

Math 423
Spring 2008

Mid-term exam



٤٢٣ رعين المعادلات التفاضلية الجزئية الاختبار الثاني فصل الربيع ٢٠٠٨

١ اوجد حل المعادلة $2y u_x = \cos x u_y$ الذي يمر بالنقطة $\{(0, t^2) : t \in \mathbb{R}\}$ كل

٢ اوجد الحل العام للمعادلة

$$u_{xx} - 4u_{yy} = 8 \sin(x+y)$$

بتحليل المؤثر، ثم استنبط الحل الذي يحققه الشرطين

$$u(0, y) = 0, u_x(0, y) = 0$$

٣ استخدم فصل المتغيرات لحل المعادلة

$$u_{xx} - u_{yy} - 2u_y = 0$$

٤ (i) أكتب نص مبدأ القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة التوافقية

في نظامه مجرد $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$(ii) \text{ تحققه أن كلا من } u(x, y) = e^x \cos y \text{ و } v(x) = e^x \sin y$$

توافقية في النطاق $0 < x < \pi, 0 < y < \pi$ ثم عي

القيمة العظمى والقيمة الصغرى لكل من u و v في المربع المغلق $[0, \pi] \times [0, \pi]$

$$2y u_x - \cos x \cdot u_y = 0$$

$$du=0, \frac{dx}{2y} = \frac{dy}{-\cos x} \Rightarrow u = C_1, y^2 + \sin x = C_2 \Rightarrow u(x,y) = f(\sin x + y^2)$$

$$u(0,t) = t^2 \Rightarrow f(t^2) = t^2 \Rightarrow u(x,y) = \sin x + y^2$$

$$u_{xx} - 4u_{yy} = \sin(x+y)$$

$$u_p = a \sin(x+y) + b \cos(x+y) \Rightarrow -a \sin + 4a \sin - b \cos + 4b \cos = \sin$$

$$\Rightarrow 3a = 1, 3b = 0 \Rightarrow a = 1/3, b = 0$$

$$\Rightarrow u_p = \frac{1}{3} \sin(x+y)$$

$$u_h = f(y+2x) + g(y-2x) \Rightarrow u(x,y) = f(y+2x) + g(y-2x) + \frac{1}{3} \sin(x+y)$$

$$u(0,y) = f(y) + g(y) + \frac{1}{3} \sin y = 0 \Rightarrow 2f'(y) + 2g'(y) + \frac{2}{3} \cos y = 0 \Rightarrow 4f'(y) + 4g'(y) = -\frac{2}{3} \cos y$$

$$u_x(0,y) = 2f'(y) - 2g'(y) + \frac{1}{3} \cos y = 0$$

$$f(y) = -\frac{1}{4} \sin y + C \Rightarrow f(y+2x) = -\frac{1}{4} \sin(y+2x) + C$$

$$g(y-2x) = \frac{1}{4} \sin(y-2x) - C - \frac{1}{3} \sin(y-2x)$$

$$u(x,y) = -\frac{1}{4} \sin(y+2x) + \frac{1}{4} \sin(y-2x) - \frac{1}{3} \sin(y-2x) + \frac{1}{3} \sin(y+x)$$

$$= -\frac{1}{4} \sin(y+2x) - \frac{1}{12} \sin(y-2x) + \frac{1}{3} \sin(y+x)$$

check: $u(0,y) = -\frac{1}{4} \sin y - \frac{1}{12} \sin y + \frac{1}{3} \sin y = 0$

$$u_x(0,y) = -\frac{1}{2} \cos y + \frac{1}{6} \cos y + \frac{1}{3} \cos y = 0$$

$$u_{xx} - u_{yy} - 2u_y = 0$$

$$u = v(x)w(y) \Rightarrow \frac{v''}{v} - \frac{w''}{w} - \frac{2w'}{w} = 0 \Rightarrow \frac{v''}{v} = \frac{w'' + 2w'}{w} = -\lambda^2$$

$$v'' + \lambda^2 v = 0 \Rightarrow v(x) = a \cos \lambda x + b \sin \lambda x$$

$$w'' + 2w' + \lambda^2 w = 0 \Rightarrow m^2 + 2m + \lambda^2 = 0 \Rightarrow m = -1 \pm \sqrt{1 - \lambda^2}$$

$$\Rightarrow w(y) = e^{-y} (c \cos \sqrt{\lambda^2 - 1} y + d \sin \sqrt{\lambda^2 - 1} y)$$

$$\therefore u(x,y) = (a \cos \lambda x + b \sin \lambda x) (c \cos \sqrt{\lambda^2 - 1} y + d \sin \sqrt{\lambda^2 - 1} y) e^{-y}$$

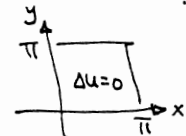
(i) إذا كانت الدالة المتوافقة في Ω تتأخذ قيمها العظمى وصغرى العظمى داخل Ω

أثبت

لا! إذا كانت دالة ثابتة.

القيمة العظمى للدالة $u(x,y) = e^x \cos y$ عند $(\pi, 0)$ و e^π

والصغرى عند (π, π) و $-e^\pi$



القيمة العظمى للدالة $v(x,y) = e^x \sin y$ عند $(\pi, \frac{\pi}{2})$ و e^π

والصغرى عند $(\pi, 0)$ و 0