قسم الرياضيات | 425 ريض | الفصل الأول

جامعة الملك سعود | الاختبار النهائي | 2013-2012

أجب على خمسة من الأسئلة الستة التالية:

1- أوجد حل المعادلة $(y-x)u_x+(u-x)u_y=x-y$ الذي يمر بالمنحني

$$\{(x,y,z): x=t, y=2t, z=0\}.$$

2- ما هي الدالة التوافقية في الحلقة الدائرية

$$\{(r,\theta): 1<r<3,\ 0\le\theta<2\pi\}\subseteq\mathbb{R}^2$$

التي تحقق الشروط الحدية $u(1,\theta)=0$ ، $u(3,\theta)=1+\cos\theta$ ؟

3- استخدم فصل المتغيرات للحصول على الحل العام لمعادلة لابلاس في الاحداثيات الكروية (r,θ,ϕ)

$$u_{rr}+\frac{2}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\phi\phi}+\frac{\cot\phi}{r^2}u_\phi=0,$$

على اعتبار أن u لا تعتمد على المتغير θ.

4- أوجد حل المسألة

$$\begin{aligned}&u_{tt}=u_{xx}-2, \quad 0<x<1,\ t>0,\\ &u(0,t)=u(1,t)=0, \quad t>0,\\ &u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0, \quad 0<x<1.\end{aligned}$$

5- استنتج توزيع درجة الحرارة على قضيب يمتد من $x=0$ إلى ∞ ، على افتراض أن انتقال الحرارة محكوم بالمعادلة $u_t=ku_{xx}$ ، وأن الطرف الأيسر للقضيب معزول، وأن التوزيع الابتدائي لدرجة الحرارة هو

$$u(x,0)=\begin{cases}T_0, & 0<x<1\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

أوجد درجة الحرارة عند $x=0$ واحسب نهايتها $\lim_{t\to\infty}u(0,t)$.

6- استخدم فصل المتغيرات لحل المسألة الحدية

$$\begin{aligned}&u_{tt}=u_{xx}-u_t, \quad 0<x<l,\ t>0,\\ &u(0,t)=u(l,t)=0, \quad t>0,\\ &u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\sin\tfrac{3\pi}{l}x, \quad 0<x<l.\end{aligned}$$

افرض أن $l<2\pi$.