جامعة الملك سعود — بسم الله الرحمن الرحيم

كلية العلوم — الموضوع: ....

قسم الرياضيات

الامتحان النهائي في مقرر (٤٢٣ ريض) — الزمن: ثلاث ساعات

الفصل الأول من العام الدراسي ١٤٢٦ - ١٤٢٧ هـ.

السؤال الأول:

(أ) باستخدام التحويلات الآتية: $\xi = \ln x, \quad \eta = \ln y$

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$8x \frac{\partial z}{\partial x} - 5y \frac{\partial z}{\partial y} + 4z = x^{3/2} \cdot \cos x.$$

(ب) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$(x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz$$

السؤال الثاني:

(أ) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

وذلك بإجراء التحويل الآتي: $v = r \cdot u$:

(ب) أوجد الشكل النظامي للمعادلة الآتية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

عندما تكون $y > 0$.

السؤال الثالث:

(أ) أوجد الحل العام للمعادلة الآتية:

$$z_{xx} - z_{yy} + z_x + z_y + x + 1 + y = 0$$

(ب) لتكن C قطعة مستقيمة من المحور x معرفة بالمعادلات الوسيطية

$$x = \tau, \quad y = 0, \quad -1 < \tau < 1$$

أوجد الدالة $z = \varphi(x, y)$ والتي تكون حلاً للمعادلة التفاضلية:

$$z_{xx} + 2z_{xy} - 3z_{xy} = 0$$

في منطقة تحتوي C بحيث تكون:

جامعة الملك سعود

كلية / إدارة

الموضوع:

$$\psi(x,0) = 6x^2$$

$$\psi_x(x,0) = 12x \quad ; \quad -1<x<1$$

$$\psi_y(x,0) = 0$$

السؤال الرابع:

(أ) وإذا كانت $v \in C^2([0,l]\times[0,\infty))$ تحقق مسألة القيم الحدية التفاضلية الآتية:

$$v_t = k\, v_{xx} \quad 0<x<l \,,\ t>0 \quad ; \quad k>0 \text{ ثابت}$$

$$v(x,0) = f(x) \quad ; \quad 0\le x\le l$$

$$v(0,t) = v(l,t) = 0 \quad ; \quad t\ge 0$$

حيث $f \in C^1([0,l])$

برهن أن لهذه المسألة حلاً وحيداً.

(ب) أوجد حل المسألة التفاضلية الآتية:

$$\Delta u = 0 \; ; \quad 0<x<1 \,, \quad 0<y<1$$

$$u(x,0) = x(x-1) \quad ; \quad 0\le x\le 1$$

$$u(x,1) = 0 \quad ; \quad 0\le x\le 1$$

$$u(0,y) = u(1,y) = 0 \quad ; \quad 0\le y\le 1$$

ثم برهن على وجود الحل على المنطقة $(0,1)\times(0,1)$.

من أجل ذلك استخدم المتراجحة الآتية:

$$\frac{\sinh a}{\sinh b} \le e^{a-b} \quad ; \quad 0<a\le b$$

جامعة الملك سعود

كلية

قسم الرياضيات.

بسم الله الرحمن الرحيم.

الاختبار النهائي لمقرر (٤٢٣) ريض — الزمن: ثلاث ساعات.

الفصل الثاني عام ١٤١٧هـ. — اليوم السبت في ١٣/٢/١٤١٧هـ

السؤال الأول: أ) لإيجاد حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$xy\frac{\partial z}{\partial x} - x^2\frac{\partial z}{\partial y} + yz = 0 \qquad (1)$$

استخدم تحويلات مناسبة $\xi = \xi(x,y)$ ، $\eta = \eta(x,y)$

حيث $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$ على منطقة مناسبة R في المستوى xy.

بهذه التحويلات تصبح المعادلة (1) بالشكل الآتي:

$$A z_\xi + C z = 0 \qquad (2)$$

حيث A و C دوال في (ξ, η).

أوجد حل المعادلة (2) ومن ثم استنتج حل المعادلة (1).

ب) أوجد حل مسألة كوشي الآتية:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xyz$$

حيث $z=1$ على المنحنى $y = x^2$.

السؤال الثاني: أوجد حل المعادلة الآتية:

$$(z-y)u_x + y u_y - z u_z = y(x+z) - y^2.$$

السؤال الثالث: أ) لنعتبر المعادلة التفاضلية الآتية:

$$Lz = A z_{xx} + 2B z_{xy} + C z_{yy} + M(x,y,z,z_x,z_y) = 0$$

حيث A ، B ، C دوال حقيقية تنتمي الى $C^2(R)$ ، حيث R منطقة من $\mathbb{R}^2$ والدوال A ، B و C لا تنعدم بآن واحد على R.

نفرض ان $\xi = \xi(x,y)$ ، $\eta = \eta(x,y)$ تحويلات

تابع في الصفحة الآتية.

جامعة الملك سعود

كلية / إدارة

الموضوع:

تنتمي الى $C^2(R)$ بحيث تكون $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$ على R، وفي هذه الحالة، المعادلة ① يتحول بالشكل الآتي:

$$L\zeta = Q(\xi)\zeta_{\xi\xi} + 2Q(\xi,\eta)\zeta_{\xi\eta} + Q(\eta)\zeta_{\eta\eta} + M^*(\xi,\eta,\zeta,\zeta_\xi,\zeta_\eta) = 0$$

حيث،

$$Q(\xi) = A(\xi_x)^2 + 2B\xi_x\xi_y + C(\xi_y)^2$$

$$Q(\xi,\eta) = A\xi_x\eta_x + 2B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + C\xi_y\eta_y$$

ولتكن R^* المنطقة الناتجة من التحويلات ξ, η.

إذا فرضنا ان L زائدي على R وان A او C لوت يساوي الصفر على R وضح أنه توجد تحويلات مناسبة احداثية ξ, η بحيث تحول المعادلة ① الى الشكل النظامي الآتي:

③ $$\zeta_{\xi\eta} + G(\xi,\eta,\zeta,\zeta_\xi,\zeta_\eta) = 0$$

ب) أوجد الشكل النظامي للمعادلة التفاضلية الآتية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \cos^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

ثم أوجد الحل العام لهذه المعادلة.

السؤال الرابع:

أ) لتكن R منطقة محدودة في الفراغ $\mathbb{R}^3$، محاطة بالسطح S $b(R) = S$

ولنفرض ان u دالة متصلة على $\bar{R} = R \cup b(R)$ وتوافقية في R. إذا لم تكن u دالة ثابتة على $\bar{R}$ برهن أن القيمة العظمى M والقيمة الصغرى m لـ u على $\bar{R}$ يجب ان تكون مأخوذة على S او بتعبير آخر: $m < u(P) < M$ لجميع $P \in R$.

ب) نفرض أن f متصلة على R، وأن g دالة متصلة على محيط R = $b(R) = R$

تابع في الصفحة الآتية

جامعة الملك سعود

كلية / إدارة

الموضوع:

بإذا كانت $u \in C^2(\bar{R})$ حلاً لمسألة ديريشليه:

$$\Delta u = f \quad \text{في } R$$

$$u = g \quad \text{على } S$$

برهن أن u يكون وحيداً.

السؤال الخامس: أوجد حل المسألة التفاضلية الآتية:

$$\Delta u = 0 \; ; \qquad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= x(x-1) \\ u(x,1) &= 0 \end{aligned}\right\} \; ; \quad 0 \le x \le 1$$

$$u(0,y) = u(1,y) = 0 \; ; \quad 0 \le y \le 1$$

$$\frac{\sinh a}{\sinh b} \le e^{a-b}$$

ثم ناقش وجود الحل. (تنبيه: الاستفادة من المتراجحة حيث $0 < a \le b$ أثناء مناقشة وجود الحل).

مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح