يلي :

أ-حساب ما يلي :

1) $F+A$ 2) $D-E$ 3) CD 4) AB
5) $AB+F$ 6) EA 7) B^3 8) E^2
9) $\det A$ 10) $\det D$ 11) $\det E$ 12) $\det(DE)$

ب- عيّن ما يلي :

1) A^T 2) C^T

جـ- بيّن أي من المصفوفات السابقة متناظرة .

بحيث يكون حاصل الضرب **AB** ممكناً ، فإنَّه يوجد في المصفوفة **AB** عمود من الأصفار أيضاً ؟

8- لتكن لدينا المصفوفتين التاليتين :

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} \quad \& \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 7 & 1 & 2\\ 5 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

عندئذ تحقق من أنَّ $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ ؟

الباب الرابع

المعادلات الخطية

أهداف التعلم: في نهاية هذا الفصل، يجب أن يكون الطالب قادراً على

1. التعرف على المعادلة الخطية ونظم المعادلات الخطية.
2. فهم طرق إيجاد الحل النظم المعادلات الخطية.
3. فهم القضايا الخاصة في البرمجة الخطية مثل عدم الإمكانية
4. فهم دور تحليل الحساسية
5. استخدام اكسل

مواضيع الباب

1. المعادلة الخطية.
2. نظام المعادلات الخطية.
3. حل نظام المعادلات الخطية.
4. طرق حل نظام المعادلات الخطية.

4-1-المعادلة الخطية

تعتبر دراسة المعادلات الخطية وحلولها من المواضيع المهمة في الرياضيات وخصوصاً في الجبر الخطي إضافة لاستخداماتها في العلوم التطبيقية الاخرى. سوف نقدم في هذا البند بعض العلاقات الرياضية الأساسية ومناقشة طرق حل تلك الأنظمة.

الصيغة التالية تمثيل هذه الصيغة معادلة خطية بمتغيرين هما x و y :

$$ax + by = c$$

وعليه يمكن كتابة المعادلة الخطية التي تحتوي على n من المتغيرات(تسمى في بعض الأحيان المجاهيل) بالصيغة.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$$

حيث c، a_n، ...، a_2، a_1 ثوابت حقيقة .

نقول ان للمعادلة الخطية:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$$

حل وهي الأعداد s_n، ...، s_2، s_1 اذا تحققت المعادلة عندما نعوض

$$x_1 = s_1 \text{ ،} x_2 = s_2 \text{ ،} \dots \text{ ،} x_n = s_n$$

4-2-نظام المعادلات الخطية

المثال التالي يوضح لنا شكل المعادلة الخطية والمعادلة اللاخطية:

مثال (1):

المعادلات الآتية هي نموذج من نظام المعادلات الخطية

$$1.x + 2y = 8$$

$$2.x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 7$$

$$3.y = x + 3/4\ z$$

أما المعادلات الآتية فهي ليست معادلات خطية:

$$1.x + 2y^2 = 3$$

$$2.y - \cos\theta = 0$$

$$3.\ \sqrt{x_1} + 3x_2 + x_3 = 1$$

لاحظ أن صيغة المعادلة الخطية تحتوي على متغيرات من الدرجة الأولى ولا تحتوي على متغيرات بدرجة أعلى أو جذور أو دوال مثلثية أو ضرب متغيرات مع بعضها أو دوال أسية.

4-3-حل نظام المعادلات الخطية

سوف نقوم بتوضيح حل جملة معادلات خطية من خلال المثال التالي:

مثال (2):

الصيغ الآتية:

$$-x_1 + x_2 + 5x_3 = -4$$

$$4x_1 - x_2 - 3x_3 = 3$$

تمثل نظاماً خطياً يحتوي على معادلتين بثلاث متغيرات، إن قيم المتغيرات

$$x_1 = 1 \text{ ، } x_2 = 2 \text{ ، } \quad x_3 = -1$$

هي حل للنظام، لأنها تحقق كلاً المعادلتين أما

$$x_1 = 1 \text{ و } x_2 = 8 \text{ و } x_3 = 1$$

فهي ليست حلاً لأنها لا تحقق كلا المعادلتين.

ومن الجدير بالذكر أن بعض الأنظمة ليس لها حلاً، مثال ذلك.

$$x + y = 6$$

$$2x + 2y = 10$$

والسبب هو عند ضرب المعادلة الثانية في 1/2 نحصل على النظام الآتي:

$$x + y = 6$$

$$x + y = 5$$

والتي تناقض إحداهما الأخرى.

يسمى النظام الخطي الذي له على الأقل حل واحد فقط، بالنظام المتسق والذي ليس له حل يسمى نظام غير متسق.

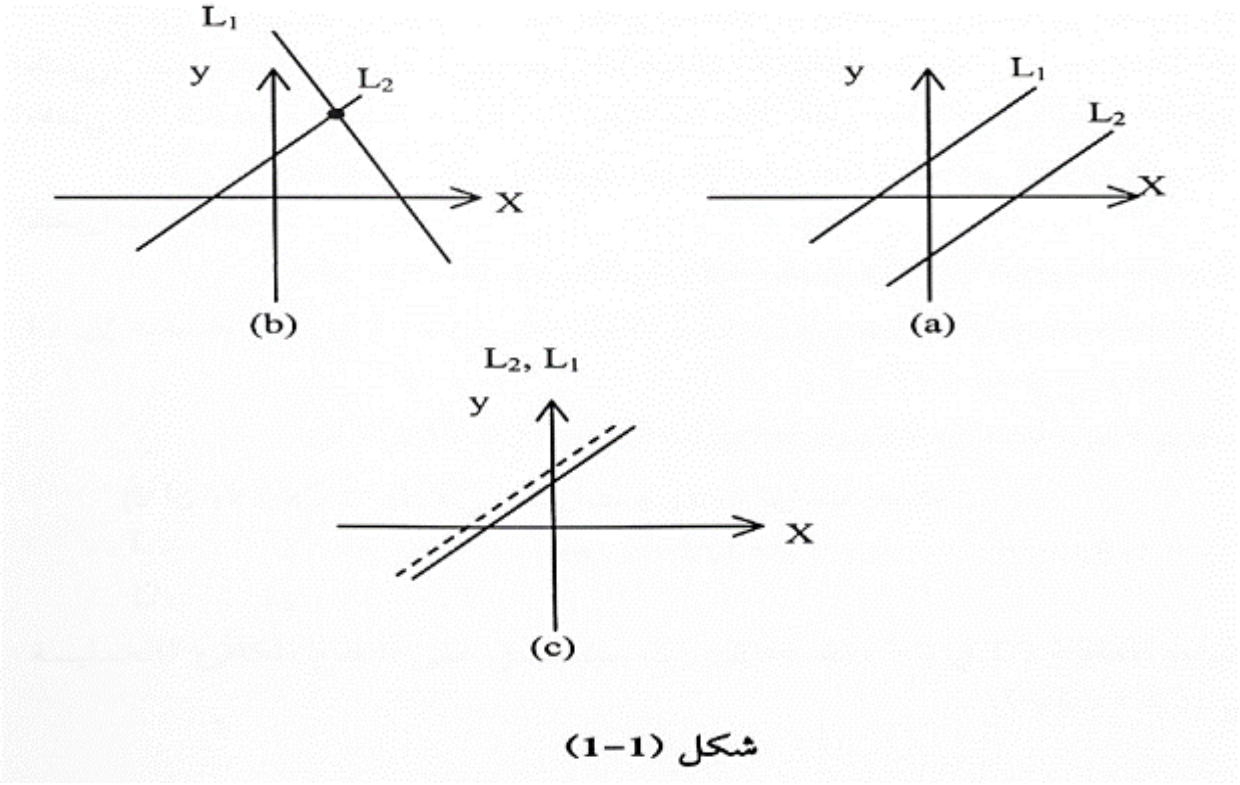
4-4-المعنى الهندسي للنظام الخطي

يمثل النظام الخطي العام المتكون من معادلتين خطيتين بمتغيرين x و y بالصيغة الآتية:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

إن الشكل الهندسي لهذه المعادلات هو الخطوط المستقيمة L_1 و L_2 كما في الشكل (1-1) ولما كانت النقطة (x،y) تقع على المستقيم إذا وفقط إذا كانت x و y تحقق معادلة المستقيم، فإن حلول النظام الخطي تقابل المستقيمين L_1 و L_2 كما موضح في الشكل (1-1).



شكل (1-1)

من خلال الشكل (1-1) يتضح أن هناك ثلاث احتمالات للحلول وهي:

1- المستقيمان L2، L1 متوازيان، أي لا يوجد نقطة تقاطع، وعليه فليس للنظام الخطي حل [شكل a(1-1)].

2- المستقيمان L2، L1 يتقاطعان بنقطة، وهذا يعني أن النظام الخطي له حل واحد فقط [الشكل (1-b(1)].

3- المستقيمان متطابقان، اي يوجد عدد غير محدود من الحلول [شكل c(1-1)].نستنتج من ذلك أن أي نظام خطي إما ليس له حل او له حل واحد فقط أو له عدد غير منتهي من الحلول.

4-5-تعريف نظام المعادلات الخطية

تسمى المجموعة المنتهية المتكونة من m من المعادلات الخطية، التي تحوي على n من المتغيرات xn،...،، x2، x1 نظام المعادلات الخطية. وتسمى أيضاً بالنظام الخطي. اما المتتابعة المتكونة من n من الأعداد الحقيقية sn، ...، s2، s1 = xn حلاً لكل معادلة من النظام الخطي.

ويمكن كتابه النظام الخطي المتكون من m من المعادلات التي تحتوي على n من المتغيرات بالصيغة:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_n = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_n = c_2$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = c_m$$

إذ أن x_n، ...، x_2، x_1 هي متغيرات و a_{mn} .... ، ... a_{11},a_{12} ثوابت وحيث:

$$i=1،2،.....،m \quad ، \quad j=1،2،....n$$

6-4-طرق حل أنظمة المعادلات الخطية

أولا:الطريقة الأساسية لحل نظام معادلات خطية تكون باستبدال نظام معطى بنظام جديد يمتلك مجموعة الحل نفسها ولكن أسهل في الحل. يتم الحصول على هذا النظام الجديد بسلسلة خطوات بتطبيق ثلاث أنواع من العمليات وذلك لحذف المجاهيل:

1- تبادل معادلتين لبعضهما الاخرى.

2- ضرب معادلة ما بثابت غير صفري.

3- جمع مضاعف إحدى المعادلات إلى أخرى.

مثال (3):

حل النظام الخطي الآتي:

L_1:x-5y+2z=13

L_2:3x-14y+3z=29 .....(1)

L_3:4x-12y+3z=35

الحل:

1- ضرب المعادلة L1 في 3- ونضيف حاصل ضرب للمعادلة L2.

نرمز لهذه العملية بالرمز L2 + 3L1-، كذلك نضرب L1 في 4- ونضيفه إلى L3 (أي أن العملية هي L3 + 4L1-).

وبموجب هاتين العمليتين سنحصل على النظام المكافئ الآتي:

L'_1:x-5y+2z=15

L'_2: y-3z=10 .....(2)

L'_3: 2y-5z=-17

2-نضرب المعادلة L2 في 2- ونضيفه إلى L'2 ، سنحصل على النظام المكافئ (العملية هي L'23 + 2L'2-).

L''_1: x-5y+2z=15

L''_2: y-3z=-10 .....(3)

L''_3: z=3

من L"3 نحصل على z = 3 وبتعويضها في L"2 نحصل على y = -1 وأخيراً نعوض عن y،z في L"1 فنحصل على x = 2، أي أن مجموعة الحل هي: (3 ، 1- ، 2) لاحظ أن النظام الخطي (3) يكافئ النظام (1) . ويسمى النظام (3) نظام خطي بالصيغة المدرجة صفياً.

مثال (4):

حل النظام الخطي الآتي:

x+y+2z=7

2x+y-3z=-2

3x+y-2z=1

الحل:

باعتماد أسلوب المثال 3 نفسه:

الخطوة(1): نضرب الأولى بـ 2 ونجمعها مع الثانية ثم نضربها بـ 3 ونجمعها مع الثالثة سنحصل على النظام الخطي المكافئ الآتي:

y+7z=14

2y+8z=20

الخطوة(2):نضرب المعادلة الاوالى في النظام الأخير بـ 24 ونجمع مع الثانية نحصل:

6z=12

بتعويض قيمة z في احدي المعادلتين من النظام الأخير نحصل على:

y =2

بتعويض قيمتي x,y في احدى المعادلات من النظام االاول نحصل :

x=1

اذا: x=1,y=2,z=2 هو حل نظام المعادلات الخطي، باتعويض هذه القيم في المعادلات السابقة نجد انه يحولها الى متطابقات (أي انه الحل للنظام).

ملاحظة:

إذا كانت cn، ....، c1،c2 في النظام الخطي (1) تساوي أصفاراً فإن النظام هذا يسمى بالنظام المتجانس ، اما إذا كانت الثوابت cn، ...، c2، c1 لا تساوي أصفار فإن النظام الخطي يسمى بالنظام غير المتجانس.

مثال (5):

حل النظام الخطي المتجانس الآتي:

$$x+2y-3z+w=0$$

$$x-3y+z-2w=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

$$3x+y-3z+5w=0$$

الحل: نظام المعادلات السابق (5) هو عبارة عن ثلاث معادلات متجانسة بأربع متحولات مجهولة

بتحويل هذا النظام للشكل المدرج صفياً باستخدام طريقة المثال (2) نحصل على النظام المكافئ.

$$x + w = 0$$

$$y + 7w = 0$$

$$z + 6w = 0$$

وبفرض w = t وتعويضها في المعادلات أعلاه نحصل على الحلول:

$$X = 11t \quad ، \quad y = -7t \quad ، \quad Z = -6t \quad ، \quad W = t$$

ثانيا: طريقة المصفوفة:

يمكن وضع الثوابت في النظام الخطي (1) بالصيغة:

العمود 2 العمود n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots\, c_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & \vdots\, c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\, \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots\, c_m \end{bmatrix} \quad (6)$$

الصف اول

الصف m

إذ أن a_{ij} هي أعداد حقيقية تمثل معاملات المتغيرات و c_i تمثل الثوابت في الطرف الأيمن من النظام (1). تسمى الخطوط الأفقية صفوفاً، أما الخطوط العمودية فتسمى أعمدة، ويقال للصيغة (6) ، المصفوفة الممتدة.

مثال (6):

يمكن وضع ثوابت النظام الخطي الواردة في (1) بصيغة مصفوفة ممتدة على النحو الآتي

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & \vdots & 13 \\ 3 & -14 & 3 & \vdots & 29 \\ 4 & -18 & 3 & \vdots & 35 \end{array}\right]$$

وبما أن الصفوف الواردة في المصفوفة الممتدة تقابل المعادلات الواردة في النظام الخطي للمثال (3)، فإن التعليمات الثلاث المستخدمة في طريقة حل المعادلات الخطية تكافئ العمليات المستخدمة على صفوف المصفوفة الممتدة الآتية:

1- ضرب أي صف بكمية ثابتة غير صفرية.

2- تبديل أي صفين أحدهما مكان الآخر.

3- إضافة مضاعف أحد الصفوف لصف آخر.

وتسمى هذه العمليات، عمليات الصف البسيطة.

مثال (7):

حل النظام الخطي الوارد في المثال (3) باستخدام عمليات الصف البسيطة.

الحل:

1. المصفوفة الممتدة للنظام هي:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & \vdots & 13 \\ 3 & -14 & 3 & \vdots & 29 \\ 4 & -18 & 3 & \vdots & 35 \end{array}\right]$$

2. نضرب الصف الأول في 3- ونضيفه إلى الصف الثاني. كذلك نضرب الصف الأول في -4 ونضيفه للصف الأول ولذلك سوف نحصل على المصفوفة الممتدة المكافئة الآتية:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & \vdots & 13 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -10 \\ 0 & 2 & -5 & \vdots & -17 \end{array}\right]$$

3. بضرب الصف الثاني في 2- وإضافته للصف الثالث سنحصل على المصفوفة الممتدة المكافئة:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & \vdots & 13 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

الصيغة التي حصلنا عليها تسمى الصيغة المدرجة التي تقابل النظام الخطي المكافئ:

$$x - 5y + 2z = 13$$

$$y - 3z = -10$$

$$z = 3$$

وبالتعويض عن قيمة z نحصل على الحل:

Z=3 ، y=1 ، x=2

تمارين للحل

1- حل نظام المعادلات الخطي:

2x-4y=8
x+2y=0

(الحل:2=z,y=1,x)

2- *حل نظام المعادلات الخطي*:

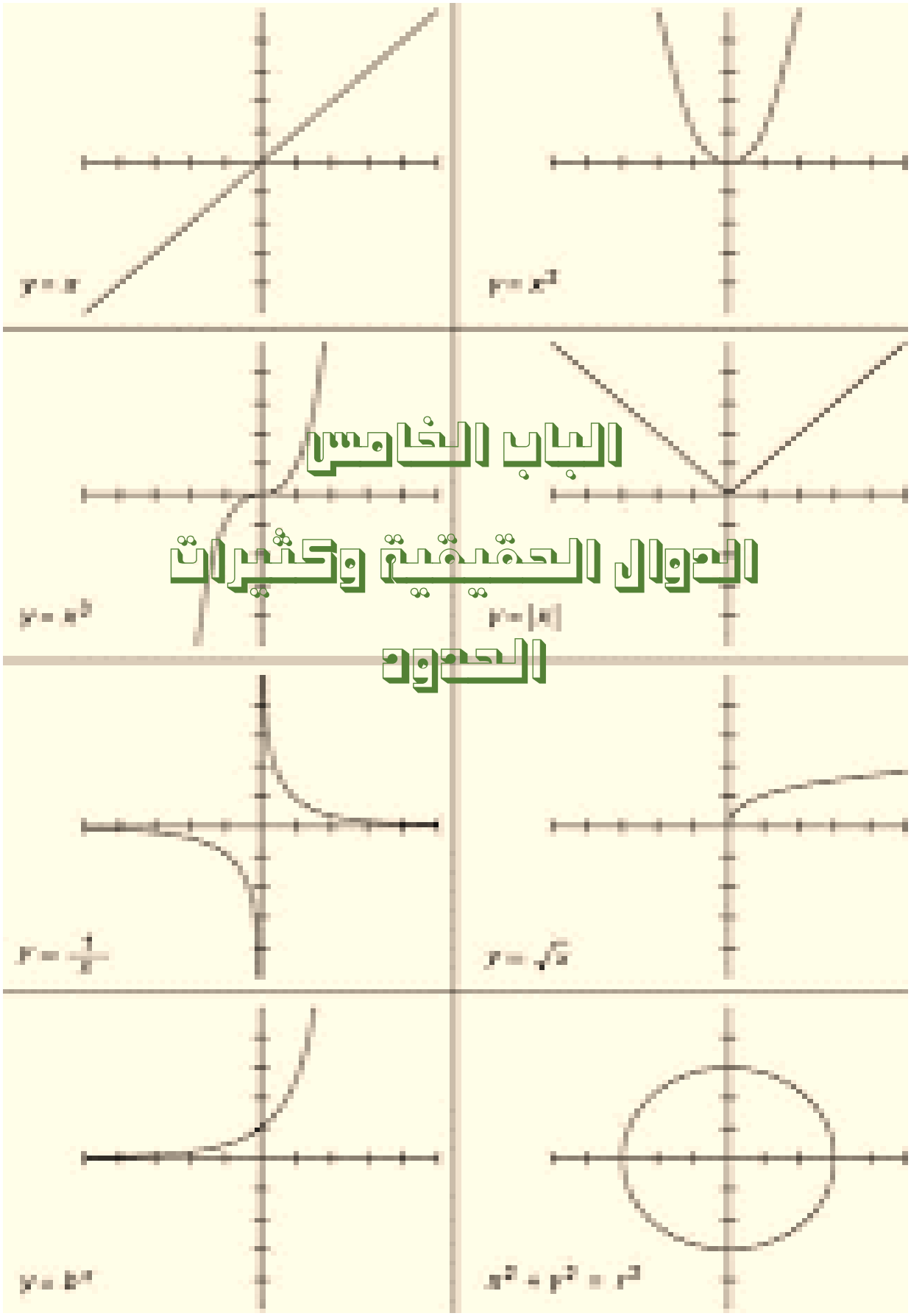
2x+y-z=2
2x+2y+4z=24
x-2y-z=-6

(الحل: x=2,y=2,z=4)

3- حل نظام المعادلات الخطي:

X+3y-2z=5
X-y+2z=-3
3x+2y+z=1

(الحل: x=-2,y=3,z=1)



الباب الخامس

الدوال الحقيقية وكثيرات الحدود

أهداف التعلم: في نهاية هذا الفصل، يجب أن يكون الطالب قادراً على

1. فهم تعريف الدالة الرياضية.
2. معرفة خواص وميزات الدوال الحقيقية.
3. معرفة أنواع الدوال الحقيقية.
4. القدرة على التمثيل البياني للدالة الحقيقية.

مواضيع الباب

1. الدوال الحقيقية
2. خواص الدالة الحقيقية.
3. أنواع الدوال الحقيقية.
4. تمثيل الدوال.

1-5 الدوال الحقيقيّة *Real Functions*:

من المفاهيم الهامّة جداً في دراسة الرياضيات ما يُعرف باسم "**الدالّة**"، حيث يأتي هذا المفهوم في المرتبة الثّالثة من حيث الأهمية بعد مفهوم المجموعة. إنَّ التقديم الآتي يمهّد لنا الطريق للتعرّف على هذا المفهوم.

لنأخذ A وB مجموعتين غير خاليتين، ولتكن f علاقة تُقرن كلّ عنصر a من A بعنصر b من B يُدعى **قيمة** (**أو صورة**) a وفقاً لـ f، ويُرمز لذلك بالشكل afb أو بأحد العرضين الآتيين أيضاً:

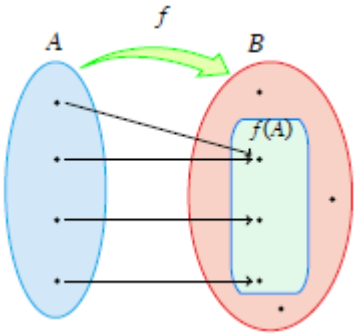
$$f: A \longrightarrow B \;;\; a \mapsto b = f(a) \quad \text{أو} \quad A \xrightarrow[a \mapsto b=f(a)]{} B$$

عندئذٍ يُطلق على هذه العلاقة اسم "**تطبيق** Map **من** المجموعة A **في** المجموعة B. أمَّا المجموعة A فإنَّها تُدعى **مجال** Domain التطبيق f، في حين يُطلق على المجموعة B اسم "**المجال المقابل** Codomain" للتطبيق f **(وتوجد تسميات أخرى لهاتين المجموعتين في بعض المراجع العربية مثل: منطلق أو مجموعة تعريف أو نطاق بدلاً من كلمة مجال، واستخدام كلمة المُستقر أو النطاق المرافق أو النطاق المصاحب بدلاً من كلمة المجال المقابل)**، وإذا وضعنا:

$$f(A) := \{b \in B \mid b = f(a); \forall a \in A\} \subset B$$

فعندئذٍ يُطلق على المجموعة $f(A)$ اسم "**مدى** Range التطبيق f" أو "**صورة** Image التطبيق f " وسنرمز لمدى التطبيق f بـ $\mathbf{R}(f)$ (**انظر الشكل**)، أي أنَّ:

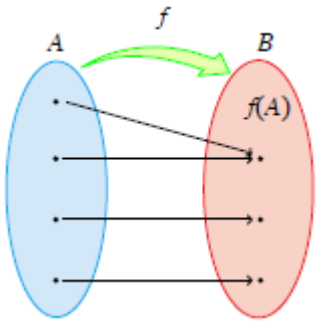
$$\mathbf{R}(f) := f(A)$$



تطبيق f **من** A **في** B.

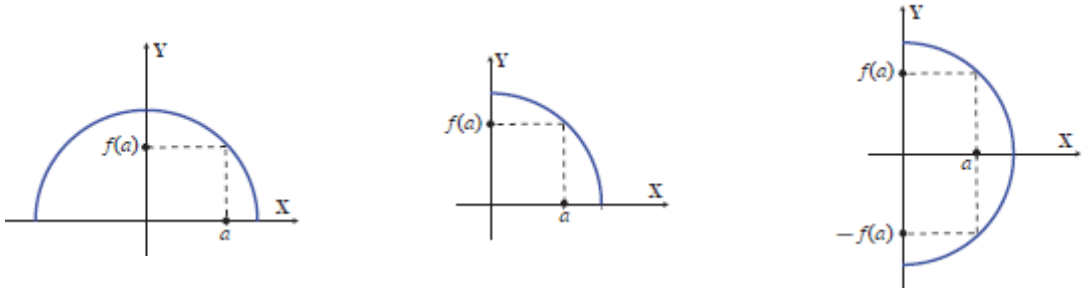
2-5-ملاحظات

1- في الحالة الخاصّة إذا كانت $f(A) = B$ فعندئذٍ يُقال إنَّ f تطبيق **من** المجموعة A **على** المجموعة B (**انظر الشكل**)، وفي هذه الحالة يكون المدى $\mathrm{R}(f)$ مساوياً للمجال المقابل.



تطبيق f **من** A **على** B

2- إنَّ مجموعة كلّ النقاط $\big(a\ ,\ f(a)\big)$ وعندما a تمسح كلّ القيم الممكنة لها في A تُدعى التمثيل البياني للتطبيق f ، فعلى سبيل المثال نجد أنَّ العروض الآتيّة هي تمثيلات بيانية لتطبيقات:



الشكل [a] الشكل [b] الشكل [c]

3- يُقال عن تطبيق f إنَّه **وحيد القيمة** Single Value إذا كان كلّ عنصر من مجاله يرتبط بعنصر وحيد من مجاله المقابل كما فيالشكلين ***a,b***

3-5 تعريف (الدالَّة الحقيقيّة *Real Function*)

لتكن A مجموعة ما غير خالية، ولنأخذ:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ a \mapsto b = f(a)$$

تطبيقاً وحيد القيمة. عندئذٍ يُدعى هذا التطبيق **دالَّة حقيقيّة**.

في العروض البيانية السابقة نجد أنَّ الشكلين [a] و[b] يقدِّمان تمثيلين بيانيين لدالَّتين في حين أنَّ الشكل [c] هو تمثيل بياني لتطبيق ولكنَّه ليس تمثيلاً بيانياً لدالَّة

ملاحظة: في معظم الحالات تُستخدم الأحرف اللاتينية كرموز للدوال فيُكتب على سبيل المثال: $f, g, h, \ldots$ أو $F, G, H, \ldots$، وكذلك يُرمز لعناصر مجال الدالّة لهذه الدوال بأحرف لاتينية صغيرة من قبيل $x, y, z, \ldots$ وتُدعى **متغيّرات مستقلَّة**، وأمَّا القيمة من B والموافقة لـ $f(x)$ فإنَّها تُسمَّى **قيمة الدالَّة** f عند القيمة x (**أو النقطة**) ، ومن المهمّ جداً هنا التمييز بين الدالَّة f التي تمثِّل علاقة وقيمتها $f(x)$ التي تمثِّل عدداً.

5-4-اشكال الدوال

أولاً الدالة الضمنية: الدالة الضمنية دالة رياضية تمثل اقترانا ضمنيا، وتكون الدالة ضمنية إذا كان المتغير التابع والمستقل في طرف واحد من المعادلة مثل:

$x^2+y^2=25$ (وهي معادلة دائرة نصف قطرها 5)

$4x+12y-7z=30$ (وهي معادلة خطية)

ثانياً الدالة الصريحة: دالة صريحة ، إذا ظهر المتغير التابع للدالة في أحد طرفي معادلة وكان المتغير المستقل في الطرف الآخر كانت الدالة صريحة مثل:

$y=5x^3+7x^2-2$ (وهي دالة كثيرة حدود)

5-5-تصنيفات الدوال

إذا كانت f دالَّة معرَّفة على مجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في مجموعة $B \subseteq \mathbb{R}$، فعندئذٍ يُقال عن الدالَّة f إنَّها:

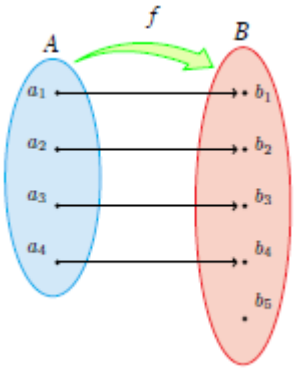
أولاً:متباينة أو **دالَّة واحد لواحدٍ** (**انظر الشكل** [a1] **ادناه**) إذا كانت هذه الدالَّة مُحقِّقةً للقضية الآتيّة:

$$f(a)=f(b) \Rightarrow a=b \quad ;\forall a,b\in A$$

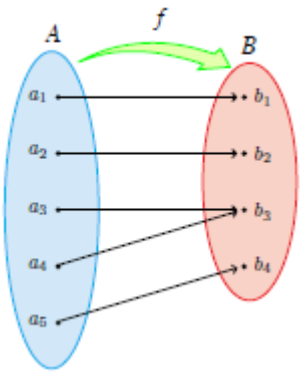
ثانياً:غامرة (**انظر الشكل** [b1] **ادناه**) إذا كانت هذه الدالَّة مُحقِّقةً للقضيّة الآتيّة:

$$\forall b\in B \ \exists a\in A \mid b=f(a)$$

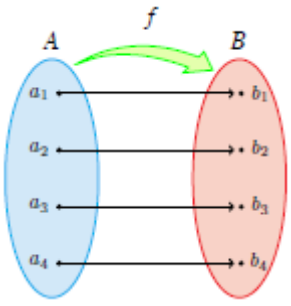
ثالثاً:تقابل (**انظر الشكل** [c1] **ادناه**) **إذا وفقط إذا** كانت هذه الدالَّة متباينةً وغامرةً في آنٍ واحد.



الشكل [a1]



الشكل [b1]



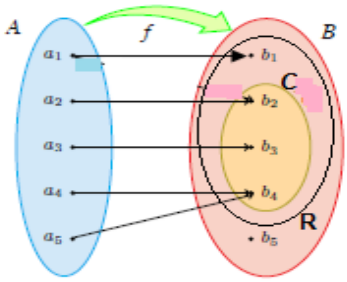
الشكل [c1]

5-6- مفهوم الدالة العكسية

إذا كانت f دالّة معرَّفة على مجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$ وتأخذ قيمها في مجموعة $B \subseteq \mathbb{R}$ (أي أنَّ f **دالّة حقيقيّة معرَّفة على** A)، فعندئذٍ تُعرَّف الصورة العكسيّة لمجموعة $C \subseteq B$ وفقاً للدالّة f على أنَّها مجموعة كلّ العناصر a من A التي من أجلها تكون $f(a) \in C$ ، ويرمز لها عادة بـ $f^{-1}(C)$ ، أي أنَّه لدينا:

$$f^{-1}(C) := \{ a \in A \mid f(a) \in C \}$$

وهي مجموعة جزئيّة من A، فعلى سبيل المثال لو أخذنا الدالّة f المقدَّمة في الشكل .



فعندئذٍ نجد أنَّ مدى هذه الدالّة هو $R(f) = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ ، ولدينا:

$$f^{-1}(\{b_1\}) = \{a_1\} \quad \& \quad f^{-1}(\{b_2\}) = \{a_2\}$$
$$f^{-1}(\{b_3\}) = \{a_3\} \quad \& \quad f^{-1}(\{b_4\}) = \{a_4, a_5\}$$
$$f^{-1}(C) = \{a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

لاحظ أنَّ الصورة العكسيّة لمدى أيّة دالّة هي مجال الدالّة كاملاً حيث لدينا من أجل المثال الأخير ما يلي:

$$f^{-1}(f(A)) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\} = A$$

5-7-أنواع الدوال

أولا:أنواع الدوال من حيث عدد المتغيرات :

-الدوال ذات المتغير المستقل الواحد مثل:

$$Y = f(x)$$

مثل العلاقة بين الدخل والإنفاق

-الدوال ذات متغيرين مستقلين مثل:

$$Z = f(x,y)$$

مثل مساحة المستطيل

-الدوال ذات ثلاثة متغيرات مستقلة

$$u = f(x,y,z)$$

مثل حجم متوازي المستطيلات

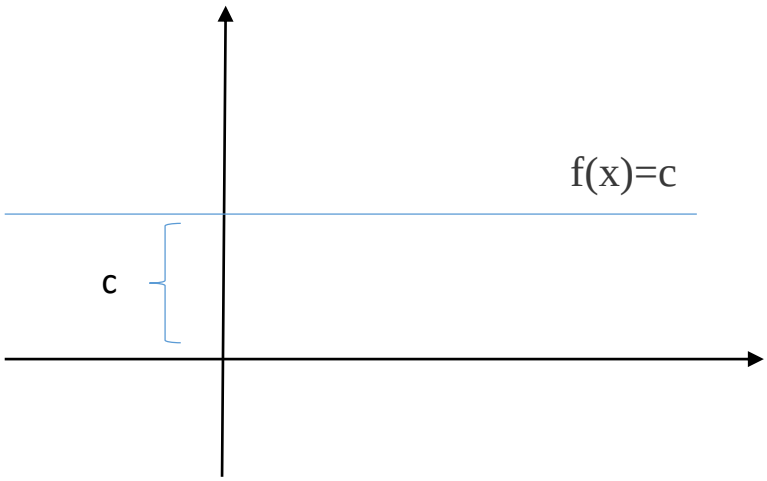
ثانيا: الدوال بمتغير واحد:

سوف ندرس في هذا المقرر الدوال بمتغير واحد ولكثيرة أنواعها سوف نركز على الأنواع الشهيرة والبسيطة فقط.

1- الداله الثابتة

يقال للداله f بأنها داله ثابتة إذا كان مداها مكون من عدد ثابت c أي أن قاعدة تعريفها هي :

$f(x)=c$ ($c \in R$ حيث).

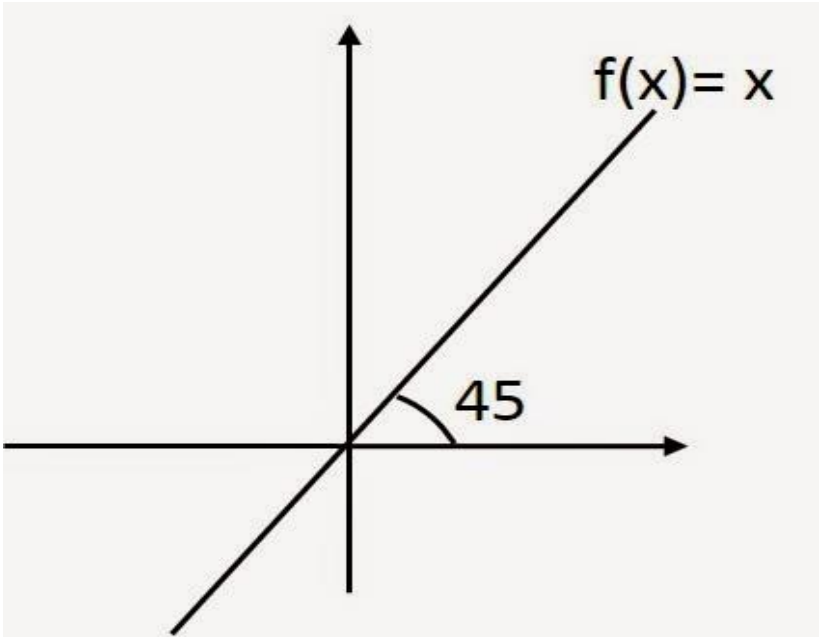


3- دالة التطابق

لتكن $A \subseteq R$ ، ولنأخذ f دالّة حقيقيّة معرَّفة على A يقال للداله $f : A \to R$ بحيث تُقرن كلّ عنصر x من A بعدد حقيقي y مُعطى من خلال العلاقة الآتيّة:

$y=f(x)=x \quad , \quad \forall x \in A$

أي إذا كانت صورة كل عنصر في المجال A، هو العنصر نفسة في المدى تسمى هذه بدالة التطابق وتمثيلها كما في الشكل :



وهو عبارة عن خط مستقيم يمر بنقطة الأصل ويميل على الأفقي بزاوية 45 ونطاقها أي مجموعة تعريفها تساوي مجموعة الأعداد الحقيقية ، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية ، إلا في حال التعريف على مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية .

3- الدالَّة الخطيّة *Linear Function*

لتكن $A \subseteq R$، ولنأخذ f دالَّة حقيقيّة معرَّفة على A بحيث تُقرن كلّ عنصر x من A بعدد حقيقي y مُعطى من خلال العلاقة الآتيّة:

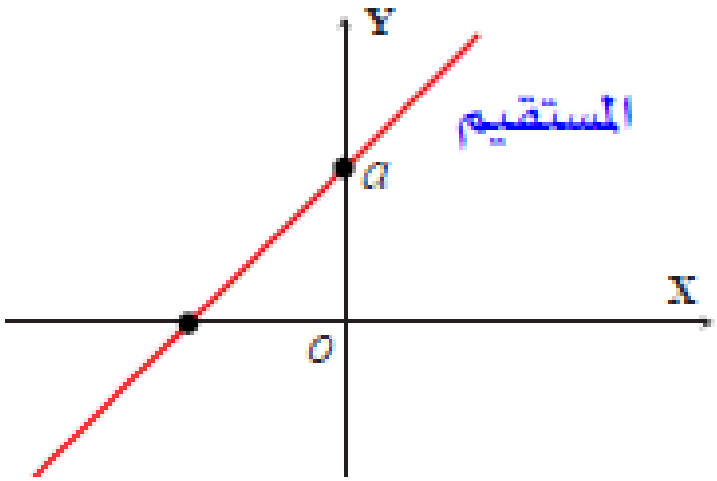
$$y = f(x) := a + bx$$

علماً أنَّ a وb ثابتان حقيقيان. عندئذٍ يُقال عن هذه الدالَّة إنَّها **دالَّة خطيّة** على المجموعة A.

وهو عبارة عن خط مستقيم يمر بنقطة الأصل ويميل على الأفقي بزاوية 45 ونطاقها أي مجموعة تعريفها تساوي مجموعة الأعداد الحقيقية ، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية ، إلا في حال التعريف على مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية

ملاحظات

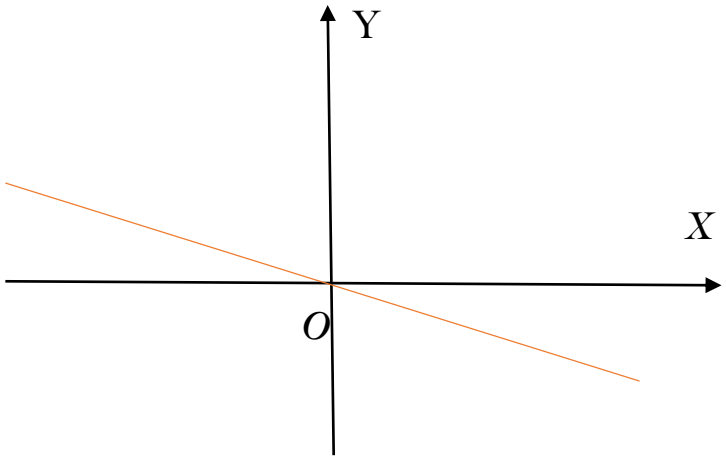
1- إنَّ التمثيل البياني للدالَّة الخطيّة هو مستقيم، ويُقال حينئذٍ عن b إنَّه ميل المستقيم (ويساوي ظل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع محور الإحداثيّات OX)، في حين تمثِّل النقطة a تقاطع هذا المستقيم مع محور القيم OY (انظر الشكل)



2- في الحالة الخاصّة عندما تكون قيمة الثابت $a = 0$ فإنَّه يصبح للعلاقة السابقة العرض الآتي:

$$y = f(x) = bx$$

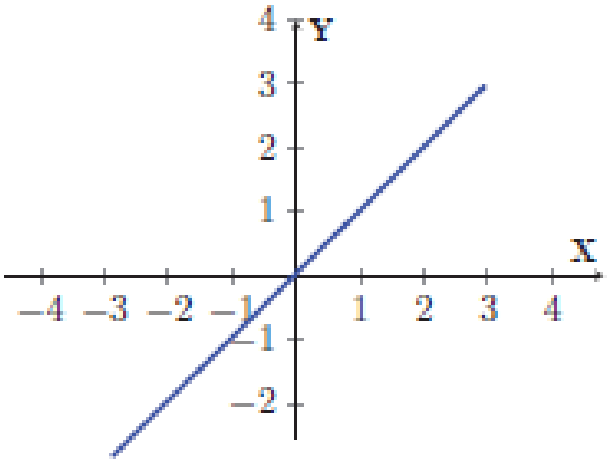
والشكل البياني لهذه الدالة



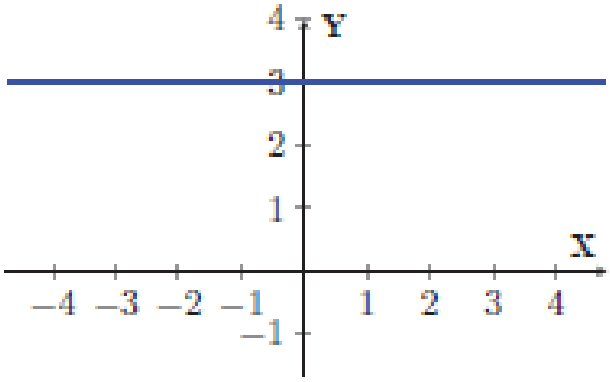
حيث نلاحظ في هذه الحالة أنَّ المستقيم الممثِّل لهذه المعادلة يمرّ من نقطة الأصل (**أو من مبدأ الإحداثيات**) **O**، فعلى سبيل المثال لو اخذنا f دالَّة حقيقيّة معرَّفة على R من خلال العلاقة الآتيّة:

$$y = f(x) = x$$

فعندئذٍ نجد أنَّ ميل المستقيم الممثِّل لهذه المعادلة هو $b=1$، وأمّا تقاطعه مع محور القيم **OY** فإنَّه يوافق $a = 0$، ومن ثمَّ يكون للمستقيم الممثِّل لهذه المعادلة الشّكل الآتي:



3- إذا كان $b=0$ في المعادلة $y=f(x):=a+bx$ فإنَّه يصبح للعلاقة *السابقة* الصيغة $y=f(x)=a$، وفي هذه الحالة يصبح المستقيم الممثِّل لهذه المعادلة موازياً للمحور الإحداثي **OX** ومارّاً بالنقطة a على محور القيم **OY**، وحينئذٍ يطلق على هذه الدالَّة اسم "**الدالَّة الثابتة** Constant Function"، فعلى سبيل المثال لو أخذنا f دالَّة حقيقيّة معرَّفة على R من خلال العلاقة $f(x)=3$ ، فعندئذٍ نجد أنَّ ميل المستقيم الممثِّل لهذه المعادلة هو $b=0$، وأمّا تقاطعه مع محور القيم **OY** فإنَّه يساوي 3، ومن ثمَّ يكون للمستقيم الممثِّل لهذه المعادلة الشّكل الآتي:

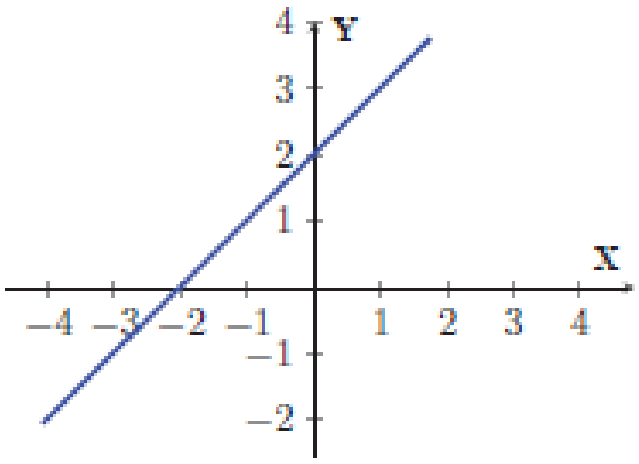


أمثلة

1- لتكن f دالَّة حقيقيّة معرَّفة على R من خلال العلاقة الآتيّة:

$$y=f(x)=2+x$$

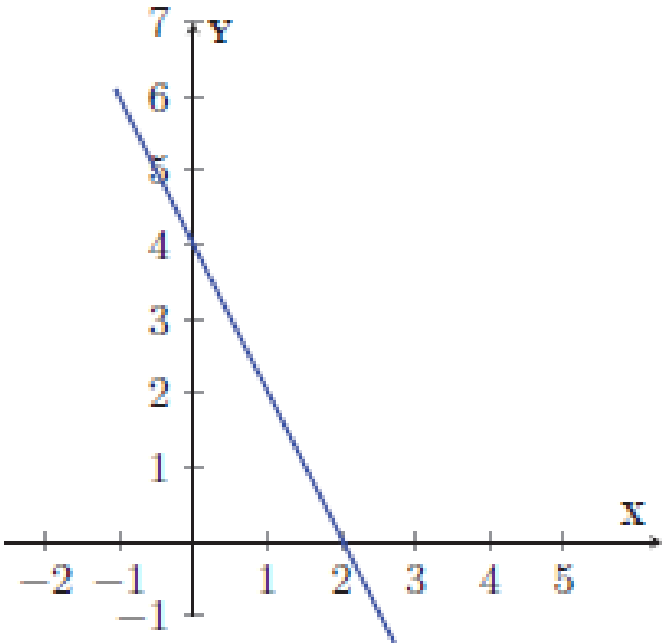
فعندئذٍ نجد أنَّ ميل المستقيم الممثِّل لهذه المعادلة يساوي 1، وأمّا تقاطعه مع محور القيم **OY** فإنَّه يوافق $a=2$، ومن ثمَّ يكون للمستقيم الممثِّل لهذه المعادلة الشّكل الآتي:



2- لتكن f دالَّة حقيقيّة معرَّفة على R من خلال العلاقة الآتيّة:

$$y = f(x) = 4 - 2x$$

فعندئذٍ نجد أنَّ ميل المستقيم الممثِّل لهذه المعادلة سالب ويساوي 2-، وأمّا تقاطعه مع محور القيم **OY** فإنَّه يساوي 4، ومن ثمَّ يكون للمستقيم الممثِّل لهذه المعادلة الشّكل الآتي:



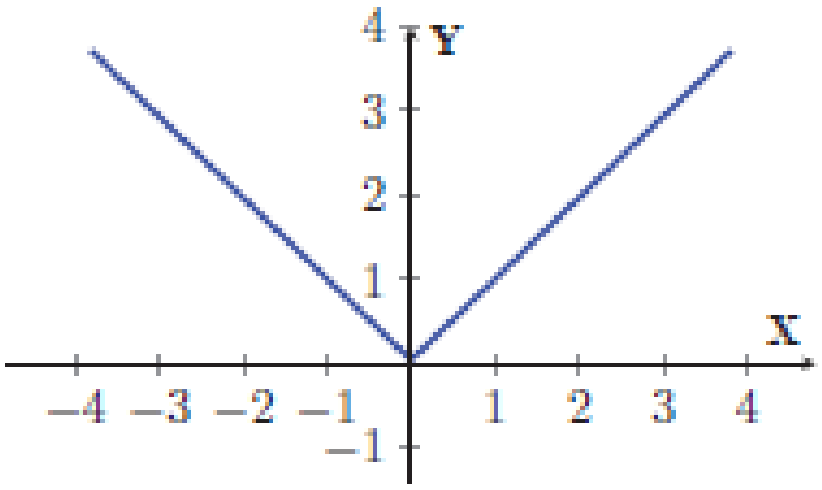
من المثالين السّابقين يُلاحظ أنَّه عندما تكون قيمة الميل موجبة في المعادلة الخطيّة فإنَّه سيكون للمستقيم الممثِّل للمعادلة الخطيّة اتجاه صاعد لدى تزايد قيم x. وعلى العكس، فإذا كانت قيمة الميل سالبة في المعادلة الخطيّة فإنَّه سيكون للمستقيم الممثِّل للمعادلة الخطيّة اتجاه هابط لدى تزايد قيم x.

4 دالَّة القيمة المطلقة Absolut Value Function

لتكن $A \subseteq \mathbb{R}$، ولنأخذ f دالَّة حقيقيّة تُقرن كلّ عدد حقيقي x من A بعدد حقيقي غير سالب يُرمز له بـ $|x|$، ومُعرَّف على النّحو الآتي:

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; x \mapsto f(x) = |x| := \begin{cases} +x & for\ x \geq 0 \\ -x & for\ x < 0 \end{cases}$$

إنَّ هذه الدالَّة تُدعى **دالَّة القيمة المطلقة**، والعرض البياني لهذه الدالَّة يقدّمه الشكل الآتي:



ملاحظة

ليكن x وy عددين حقيقيين، فعندئذٍ يمكن للقارئ التّحقُّق من صحة العلاقات الآتيّة:

a) $|x| \geq 0$ **&** $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $|x| = |-x|$

c) $|x+y| \leq |x| + |y|$

d) $|x-y| \geq |x| - |y|$

e) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

أمثلة

لدينا:

a) $|7| = 7 \quad \& \quad |-5| = 5$

b) $\left.\begin{matrix} |3+5| = |8| = 8 \\ |3| + |5| = 3 + 5 = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow |3+5| = |3| + |5|$

c) $\left.\begin{array}{l} |3+(-5)| = |3-5| = |-2| = 2 \\ |3|+|-5| = 3+5 = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow |3+(-5)| < |3|+|-5|$

d) $\left.\begin{array}{l} |7-3| = |4| = 4 \\ |7|-|3| = 7-3 \end{array}\right\} \Rightarrow |7-3| = |7|-|3|$

e) $\left.\begin{array}{l} |3-7| = |-4| = 4 \\ |3|-|7| = 3-7 = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow |3-7| > |3|-|7|$

f) $\left.\begin{array}{l} |3\times 7| = |21| = 21 \\ |3|\cdot|7| = 3\times 7 = 21 \end{array}\right\} \Rightarrow |3\times 7| = |3|\cdot|7|$

g) $\left.\begin{array}{l} |3\times(-7)| = |-21| = 21 \\ |3|\cdot|-7| = 3\times 7 = 21 \end{array}\right\} \Rightarrow |3\times(-7)| = |3|\cdot|-7|$

5- الدوال كثيرات الحدود

وتكتب على الصورة :

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_0 x^0 + a_0$$

ويقال بأنها كثيرة حدود من الدرجة n $(a_0 \neq 0)$ ، n عدد صحيح موجب

$$a_0, a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_n \in R$$

تسمى معاملات الدالة، وهي عبارة عن أعداد حقيقية ثابتة ، ونطاق (مجال ، أو مجموعة تعريف الدالة هي مجموعة الأعداد الحقيقية R) .

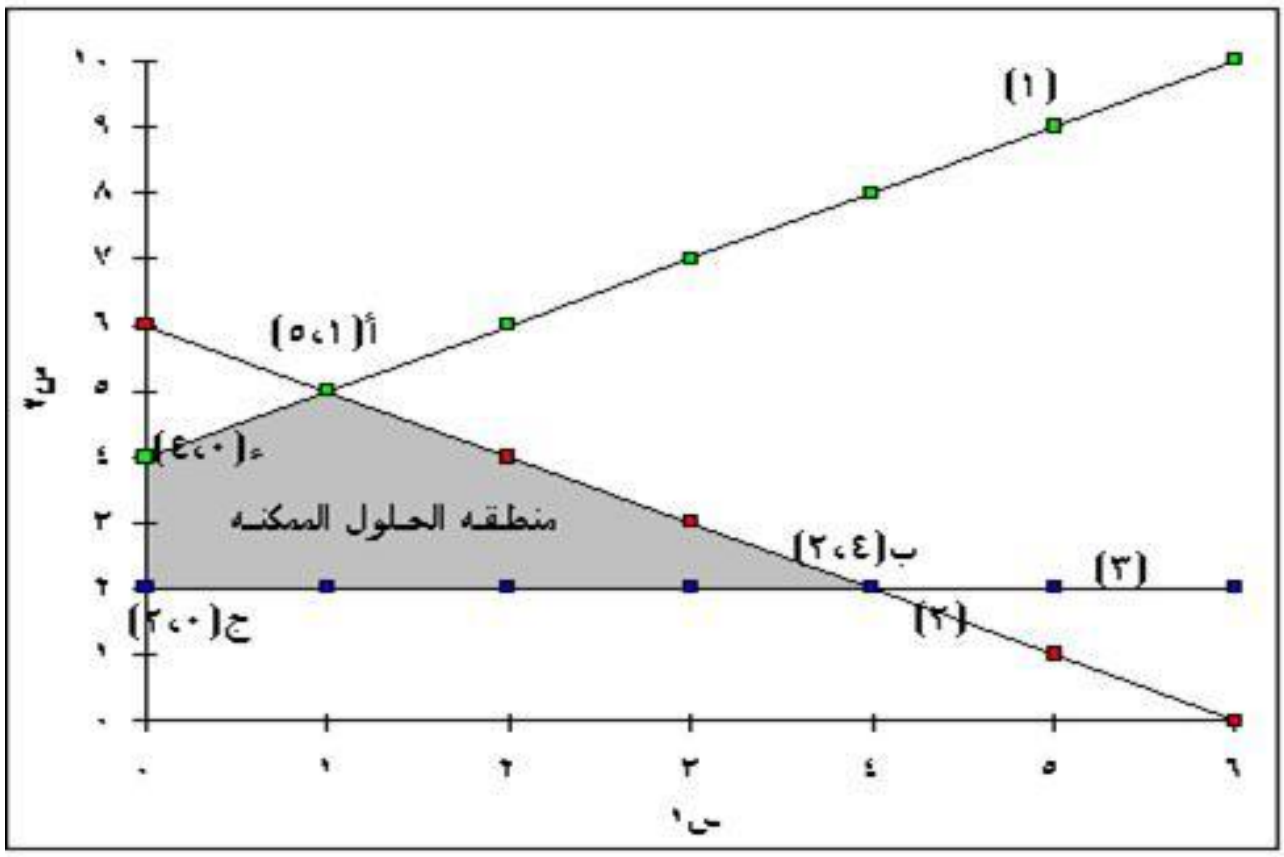
امثلة وتمارين

الباب السادس

البرمجة الخطية

أهداف التعلم: في نهاية هذا الفصل، يجب أن يكون الطالب قادراً على

1. فهم الافتراضات والخواص الأساسية للبرمجة الخطية.



مواضيع الفصل

1. متطلبات مسائل البرمجة الخطية.
2. كيفية تشكيل مسائل البرمجة الخطية.
3. الحل البياني.
4. حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام اكسل.

6-1- مقدمة

كثير من القرارات الإدارية تتعلق بكيفية الحصول على أكبر فائدة ممكنة من استخدام موارد المنظمة. البرمجة الخطية هي تقنية تستخدم النمذجة الرياضية لمساعدة المدراء في التخطيط وصنع القرار المتعلقان بتوزيع الموارد.

والجدير بالذكر أن كلمة البرمجة الواردة في تعبير "البرمجة الخطية" لا تشير إلى برمجة الكومبيوتر. وإنما المقصود إيجاد النموذج وحل المسألة رياضياً. وبنفس الوقت هذا لا يعني أنه لا يمكن حل مسائل البرمجة الخطية عن طريق برامج الكومبيوتر.

6-2- متطلبات مسائل البرمجة الخطية

الخاصية الأولى: وجود تابع هدف واحد. معظم المسائل تسعى نحو تعظيم أو تخفيض كمية ما مثل الربح أو التكلفة وهذا التعظيم أو التخفيض ندعوه تابع الهدف في مسألة البرمجة الخطية.

الخاصية الثانية: وجود قيد أو أكثر من القيود التي تترافق مع هدف المسألة. فمثلاً هناك قيود تحد من الانتاج منها القوى العاملة والآلات.

الخاصية الثالثة: مناهج بديلة للعمل، إذا كان هناك أكثر من منتج وليكن 3 منتجات، فقد تستخدم الإدارة البرمجة الخطية لكي تقرر كيفية توزيع الموارد المحدودة على المنتجات المختلفة.

الخاصية الرابعة: الخاصة الخطية، يجب التعبير عن الأهداف والقيود في مسائل البرمجة الخطية ضمن المعادلات والمتراجحات الخطية من الدرجة الأولى وليس من الدرجة الثانية أو الثالثة. مثلاً المعادلة:

$$2A + 5B = 10$$

هي معادلة خطية، بينما المعادلة

$$2A^2 + 5B^3 + 3AB = 10$$

ليست خطية لأن A مربعة و B مكعبة.

يشير تعبير "خطي" إلى الصفة النسبية والصفة الجمعية. النسبية تعني إذا كانت وحدة واحدة من الانتاج تحتاج 3 ساعات عمل فإن إنتاج 10 وحدات يحتاج 30 ساعة. يمكن شرح الجمعية من خلال المثال التالي. فمثلاً إذا كان إنتاج وحدة واحدة يعطي ربح قدره 3 ريالات وإنتاج وحدة واحدة أخرى يعطي ربح قدره 8 ريالات يكون لدينا الربح الكلي هو مجموع الربحين أي 11 ريالاً.

الخاصية الخامسة: شروط التأكد، تعني أننا متأكدين أن الأهداف والقيود معروفة ولا تتغير خلال فترة الانتاج.

الخاصية السادسة: القسمة، إذا كنا ننتج كراسي مثلاً وأنتجنا 4.5 كرسياً خلال أسبوع هذا يعني أننا أنتجنا أربعة كراسي والكرسي الرابع قيد الانتاج وقد انهينا 50% من صنعه والباقي سيتم صنعه في الفترة الانتاجية اللاحقة أي الأسبوع القادم.

الخاصية السابعة: عدم السلبية، جميع الأجوبة غير سلبية فمثلاً لا يمكن أن ننتج عدداً سالباً من الكراسي.

6-3- كيفية تشكيل مسائل البرمجة الخطية

يتم ذلك من خلال إنشاء نموذج رياضي لتمثيل المشكلة الإدارية. وتشكل المسألة باتباع الخطوات التالية:

1. الفهم الكامل للمشكلة الإدارية.

2. تحديد الأهداف والقيود
3. تحديد متغيرات القرار (مثلاً: كمية المنتج الأول، كمية المنتج الثاني .....)
4. استخدام متغيرات القرار لكتابة العبارات الرياضية المتعلقة بتابع الهدف و القيود.

مثال :شركة أثاث

تنتج هذه الشركة منتجات غالية الثمن، من هذه المنتجات لديها طاولات وكراسي. هناك تشابه بين المنتجين من حيث عدد ساعات العمل: النجارة المطلوبة وكذلك عدد ساعات عمل الطلاء. كل طاولة تحتاج 4 ساعات نجارة و ساعتين طلاء. كل كرسي يحتاج 3 ساعات نجارة و ساعة واحدة طلاء. خلال فترة الانتاج الحالية، هناك إمكانية لتوفير 240 ساعة نجارة و 100 ساعة طلاء. كل طاولة تباع تأني بربح قدره 70 ريال؛ كل كرسي يباع يأني بربح قدره 50 ريال.

تريد الشركة أن تتخذ قرار تحدد فيه عدد الطاولات وعدد الكراسي التي يجب إنتاجها بحيث تحصل على أفضل ربح ضمن الإمكانيات (الموارد) المتاحة. ترغب الشركة في حل هذه المشكلة باتباع أسلوب البرمجة الخطية.

نبدأ بتلخيص المعلومات اللازمة وحل هذه المشكلة. الجدول التالي يلخص المعلومات اللازمة:

الساعات المطلوبة لإنتاج وحدة واحدة			
القسم	طاولات t	كراسي k	الساعات المتاحة في هذا الأسبوع
النجارة	4	3	240
الطلاء	2	1	100
الربح للوحدة	70	50	

الخطوة التالية: نحدد الهدف والقيود. الهدف هو: تعظيم الربح. القيود هي:

1. **لا يمكن توفير أكثر من 240 ساعة نجارة.**
2. **لا يمكن توفير أكثر من 100 ساعة طلاء.**

نحدد متغيرات القرار كما يلي:

t= عدد الطاولات التي يجب إنتاجها في الأسبوع

k = عدد الكراسي التي يجب إنتاجها في الأسبوع

الآن نستطيع إيجاد تابع الهدف ضمن شروط عدد الطاولات وعدد الكراسي. نشكل تابع الهدف كما يلي: **تعظيم الربح = 70 t + 50 k**

الخطوة التالية: إنشاء علاقة رياضية تصف القيدين في هذه المسألة. إن الوقت المستخدم في قسم النجارة هو:

(4 ساعات لكل طاولة)x(عدد الطاولات المنتجة)+(3 ساعات لكل كرسي)x(عدد الكراسي المنتجة)

(k)x(3)+(t)x(4)

نشكل القيد الأول كما يلي:

الوقت المستخدم في النجارة ≤ الوقت المتاح للنجارة

4 t + k 3 ≤ 240 ساعة

نشكل القيد الثاني كما يلي:

الوقت المستخدم في الطلاء ≤ الوقت المتاح للطلاء

2 t + 1 k≤ 100 ساعة

كلا القيدان يمثلان الحد الأعلى لطاقة الانتاج و تأثير ذلك على الربح. فمثلاً، لا تستطيع الشركة انتاج 80 طاولة خلال فترة الانتاج لأن ذلك سيتعدى كلا القيدين. وكذلك الأمر لا تستطيع الشركة انتاج 50 طاولة و 10 كراسي خلال فترة الانتاج لأن ذلك سيتعدى القيد الثاني.

لا يمكن أن يكون عدد الطاولات أو عدد الكراسي سالباً أي t ≤ 0وk ≤ 0. وهذه تسمى قيود عدم السلبية. **يمكننا الآن التعبير عن المسألة رياضياً كما يلي:**

تعظيم الربح = 70 t+ 50 k

وهذه العبارة مرتبطة بالقيود التالية:

4 t + 3 k ≤ 240 ساعة (قيد النجارة)

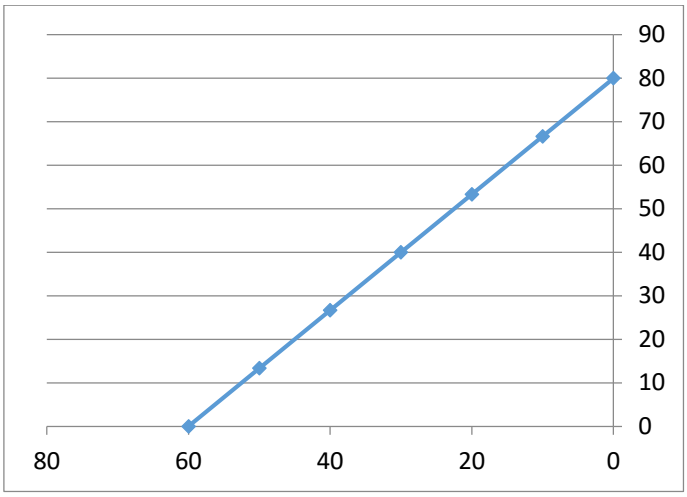
2 t + 1 k ≤ 100 ساعة (قيد الطلاء)

t ≤ 0 و k ≤ 0

6-4- الحل البياني لمسائل البرمجة الخطية

التمثيل البياني للقيود

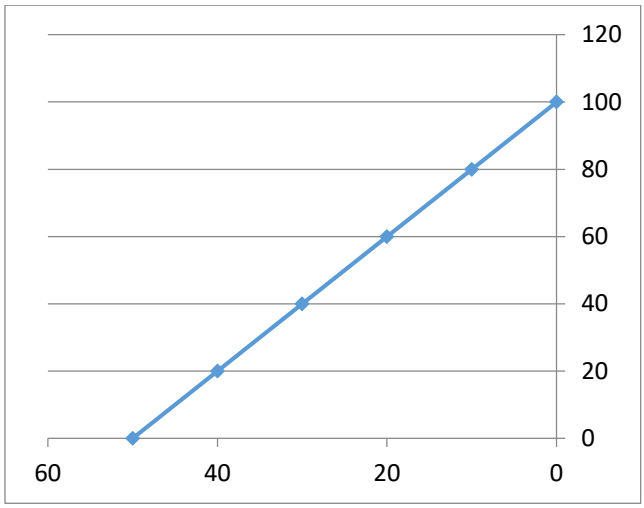
لتمثيل القيد الأول 4 t + 3 k ≤ 240 ساعة، يجب أولاً رسم المعادلة 4 t + 3 k = 240، وذلك بتعيين نقطتين، الأولى تقاطع خط المعادلة مع محور ط والثانية تقاطع خط المعادلة مع محور ك. يتقاطع خط المعادلة مع محور ط عندما يكون عدد الكراسي k = 0 أي عندما 4t= 240 أي عندما يكون عدد الطاولات t=60. يتقاطع خط المعادلة مع محور k عندما يكون عدد الطاولات t= 0 أي عندما 3k = 240 أي عندما يكون عدد الكراسي k=80.



الشكل 1

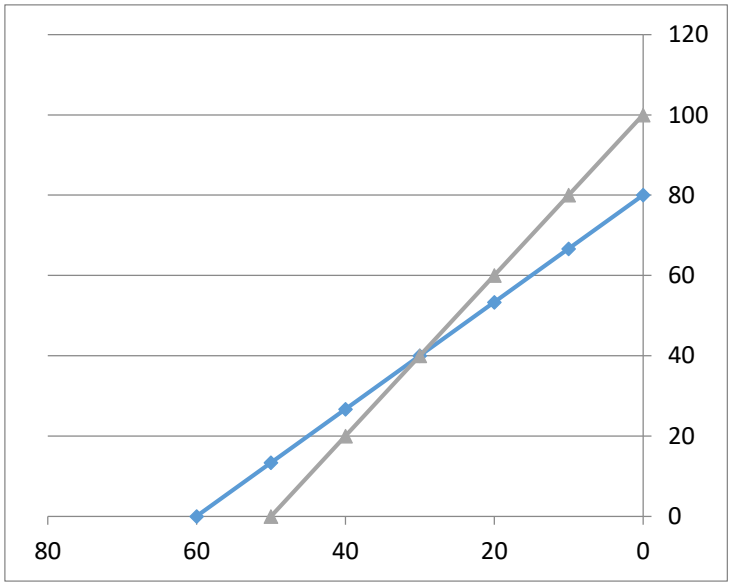
يمثل المحور الأفقي عدد الطاولات ويمثل المحور العمودي عدد الكراسي. يمثل الخط الأزرق الحد الأعلى لمتراجحة النجارة. يمكن تنجير 80 كرسي و 0 طاولة أو 60 طاولة 0 كرسي أو أي نقطة على الخط الأزرق الذي معادلته $240 = k3 + t4$. أي نقطة أسفل الخط وداخل المحورين يمثلها الجزء الآخر من المتراجحة $240 > k3 + t4$. أي نقطة أعلى من الخط لا تمثلها المتراجحة. مثلاً: 4(30)+3(20)=180، 180<240 هذا يعني أن انتاج 30 طاولة و 20 كرسي لا يتجاوز قيد ساعات النجارة. 4(70)+3(40)=400، 400>240 هذا يعني أن انتاج 70 طاولة و 40 كرسي يتجاوز قيد ساعات النجارة، أي لا تكفي ساعات النجارة لإنتاج 70 طاولة و 40 كرسي.

لتمثيل القيد الثاني $k 1 + t 2 \geq 100$ ساعة، يجب أولاً رسم المعادلة $k 1 + t 2 = 100$، وذلك بتعيين نقطتين، الأولى تقاطع خط المعادلة مع محور t والثانية تقاطع خط المعادلة مع محور k. يتقاطع خط المعادلة مع محور t عندما يكون عدد الكراسي $k = 0$ أي عندما $t2 = 100$ أي عندما يكون عدد الطاولات $t=50$. يتقاطع خط المعادلة مع محور ك عندما يكون عدد الطاولات $t= 0$ أي عندما $k1 = 100$ أي عندما يكون عدد الكراسي $k=100$.



الشكل 2

يمثل الخط الأزرق الحد الأعلى لمتراجحة الطلاء. يمكن طلاء 100 كرسي و 0 طاولة أو 50 طاولة 0 كرسي أو أي نقطة على الخط الأزرق الذي معادلته 100 = k1 + t2. أي نقطة أسفل الخط وداخل المحورين يمثلها الجزء الآخر من المتراجحة 100 > k1 + t2. أي نقطة أعلى من الخط لا تمثلها المتراجحة. مثلاً: 2(30)+1(20)= 80، 80<100 هذا يعني أن طلاء 30 طاولة و 20 كرسي لا يتجاوز قيد ساعات الطلاء. 2(70)+1(40)=180، 180<100 هذا يعني أن انتاج 70 طاولة و 40 كرسي يتجاوز قيد ساعات الطلاء، أي لا تكفي ساعات الطلاء في الأسبوع الواحد لطلاء 70 طاولة و 40 كرسي.



الشكل 3

في الشكل رقم 3 يمثل الخط الأزرق الحد الأعلى لمتراجحة (قيد) النجارة بينما يمثل الخط الأخضر الحد الأعلى لمتراجحة (قيد) الطلاء. تسمى المنطقة التي هي أدنى الخطين المنطقة الممكنة. المنطقة

الممكنة هي المنطقة التي تتوافق مع قيود المسألة (مسألة البرمجة الخطية)، فهي المنطقة التي تشترك فيها جميع قيود المسألة.

من الممكن إنتاج (نجارة وطلاء) 30 طاولة و 20 كرسي خلال أسبوع (فترة الانتاج في مسألتنا أسبوع) لأن هاتان الكميتان لا تتعديان قيدي المسألة لأن:

$$4\ t + 3\ k \leq 240 \text{ ساعة}$$

$$4\ (30) + 3\ (20) = 180 \text{ ساعة} < 240 \text{ ساعة}$$

$$2\ t + 1\ k \leq 100 \text{ ساعة}$$

$$2\ (30) + 1\ (20) = 80 < 100 \text{ ساعة}$$

لا يمكن إنتاج (نجارة وطلاء) 70 طاولة و 40 كرسي خلال أسبوع لأن هاتان الكميتان تتعديان قيدي المسألة (النجارة و الطلاء) لأن:

$$4\ t + 3\ k \leq 240 \text{ ساعة}$$

$$4\ (70) + 3\ (40) = 400 \text{ ساعة} < 240 \text{ ساعة}$$

$$2\ t + 1\ k \leq 100 \text{ ساعة}$$

$$2\ (70) + 1\ (40) = 180 < 100 \text{ ساعة}$$

لا يمكن إنتاج (نجارة وطلاء) 50 طاولة و 5 كراسي خلال أسبوع لأن هاتان الكميتان تتعديان **قيد الطلاء** لأن:

$$4\ t + 3\ k \leq 240 \text{ ساعة}$$

$$4\ (50) + 3\ (5) = 215 \text{ ساعة} < 240 \text{ ساعة}$$

$$2\ t + k \leq 100 \text{ ساعة}$$

$$2\ (50) + 1\ (5) = 105 < 100 \text{ ساعة}$$

أسلوب الحل

بعد أن رسمنا بيانياً المنطقة الممكنة سنتوجه إلى إيجاد الحل الأمثل للمسألة. الحل الأمثل هو تلك النقطة التي تقع ضمن المنطقة الممكنة والتي تشير إلى الربح الأعلى. لكن هناك كثير من النقاط تقع ضمن المنطقة الممكنة فكيف لنا معرفة تلك النقطة التي تعطينا أعلى ربح؟

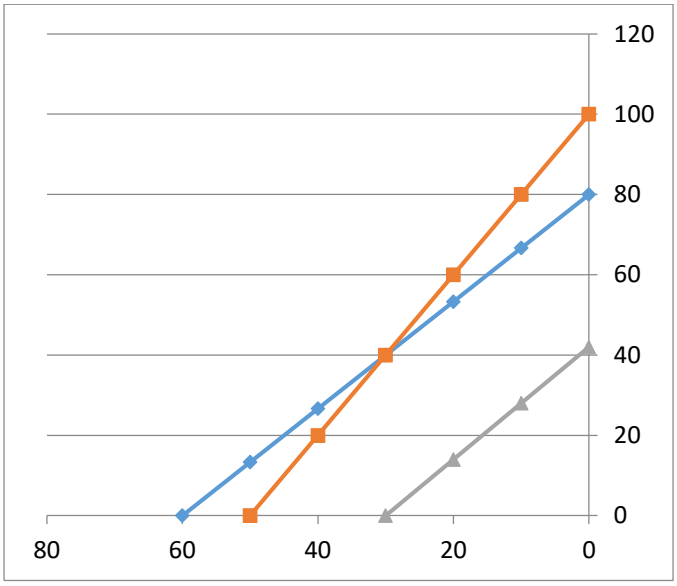
هناك طرق مختلفة لإيجاد الحل الأمثل.

الأولى: طريقة خطوط الانتاج المتساوية الربح.

أسرع طريقة تدعى خطوط الانتاج المتساوية الربح.

نبدأ التقنية بأن نجعل الأرباح تساوي قدراً ضئيلاً من المال. يمكن أن نختار أرباح ضئيلة لشركة الأثاث قدرها 2100 ريال. هذا المقدار من الربح لا يتعدى قيدي المسألة. يمكن كتابة تابع الهدف كما يلي: **2100 = k50 + t70 ريال.**

تمثل معادلة الهدف خط ندعوه الخط الذي تتساوى فيه الأرباح، إنه يمثل كل الثنائيات الممكنة من ط و ك التي تتحقق معها النتيجة 2100. لرسم المستقيم على محوري الإحداثيات، نفرض أن t=0 فينتج أنk50=2100 هذا يعني أن k=42 ثم نفرض أن k=0 فينتج أن t70=2100 هذا يعني أن k=30.



الشكل 4

نصل بين النقطتين (t=0، k=42) و (t=30، k=0) فنحصل على الخط الأخضر في الشكل 4. كل النقاط الموجودة على الخط الأخضر تمثل حلولاً ممكنة لمعادلة الهدف التي تعطي 2100 ريال.

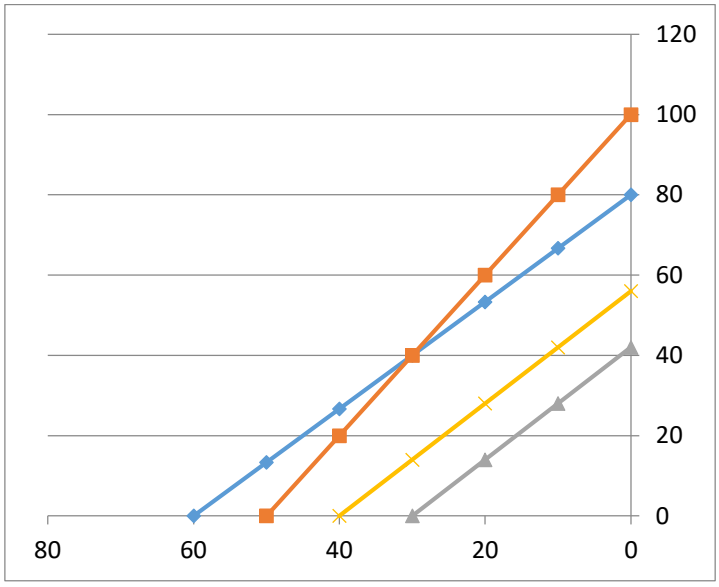
إذا نظرنا إلى الشكل ندرك أن 2100 ريال ليست الربح الأعظم للشركة.

يمكن أن نختار أرباح أعلى لشركة الأثاث قدرها 2800 ريال. هذا المقدار من الربح لا يتعدى قيدي المسألة. يمكن كتابة تابع الهدف كما يلي:

2800 = k50 + t70

تمثل معادلة الهدف خط ندعوه خط تتساوى فيه الأرباح وهو يمثل كل الثنائيات الممكنة من t و k التي تتحقق معها أرباح قدرها 2800 ريال. لرسم المستقيم على محوري الإحداثيات، نفرض

أن t=0 فينتج أن 50ك=2800 هذا يعني أن k=56 ثم نفرض أن k=0 فينتج أن t70=2800 هذا يعني أن t=40.



الشكل 5

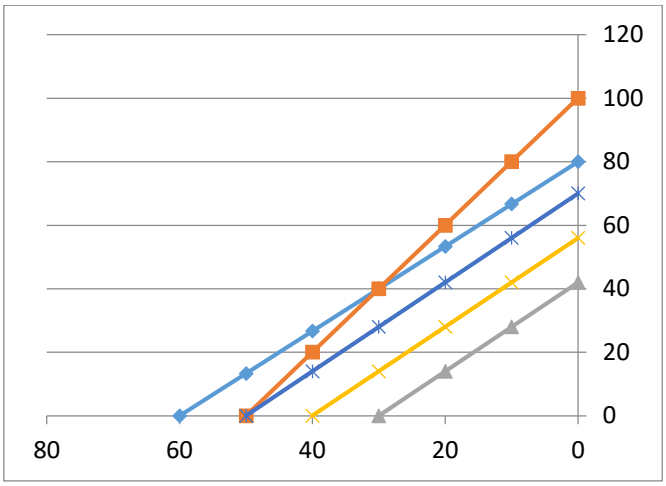
نصل بين النقطتين (t=0، k=56) و (t=40، k=0) فنحصل على الخط الأزرق الغامق في الشكل 5. كل النقاط الموجودة على الخط الأزرق الغامق تمثل حلولاً ممكنة لمعادلة الهدف التي تعطي 2800 ريال.

إذا نظرنا إلى الشكل ندرك أن 2800 ريال ليست الربح الأعظم للشركة.

يمكن أن نختار أرباح أعلى لشركة الأثاث قدرها 3500 ريال. هذا المقدار من الربح لا يتعدى قيدي المسألة. يمكن كتابة تابع الهدف كما يلي:

.3500 = k50 + t70

تمثل معادلة الهدف خط ندعوه خط تتساوى فيه الأرباح وهو يمثل كل الثنائيات الممكنة من t و k التي تتحقق معها أرباح قدرها 3500 ريال. لرسم المستقيم على محوري الإحداثيات، نفرض أن t=0 فينتج أن k50=3500 هذا يعني أن k=70 ثم نفرض أن k=0 فينتج أن t70=3500 هذا يعني أن t=50.



الشكل 6

نصل بين النقطتين (t=0، k=70) و (t=50، k=0) فنحصل على الخط الأزرق الفاتح في الشكل 6. كل النقاط الموجودة على الخط الأزرق الفاتح تمثل حلولاً ممكنة لمعادلة الهدف التي تعطي أرباح قدرها 3500 ريال.

إذا نظرنا إلى الشكل ندرك أن 3500 ريال ليست الربح الأعظم للشركة. كلما ابتعدنا عن المبدأ أكثر بمستقيمات موازية كلما زاد الربح أكثر.

نأخذ أعلى مستقيم بالنسبة للمبدأ لايزال يلمس نقطة من المنطقة الممكنة هذه النقطة هي تقاطع مستقيمي القيدين. هذه النقطة توافق (t=30، k=40). نحصل على هذه النقطة بحل معادلتي القيدين:

$4\ t + 3\ k = 240$ ساعة (معادلة القيد الأول: النجارة)

$2\ t + 1\ k = 100$ ساعة (معادلة القيد الثاني: الطلاء)

من المعادلة الأولى نستخرج قيمة t:

$$\frac{k3 - 240}{4} = t$$

نعوضها في المعادلة الثانية:

$$100 = k + (k0.75 - 60)\ 2$$

$$100 = k\ 0.5 - 120$$

$$20 = k\ 0.5$$

$k = 40$ نعوض قيمة ك في المعادلة الثانية: $100 = 40 + t2$ نستنتج أن **$t = 30$**

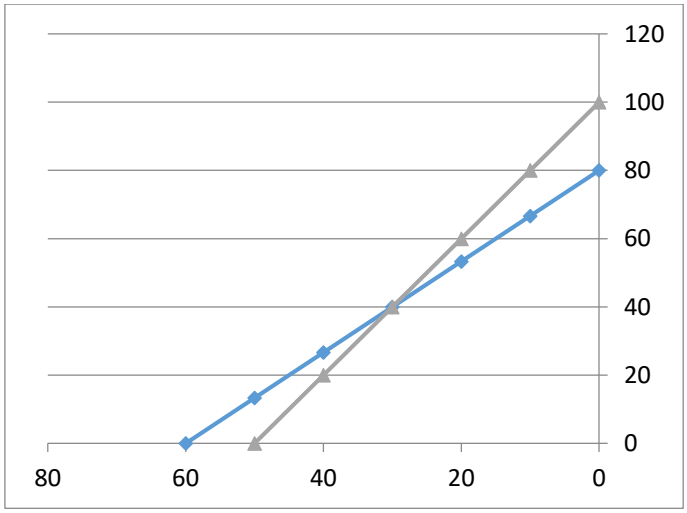
نعوض هذه النقطة في معادلة الهدف:

الربح $= 70t + 50\ k$ $= (30)70 + (40)50 = 2100 + 2000 = 4100$ ريالاً

إذاً إنتاج 30 طاولة و 40 كرسياً يعطي ربحاً قدره 4100 ريالاً.

الثانية:طريقة نقاط الزوايا

تعتمد هذه الطريقة على النظر إلى رسم المنطقة الممكنة بعد رسم القيدين وإذا نظرنا إلى المنطقة الممكنة في الرسم التالي نجد أربع زوايا لكل زاوية نقطة.



الشكل 7

نقطة المبدأ (t=0، k=0)، نقطة أخرى واقعة على محور الطاولات (t=50، k=0)،

نقطة أخرى واقعة على محور الكراسي (t=0، k=80)، النقطة الرابعة وهي تقاطع القيدين (t=30، k=40). الجدول التالي يتضمن الحالات الأربع والربح في كل حالة بعد التعويض في معادلة الهدف.

عدد الطاولات	عدد الكراسي	الربح (ريال)
0	0	0
50	0	3500
0	80	4000
30	40	4100

إذا كانت المسألة تحوي على أكثر من متغيرين يفضل الاعتماد على برامج الكومبيوتر.

6-5- الموارد غير المستخدمة والفائض

إضافةً إلى معرفة الحل الأمثل، من المفيد أن نعرف أين استخدمت الموارد وماهي الموارد غير المستخدمة وما هو الفائض.

الموارد غير المستخدمة = الموارد المتاحة – الموارد المستخدمة

في الحل الأمثل (t=30، k=40) لا يوجد موارد غير مستخدمة، لأن:

الموارد غير المستخدمة = الموارد المتاحة: 240 – الموارد المستخدمة: 240= 0

في مثال شركة الأثاث يوجد 240 ساعة نجارة متاحة. فإذا قررت الشركة إنتاج 25 كرسياً، سيكون لدينا (155 = (25)3 + (20)4 = k3+ t4)

الموارد غير المستخدمة = الموارد المتاحة:240 – الموارد المستخدمة: 155 = 85

الموارد غير المستخدمة تتعلق في القيد الذي يحد من الأعلى

(يساوي أو أقل، مثال: 4 t + 3 k ≥ 240 ساعة**)**

الفائض

لنفرض أن هناك قيد ينص على أنه يجب أن يكون عدد الطاولات والكراسي معاً 42 على الأقل. ولنفرض أن الشركة أنتجت 45 فيكون الفائض كما يلي:

الفائض = 45 – 42 = 3

الفائض يتعلق في القيد الذي يحد من الأدنى

(يساوي أو أكبر، مثال: 4 t + 3 k ≤ 240 ساعة**)**

المقارنة بين طريقة مستقيمات الربح وطريقة نقاط الزوايا

طريقة مستقيمات الربح	طريقة نقاط الزوايا
1. نرسم القيود وأوجد المنطقة الممكنة	1. نرسم القيود وأوجد المنطقة الممكنة
2. نختار أحد خطوط الربح (أو التكلفة) وارسمه لإيجاد ميله.	2. نوجد نقاط الزوايا في المنطقة الممكنة
3. نحرك خط تابع الهدف باتجاه رفع الربح (أو خفض التكلفة) مع المحافظة على ميل المستقيم. آخر نقطة يلمسها المستقيم من المنطقة الممكنة هي نقطة الحل الأمثل.	3. نحسب الربح (أو التكلفة) لكل نقطة من نقاط زوايا المنطقة الممكنة.
4. نوجد قيم متغيرات (الكراسي والطاولات) القرار عند تلك النقطة الأخيرة لكي نحسب الربح (أو التكلفة).	4. نختار النقطة التي يأخذ فيها تابع الربح أفضل قيمة في الخطوة 3. تلك النقطة تمثل الحل الأمثل.

6-6- أربع حالات خاصة في البرمجة الخطية:

الحالة الأولى: عدم وجود حل ممكن

نصادف هذه الحالة في مسائل البرمجة الخطية عندما لايكون هناك حل يتوافق مع كل القيود وهذا يعني عدم وجود منطقة حل ممكنة. وهذا يحدث عندما تكون هناك قيود متناقضة. وعلى سبيل المثال نفرض أن مدير المبيعات في شركة الأثاث وضع شرط بموجبه يتوجب إنتاج 300 طاولة على الأقل (ط≥300) لتلبية الطلب، بينما وضع مدير الإنتاج في الشركة شرطاً بموجبه لايمكن إنتلج أكثر من 220 طاولة (ط≤220) نظراً لقلة الخشب المخزنة، في هذه الحالة لايمكن إيجاد منطقة حل ممكنة.

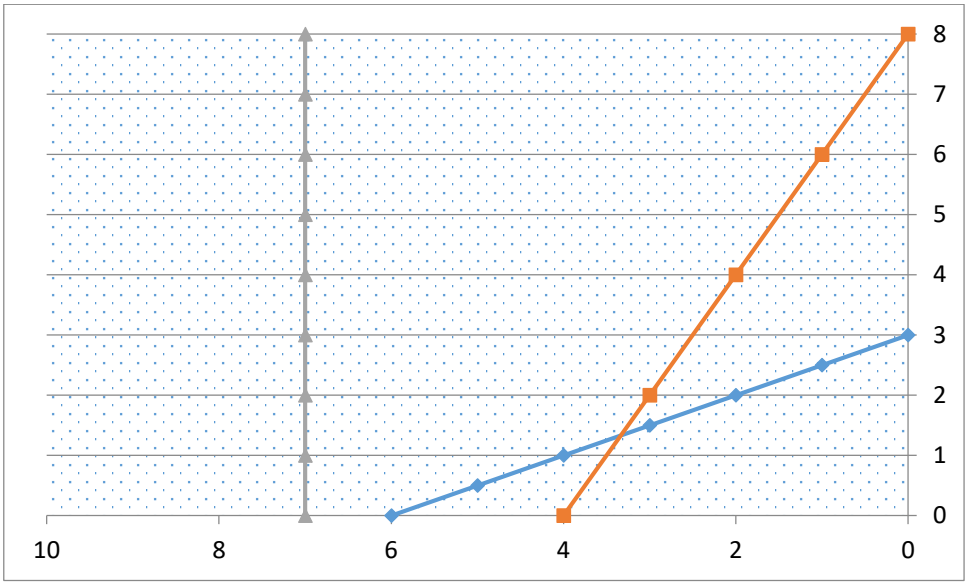
مثال:

لتكن لدينا القيود التالية:

$$X1 + 2X2 \leq 6$$

$$2X1 + X2 \leq 8$$

$$X1 \geq 7$$



الشكل 8

يمثل المحور الأفقي المتغير X1 بينما يمثل المحور العمودي المتغير X2.

يمثل الخط الأزرق وما تحته القيد الأول بينما يمثل الخط الأحمر وما تحته القيد الثاني. يوجد حل مشترك لهذين القيدين. يمثل الخط الأخضر ومابعده باتجاه اليسار القيد الثالث. في هذا الشكل نجد منطقة حل ممكنة لأول قيدين ولكن لايوجد منطقة حل ممكنة للقيود الثلاثة.

الحالة الثانية: المنطقة غير المحدودة

قد نجد منطقة حل مشترك ممكنة في مسائل البرمجة الخطية، هذه المنطقة الممكنة تتوافق مع جميع القيود ولكنها قد تكون مفتوحة باتجاه ما نتيجة عدم وجود حل نهائي.

مثال:

$$\text{تعظيم الربح} = k\,5 + t\,3$$

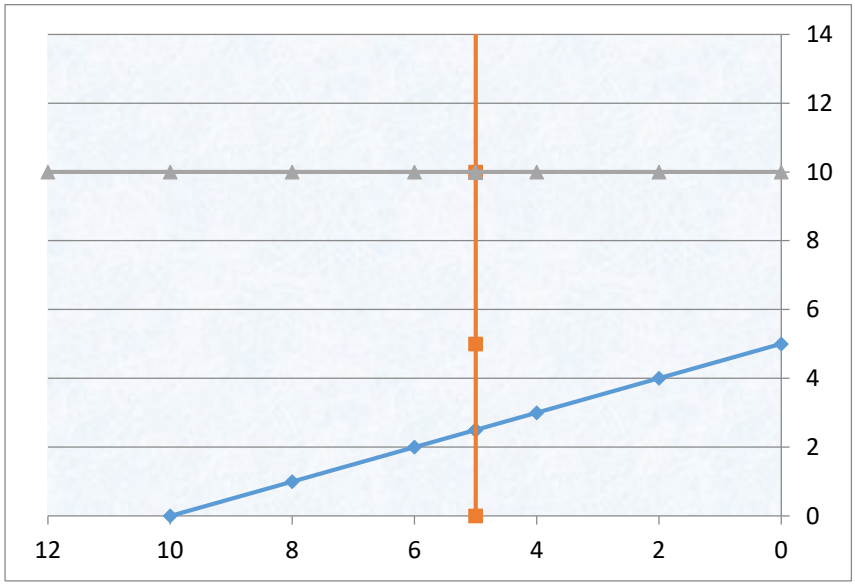
وهذه العبارة مرتبطة بالقيود التالية:

$$5 \leq t$$

$$10 \geq k$$

$$10 \leq k\,2 + t$$

$$0 \le k \text{ و } 0 \le t$$



الشكل 9

يمثل المحور الأفقي المتغير ط بينما يمثل المحور العمودي المتغير ك.

يمثل الخط الأحمر وما بعد الخط الأحمر باتجاه اليسار القيد ($t \le 5$)، يمثل الخط الأخضر وما تحت الخط الأخضر القيد ($k \ge 10$)، يمثل الخط الأزرق وما فوق الخط الأزرق القيد ($t + 2k \le 10$).

هذا يشير إلى أنه قد صيغت المسألة بشكل غير متقن. إنه شيء جيد أن تنتج الشركة عدد لانهائي من الطاولات وأن يكون لديها ربح غير نهائي. ولكن لايوجد شركة لديها موارد غير محدودة.

الحالة الثالثة: القيود غير المؤثرة

وهي القيود التي لاتؤثر على منطقة الحل الممكنة في مسائل البرمجة الخطية.

مثال:

تعظيم الربح = $1t + 2k$

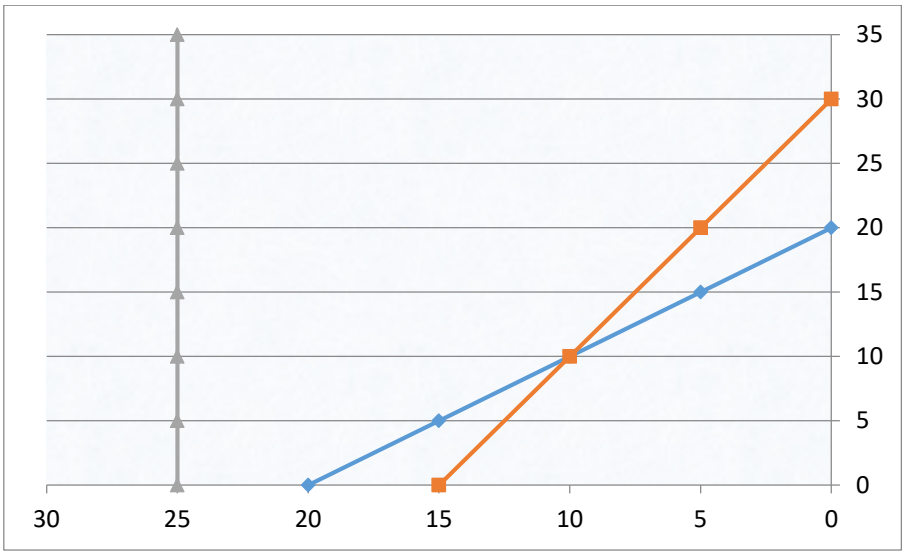
وهذه العبارة مرتبطة بالقيود التالية:

$$20 \ge k + t$$

$$30 \ge k + t2$$

$$25 \ge t$$

$$0 \le k \text{ و } 0 \le t$$



الشكل 10

يمثل المحور الأفقي المتغير t بينما يمثل المحور العمودي المتغير ك.

يمثل الخط الأزرق وما تحت الخط الأزرق القيد (t + k ≥ 20)، يمثل الخط الأزرق وما تحت الخط الأزرق القيد (t2 + k ≥ 30)، يمثل الخط الأخضر وما قبل الخط الأخضر باتجاه اليمين القيد (t ≥ 25).

الحالة الرابعة: الحلول المثلى البديلة

قد يكون لمسائل البرمجة الخطية أكثر من حل أمثل. يحدث هذا عندما يتوازى خط معادلة الهدف مع معادلة أحد قيود المسألة.

مثال:

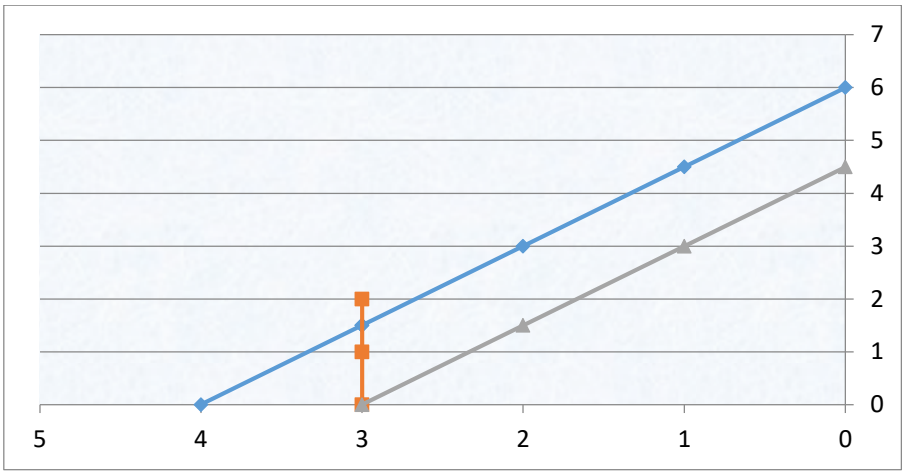
تعظيم الربح = 3 t + 2 k

وهذه العبارة مرتبطة بالقيود التالية:

$$6\ t + 4\ k \geq 24$$

$$t \geq 3$$

$$t \geq 0 \quad و \quad k \geq 0$$



الشكل 11

كما نرى في الشكل أعلاه أن خط الأرباح المتساوية والذي رسم على أساس أرباح قدرها 9 ريالات ومعادلته

(9 = k 2 + t 3) يتوازى مع مستقيم معادلة القيد (24 = k 4 + t 6). ومع رفع مستقيم الأرباح الأخضر نحوالأعلى سينطبق على المستقيم الأزرق مستقيم القيد لأن للمستقيمن نفس الميل (أو نفس زاوية الميل) وبالنتيجة أي نقطة على المستقيم الأزرق بين النقطة (0، 6) و النقطة (3، 1.5) التي هي تقاطع المستقيم الأزرق مع الأحمر هي نقطة حل أمثل أي لدينا حلول مثلى كثيرة كل منها يعطينا تركيب مختلف لعدد الطاولات والكراسي. وهذا يعطي مرونة كبير للإدارة لاختيار المزيج الأفضل من الطاولات والكراسي.

6-9- تحليل الحساسية

إن حلول البرمجة الخطية التي ناقشناها سابقاً تعتمد على افتراضات محددة. الأسعار ثابتة و الموارد معروفة والوقت اللازم لانتاج وحدة واحدة محدد. لكن الواقع مختلف، كل شيء قابل للتغيير. فكيف يمكن حل هذا التناقض؟

هناك طريقة واحدة لحل هذا التناقض، هو أن نعامل كل مسألة برمجة خطية على أنها حالة محددة غير متغيرة. عندما نجد حل أمثل، نلاحظ حساسية ذلك الحل لافترضات النموذج والبيانات. فعلى سبيل المثال، إذا تبين أن أرباح شركة هي 5.5 ريال بدلاً من 5 ريالات، كيف يتغير الحل وكيف تتغير الأرباح؟ إذا أضيف لساعات العمل 10 ساعات أو أضيف لزمن تشغيل الآلات 3 ساعات، هل هذا سيغير جواب المسألة؟ نستخدم مثل هذا التحليل لفحص تأثير التغيرات في ثلاثة حقول: (1) المعدلات التي يساهم بها كل متغير و (2) المعاملات التقنية (الأرقام في معادلات القيود) و (3) الموارد المتاحة (كمية الموارد التي تظهر في الطرف الأيسر من معادلات القيود مثلاً الكمية 24 في معادلة القيد التالي: 24 ≥ k 4 + t 6. نسمي هذا التحليل "تحليل الحساسية" وهو تحليل يعقب إيجاد الحل الأمثل.

يتضمن تحليل الحساسية أسئلة مثل: ماذا لو زاد ربح المنتج رقم 1 بنسبة 10%؟ ماذا لو لم يتوفر المبلغ اللازم لتلبية قيد الإعلان؟ نرى أن تحليل الحساسية لايتعامل فقط مع الأخطاء في تقدير

مدخلات نموذج البرمجة الخطية ولكنه يتعامل أيضاً مع التجارب الإدارية المتعلقة بالتغيرات التي يمكن أن تطرأ على الشركة وتؤثر على أرباح الشركة.

هناك طريقتين لتحديد مدى حساسية الحل الأمثل للتغيرات. الأولى هي طريقة التجربة والخطأ. تتضمن هذه الطريقة عادةً إعادة حل المسألة من جديد مع كل تغيير في المدخلات، لذلك يفضل حلها عن طريق الكومبيوتر. الطريقة الثانية هي طريقة التحليل الذي يعقب إيجاد الحل الأمثل، نحاول إيجاد مجموعة من التغييرات في مدخلات المسألة والتي لا تؤثر على الحل الأمثل وهذا يتم دون إعادة حل المسألة بالكامل من جديد.

سنقوم فيما يلي بإجراء تحليل الحساسية لمسألة برمجة خطية كمثال توضيحي:

مثال

تصنع إحدى الشركات أجهزة تشغيل أقرص (CD) وتصنع أجهزة استقبال (ريسيفر). كل من هذه المنتجات يتطلب كمية معينة من المهارات المهنية التي لا تتوفر بشكل مستمر. قامت الشركة بتشكيل البرمجة الخطية للمسألة كما يلي:

$$\text{تعظيم الربح} = 50\ (1x) + 120\ (2x)$$

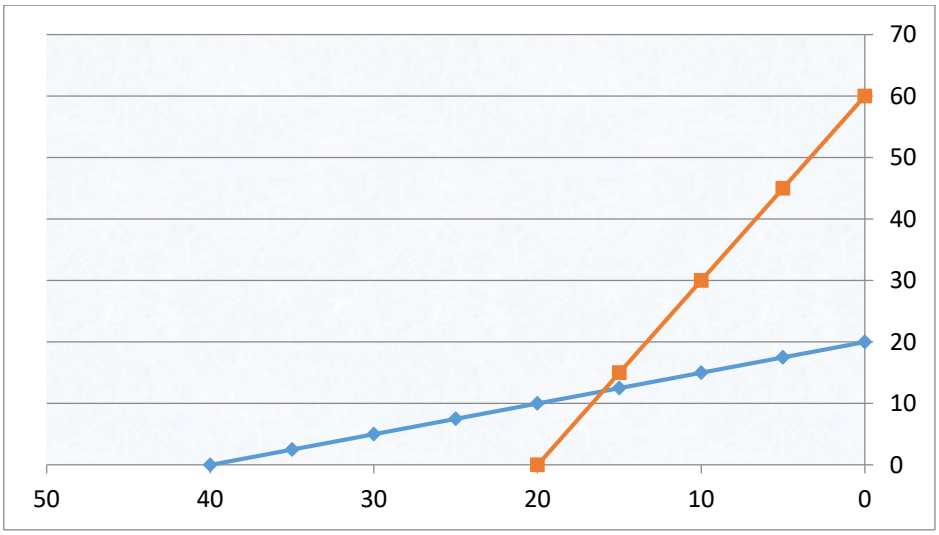
وهذه العبارة مرتبطة بالقيود التالية:

$$2\ (1x) + 4\ (2x) \geq 80 \text{ (ساعة عمل من العمالة الماهرة في مجال الإلكترونيات)}$$

$$3\ (1x) + 1\ (2x) \geq 60 \text{ (ساعة عمل من العمالة الماهرة في مجال التكنلوجيا السمعية)}$$

$$1x \geq 0 \quad \text{و} \quad 2x \geq 0$$

نحل المسألة بيانياً كما يلي:



الشكل12

مجموع الأرباح	الكمية من أجهزة المستقبلات	ربح الوحدة	كمية من أجهزة تشغيل لأقراص	ربح الوحدة
0	0	120	0	50
1000	0	120	20	50
2400	**20**	**120**	**0**	**50**
2240	12	120	16	50

من الرسم البياني واعتماداً على الافتراضات المحددة، يجب إنتاج 0 جهاز من أجهزة تشغيل الأقراص و 20 جهازاً من أجهزة المستقبلات. وهذا يعطي أرباحاً أسبوعية قدرها 2400 ريالاً. إذا عدنا إلى القيود نجد:

$2(1x) + 4(2x) \geq 80$ (ساعة عمل من العمالة الماهرة في مجال الإلكترونيات)

$2(0) + 4(20) = 80$ بالنسبة للقيد الأول هناك استغلال كامل لساعات العمل

$3(1x) + 1(2x) \geq 60$ (ساعة عمل من العمالة الماهرة في مجال التكنلوجيا السمعية)

$3(0) + 1(20) = 20$ بالنسبة للقيد الثاني هناك 40 ساعة غير مستغلة

التغيرات في معامل تابع الهدف

في الواقع، تتقلب معدلات الأرباح أو معدلات التكاليف في تابع الهدف بشكل دوري. هذا يعني أنه مع ثبات المنطقة الممكنة تتغير زاوية خط الأرباح (أو خط التكاليف).

الباب السابع

مقدمة في الرياضيات الاقتصادية والمالية

أهداف التعلم: في نهاية هذا الفصل، يجب أن يكون الطالب قادراً على

1. التعرف على أسلوب الرياضي لحل مسائل الاقتصاد.
2. التعرف على كيفية نقل الموضوع الاقتصادي من لغة الاقتصاد إلى لغة الرياضيات.
3. فهم القضايا وطرق النمذجة الرياضية للمسائل الاقتصادية.
4. التعرف أنواع ومراحل النماذج الاقتصادية الرياضية
5. استخدام الطرق الرياضية والبرمجة الخطية لحل المسائل الاقتصادية.

مواضيع الفصل

1. تعريف الاقتصاد الرياضي.
2. النمذجة الاقتصادية الرياضية أنواعها ومراحلها.
3. استخدام الرياضيات في الاقتصاد.

7-1- نبذة تاريخية

الرياضيات تستحق ان تسمى سيّدة العلوم، لأنه لا يمكن أن يسمى العلم علماً دقيقاً Exact science إلا إذا استطاع أن يستخدم الرياضيات كأداة خادمة (أو لغة) للتعبير عن مكنوناته وحل مشاكله وإثبات نظرياته. من ذلك ظهرت الرياضيات التطبيقية التي هي فرع من فروع الرياضيات، تهتم بدراسة وتطوير أساليب الرياضيات التي تستخدم في العلوم والهندسة وإدارة الأعمال والصناعة. فالرياضيات التطبيقية هي علوم الرياضيات مضافة إليها معارف مجال آخر ما.

ومن اهم اقسام الرياضيات التطبيقية هو الاقتصاد الرياضي، وهو العلم الذي يقوم باستخدام النظريات والقوانين الرياضية في علم الرياضيات وتطبيقاتها في علم الاقتصاد، وبعبارة أخرى هو تطبيق الطرق الرياضية في التقييم العملي للعلاقات الاقتصادية والمالية . ويستخدم الاقتصاد الرياضي أساليب تحليل التفاضل والتكامل ومناهج المصفوفات الجبرية.

اذ إن استخدام علم الرياضيات في خدمة التحليل الاجتماعي والاقتصادي يعود إلى القرن السابع عشر، وبعد ذلك أنتشر بين الاساتذة العاملين في حقل الاقتصاد، لا سيما في الجامعات الألمانية، وهو أسلوب التدريس الذي ظهر وتناول على وجه التحديد الاسس الرياضية مع عرض مفصل للبيانات ولأنها تتعلق بالإدارة العامة للاقتصاد. الاستاذ (غوتفريد) حاضر الاقتصاد بالأسلوب الرياضي، وخصوصا في الإحصاءات، وفي الوقت نفسه، قامت مجموعة صغيرة من الأساتذة في جامعة انكلترا باستخدام الوسيلة الرياضية في بحث عن "المنطق من قبل شخصيات على الأمور المتعلقة بالحكومة" ويشار إلى هذه الممارسة في الاقتصاد السياسي.

اما اليوم لا يكاد يوجد شيء مستقل اسمه الاقتصاد الرياضي بل أصبح علم الاقتصاد الحديث كله يكتب بلغة الرياضيات فلا يستطيع المتخصص الأكاديمي (كأساتذة الجامعات) الذي يفرض عليه تخصصه متابعة ما تنشره الدوريات الأكاديمية ما لم يكن ملما بالرياضيات المستخدمة كلغة في علم الاقتصاد.

هكذا أصبحت جميع الجامعات الرائدة والدوريات الأكاديمية المرموقة وجميع الاقتصاديين البارزين (كالذين يرشحون لجائزة نوبل مؤخرا) هم الذين يستخدمون الرياضيات كلغة في كتاباتهم.

من أوائل الرواد في إدخال الرياضيات إلى علم الاقتصاد هو (هارولد هوتلنق) واضع نظرية الموارد الناضبة التي حتى الآن لم يستوعبها كثير من الذين يكتبون عن اقتصاديات الطاقة.

7-2-الاقتصاد الرياضي

هو أسلوب و منهج في صياغة التحليل الاقتصادي يستخدم بعض جوانب النظرية الرياضية كأداة في تحليل و رض بعض القضايا الاقتصادية وخاصة القابلة للقياس الكمي والمقارنة عبر العلاقات الرياضية. ويشكل الاقتصاد الرياضي التمازج والتقاطع بين علم الرياضيات وعلم الاقتصاد

يعد علم الاقتصاد الرياضي من العلوم الحديثة بالمقارنة مع علم الرياضيات و علم الاقتصاد ، و هو يسعى إلى نمذجة المسائل الاقتصادية و لا يعتبر فرعاً من فروع علم الاقتصاد و إنما هو عبارة عن أسلوب و منهج رياضي في التحليل الاقتصادي و التخطيط الاقتصادي , و هو علم متنامي مع دخول عصر الحوسبة و استخدام المقاييس الكمية.

7-3-النمذجة الاقتصادية الرياضية

تتم بنقل الموضوع الاقتصادي من لغة الاقتصاد إلى لغة الرياضيات عبر قواعد محددة و العملية المعاكسة فتسمى التفسير الاقتصادي لنتائج الحلول الرياضية.

النموذج الاقتصادي الرياضي

مجموعة من المؤشرات الرئيسية التي تصاغ بشكل معادلات ومتحولات ترتبط فيما بينها بعلاقة كمية و تمثل الظواهر بشكل مختزل و مبسط تفيد في تحليلها دراسة ظواهر مباشرة.

أنواع النماذج الاقتصادية الرياضية

- نماذج النظرية التحليلية والنماذج التطبيقية.
- النماذج الحتمية (اليقينية) والنماذج الاحتمالية.
- النماذج التوازنية والنماذج المثلوية.
- النماذج الجزئية والنماذج الكلية.
- النماذج البسيطة والنماذج المركبة(المعقدة).
- النماذج الخطية والنماذج غير الخطية.
- النماذج السكونية والنماذج الديناميكية.

مراحل النموذج الاقتصادي الرياضي

- وضع وتحديد المشكلة الاقتصادية والمشكلات التي يراد حلها والهدف من الحل.
- تحضير المعلومات والبيانات الأولية للنموذج.
- بناء النموذج الرياضي والتعبير بشكل علاقات رياضية.
- الحل الرقمي للمسألة يدوياً أو حاسوبياً.
- التفسير الاقتصادي لنتائج الحل الرياضي عبر تحويلها إلى لغة الاقتصاد.

مواضيع الاقتصاد الرياضي

- الأساليب الرياضية في نظريات الانتاج والتكاليف والربح.
- التوابع الأسية ونماذج النمو الاقتصادي.
- الأساليب الرياضية في الاستهلاك.
- التوازن الرياضي.
- البرمجة الخطية.

7-4-استخدام الرياضيات في الاقتصاد " التحليل الاقتصادي"

لاقتصاد:

هو دراسة استخدام الموارد الاقتصادية في السوق. غالبًا ما تعتمد اقتصادات السوق الحرة على هذه المعلومات لقياس الظروف الاقتصادية الحالية. أما التحليل الاقتصادي فهو الأداة الرئيسية المستخدمة لحساب اقتصاد الناتج المحلي للأمم ويُعرّف التحليل الاقتصادي عمومًا بأنه نهج منظم لتحديد الاستخدام الأمثل للموارد الاقتصادية النادرة أو المحدودة. غالبًا ما يتضمن هذا التحليل عدة افتراضات أو قيود موجودة في السوق الحرة.

حقائق التحليل الاقتصادي:

يستخدم التحليل الاقتصادي غالبًا أساليب كمية لمعاينة معلومات محددة في الاقتصاد. وتعرف الأساليب الكمية بالعمليات الحسابية أو الإحصائية حيث تزود الاقتصاديين بمؤشرات لمقارنة التحليل الاقتصادي الحالي بذلك الذي كان في فترات سابقة. وغالبًا ما يستخدم الاقتصاديون أنواعًا مختلفة من الرياضيات لدعم أحكامهم الشخصية أو استدلالات أو نظريات تكون كلها مدعومة بحاسبات رياضية ذات مغزى

التفاضل والتكامل:

التفاضل والتكامل هو النوع الأكثر شيوعًا من الرياضيات في الاقتصاد. وهو يتضمن استخدام صيغ مختلفة لحساب النهايات والاقترانات والمشتقات، يستخدم العديد من الاقتصاديين التفاضل عند قياس المعلومات الاقتصادية. إن التفاضل هو قياس محدد للمشتقات المتعلقة باقترانات محددة. في المصطلحات الأساسية، يُمَثّل الاقتران عادة بخط مستقيم يعرف بالمماس؛ وهو يمثل الوظيفة الاساسية

للاقتران. أما المشتقة فهي أي تغير في المماس ويمثل بالانحراف (صعودًا أو هبوطًا) في الخط الأصلي

كيف يتم استخدام التفاضل والتكامل؟

النماذج الاقتصادية هي العنصر الرئيسي في التحليل الاقتصادي، حيث يستخدم الاقتصاديون هذه النماذج لوصف اقترانات تمثل وظائف مختلفة في السوق الاقتصادي، الرسم البياني للعرض والطلب هو مثال أساسي على النماذج الاقتصادية. يتم تطبيق التفاضل على نماذج العرض والطلب لتحديد كيف لعوامل مختلفة أن تحول الخطوط التي تمثل العرض والطلب في السوق الاقتصادي. وأيضًا تستخدم النماذج الاقتصادية لإثبات أو دحض نظريات واستنتاجات مختلفة مقترحة من قبل الاقتصاديين.

7-5-اعتبارات لا بد منها

التحليل الاقتصادي جيد فقط بحكم الأرقام المستخدمة في المعادلات الرياضية والنماذج الاقتصادية، يمكن لانحرافات طفيفة في هذه الأرقام أن تقدم صعوبات كبيرة عند محاولة تفسير أو تبرير الاتجاهات الاقتصادية. يخطط عادة الاقتصاديون لمثل هذه الأخطاء ويحاولون أخذ عينة كبيرة من المعلومات الاقتصادية من السوق، حيث يمكن لهذه العينات الكبيرة التقليل من أثر الانحرافات في المعلومات الاقتصادية.

7-6-أهمية التحليل الاقتصادي

يمكن لأصحاب الأعمال استخدام المعلومات الاقتصادية لمساعدتهم في توقع توقعات المبيعات لعملياتهم التجارية. إن استخدام التحليل الاقتصادي في العمل هو أداة إدارية هامة عند وضع خطط العمل والقرارات، لا يطلب أصحاب الأعمال عادة الاستخدام الثقيل لمفاهيم الرياضيات التقنية عند تحليل المعلومات الاقتصادية، يمكنهم فقط استخدام المعلومات المقدمة من قبل الاقتصاديين واتخاذ القرارات الأساسية المتعلقة بالعمليات التجارية من هذه النماذج الاقتصادية