

1- أوجد الحل العام للمعادلة $xu_x + yu_y + u_z = 0$.

2- استخدم تحليل المؤثر لحل المعادلة

$$2u_{xx} - u_{xy} - u_{yy} = \sin 2x$$

تحت الشروط

$$u(x,0) = 1, \quad u_y(x,0) = 0.$$

هل الحل وحيد؟

3- (أ) استنتج الصيغة العامة للدالة f التي تجعل الدالة $u(x,y) = f(x) \cos 3y$ توافقية في \mathbb{R}^2 .
 (ب) تحقق من أن الدالة $u(r,\theta) = r^3 \sin 3\theta$ توافقية في \mathbb{R}^2 ، ثم عيّن جميع النقاط حيث تقع قيمها العظمى والصغرى على القرص $0 \leq r \leq 1$.

4- أثبت أن المسألة الحدية المختلطة

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega,$$

$$u_n + u = g \quad \text{on } \partial\Omega,$$

لها حل وحيد في $C(\bar{\Omega})$ ، باعتبار Ω نطاقاً محدوداً في \mathbb{R}^2 .