قسم الرياضيات
جامعة الملك سعود

٢٤٢ ريض الاختبار النهائي
الفصل الأول ١٤٢٥ - ١٤٢٦هـ
٢٠٠٥ - ٢٠٠٦م

س١ أوجد الحل العام للمعادلة $\cos y\, u_x = 2x u_y$ ثم استنتج الحل الذي يحقق الشرط $u(x,0) = \cos|x|$.

س٢ (i) استخدم التحويل $\xi = \log x$ ، $\eta = \log y$ لتحويل المعادلة

$$x^2 u_{xx} + 2xy\, u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$$

إلى معادلة في المتغيرين ξ ، η بمعاملات ثابتة.

(ii) أوجد الحل العام للمعادلة بدلالة ξ ، η ثم عبر عن هذه النتيجة بدلالة x ، y للحصول على $u(x,y) = f\left(\frac{x}{y}\right) + x\, g\left(\frac{x}{y}\right)$ حيث f ، g دالتان اختياريتان.

س٣ استخدم خواص الدوال التوافقية لإثبات وحدانية الحل لمسألة ديرشليه في النظام $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\Delta u = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega, \qquad u = g(x,y) \quad \forall (x,y) \in \partial\Omega$$

س٤ أوجد حل النظام:

$$u_{tt} = u_{xx} + 2 \quad 0 < x < 1,\ t > 0$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad t > 0$$
$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \quad 0 < x < 1$$

س٥ قضيب طوله π ثبت طرفه الأيسر عند درجة الحرارة T_0 وطرفه الأيمن عند T_1. إذا كان انتقال الحرارة خاضع للمعادلة $u_t = u_{xx}$ وكان توزيع درجة الحرارة الابتدائي $u(x,0) = T_0$ فما نتيجة $u(x,t)$ لكل $0 < x < \pi$ ، $t > 0$؟ وما شكل $u(x,t)$ بعد مضي فترة طويلة؟

س٦ أوجد الحل:

$$u_t = u_{xx} \quad 0 < x < \infty,\ t > 0$$
$$u_x(0,t) = 0$$
$$u(x,0) = \begin{cases} \cos x & 0 < x < \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases}$$