

تحليل الحساسية

**Sensitivity Analysis**

# تحليل الحساسية

- دراسة ما بعد إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي.
  - مدى حساسية الحل الأمثل للتغير في إحدى معطيات المسألة.
  - إلى أي مدى يمكن زيادة أو إنقاص قيمة أحد:
    - معاملات المتغيرات في دالة الهدف
    - الموارد المتاحة (الطرف الأيمن للقيود)
- ومعرفة تأثير ذلك في القرارات المتخذة و/أو قيمة دالة الهدف؟
- ندرس تأثير تغيير قيمة معلم واحد فقط، مع بقاء بقية المعالم ثابتة.

# تحليل الحساسية

- **القيد الرابط:**

يكون أحد القيود قيداً رابطاً للحل الأمثل  $(x_1^*, x_2^*)$  إذا كان هذا القيد محققاً في صورة مساواة عند قيم متغيرات القرار الأمثل.

- **القيد الغير الرابط:**

يكون أحد القيود قيداً غير رابطاً للحل الأمثل  $(x_1^*, x_2^*)$  إذا كان هذا القيد غير متحقق في صورة مساواة عند قيم متغيرات القرار الأمثل.

- **المورد النادر:** مورد القيد الرابط يعتبر نادراً، لأنه تم استهلاكه كاملاً.

- **المورد المتوفر:** مورد القيد غير الرابط يعتبر متوفراً، لأنه لم يتم استهلاكه كاملاً.

# تحليل الحساسية

مثال: مسألة إنتاج الدهانات التي تم صياغتها سابقاً.

$$\max z = 3000x_1 + 2000x_2$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

# تحليل الحساسية

$$\text{الحل الأمثل: } x_1^* = \frac{10}{3} \text{ and } x_2^* = \frac{4}{3}$$

نقوم بالتعويض في القيود:

$$x_1^* + 2x_2^* = 6$$

قيود رابط ، مورد نادر

$$2x_1^* + x_2^* = 8$$

قيود رابط ، مورد نادر

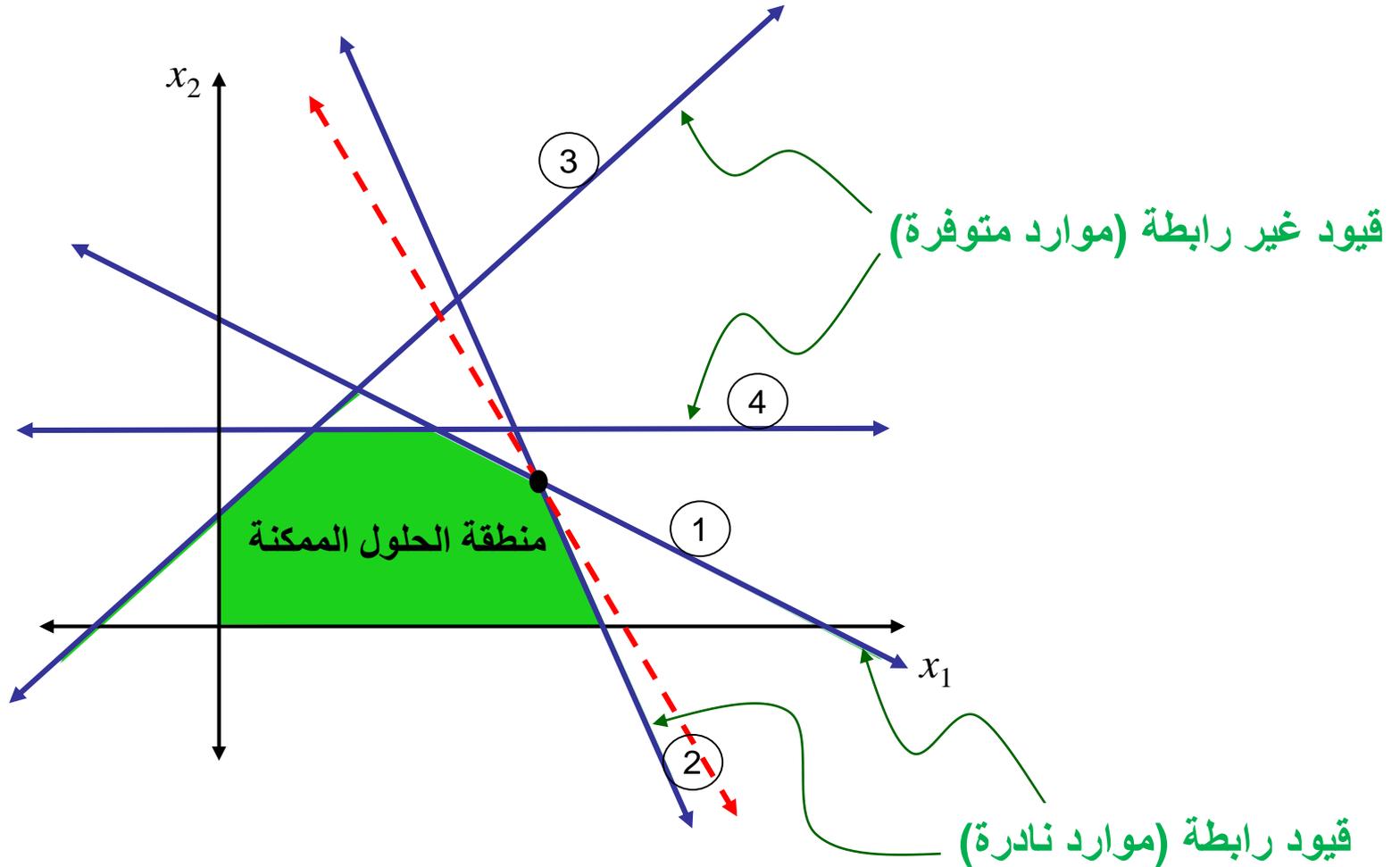
$$-x_1^* + x_2^* = -2 < 1$$

قيود غير رابط ، مورد متوفر

$$x_2^* = \frac{4}{3} = 1.333 < 2$$

قيود غير رابط ، مورد متوفر

# تحليل الحساسية



# تحليل الحساسية

لنفرض أن دالة الهدف  $\max z$  وجميع القيود من نوع " $\leq$ " أقل من أو يساوي

- الزيادة في الموارد النادرة ستؤدي إلى تحسين دالة الهدف.

**السؤال 1:** إلى أي مدى يمكن زيادة أحد الموارد النادرة لتحسين دالة الهدف؟

- النقصان في الموارد المتوفرة سيؤدي إلى توفير الاستهلاك.

**السؤال 2:** إلى أي مدى يمكن إنقاص أحد الموارد المتوفرة دون التأثير على دالة الهدف؟

# تحليل حساسية الموارد النادرة

مثال: مسألة إنتاج الدهانات: المادة الخام B تعتبر مورد نادر.  
ما مدى تأثير زيادة طن واحد من المادة الخام B على دالة الهدف؟

$$\max z = 3000x_1 + 2000x_2$$

s.t.

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (1)$$

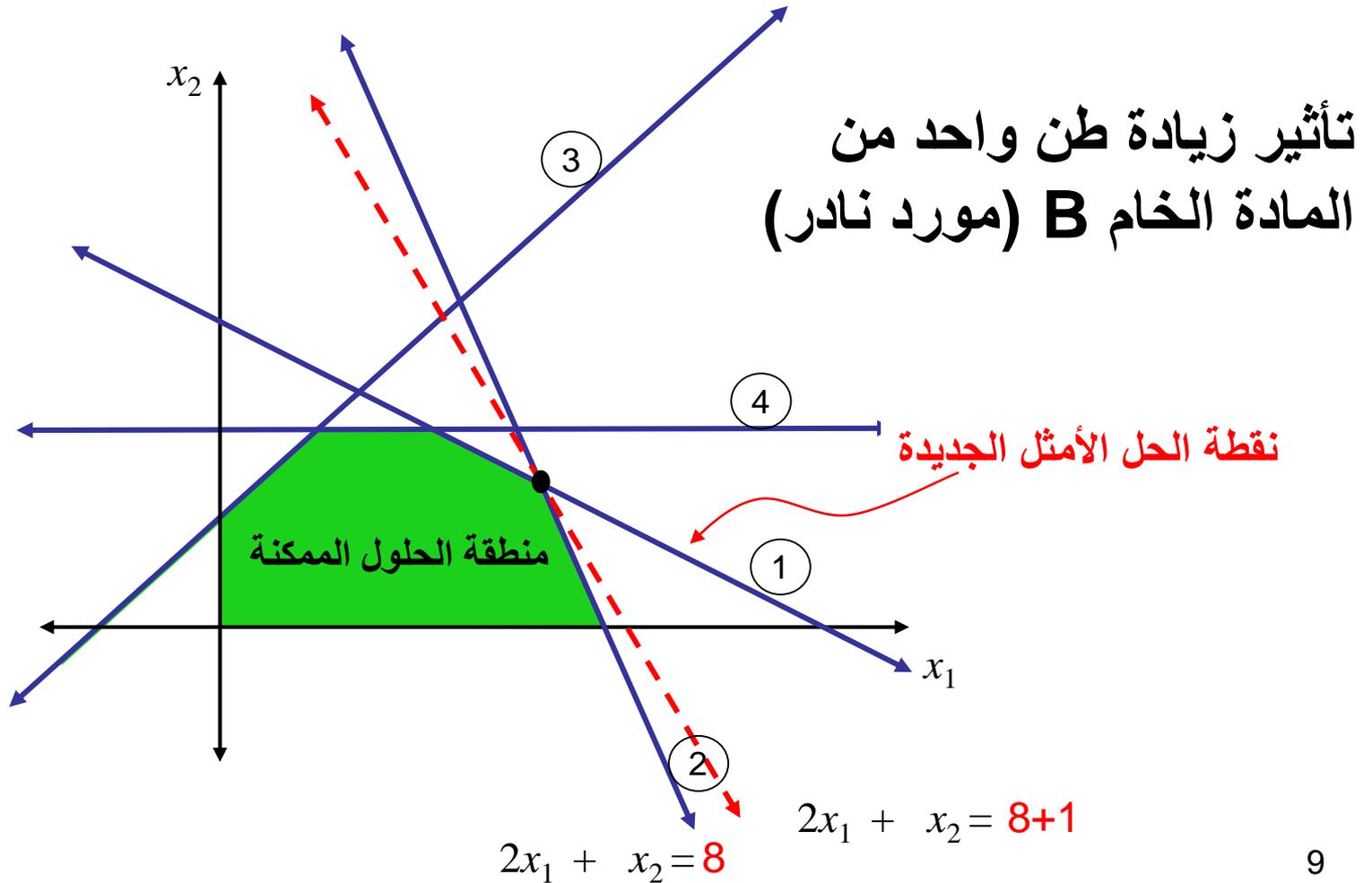
$$2x_1 + x_2 \leq 8+1 \quad (2)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1 \quad (3)$$

$$x_2 \leq 2 \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0 \text{ و } x_2 \geq 0$$

# تحليل حساسية الموارد النادرة



# تحليل حساسية الموارد النادرة

نقطة الحل الأمثل الجديدة ستكون عند تقاطع المستقيمين:

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$2x_1 + x_2 = 8+1 = 9$$

$$x_1^* = 4 \quad , \quad x_2^* = 1 \quad , \quad z^* = 14000$$

تأثير زيادة طن واحد من المادة الخام B

$$= z_{\text{new}}^* - z_{\text{old}}^* = 14000 - 12666.67 = 1333.34 \text{ SR}$$

هذه القيمة تسمى سعر الظل للمورد الخام B

# تحليل حساسية الموارد النادرة

**سؤال:** ما مقدار أقصى زيادة اقتصادية من أحد الموارد النادرة لتحسين دالة الهدف؟

زيادة اقتصادية  $\Leftrightarrow$  كافة الكمية المتاحة من المورد تستهلك بدون فائض

**الجواب:** إيجاد أبعد مسافة يمكن بها إزاحة قيد استهلاك المورد بحيث تحدث تغيراً في منطقة فضاء الحلول.

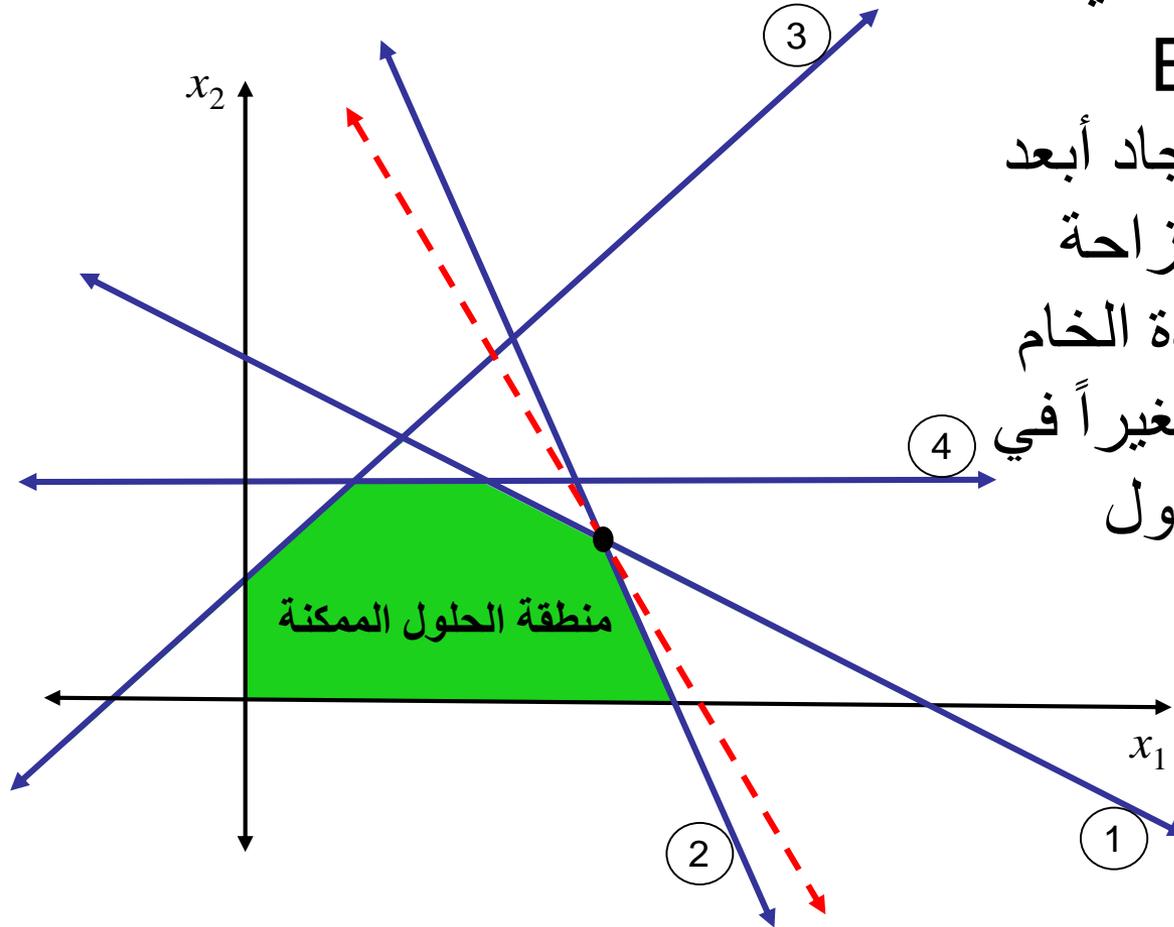
# تحليل حساسية الموارد النادرة

## من الموارد النادرة: المادة الخام B

**سؤال:** ما مقدار أقصى زيادة اقتصادية من المادة الخام B لتحسين دالة الهدف؟

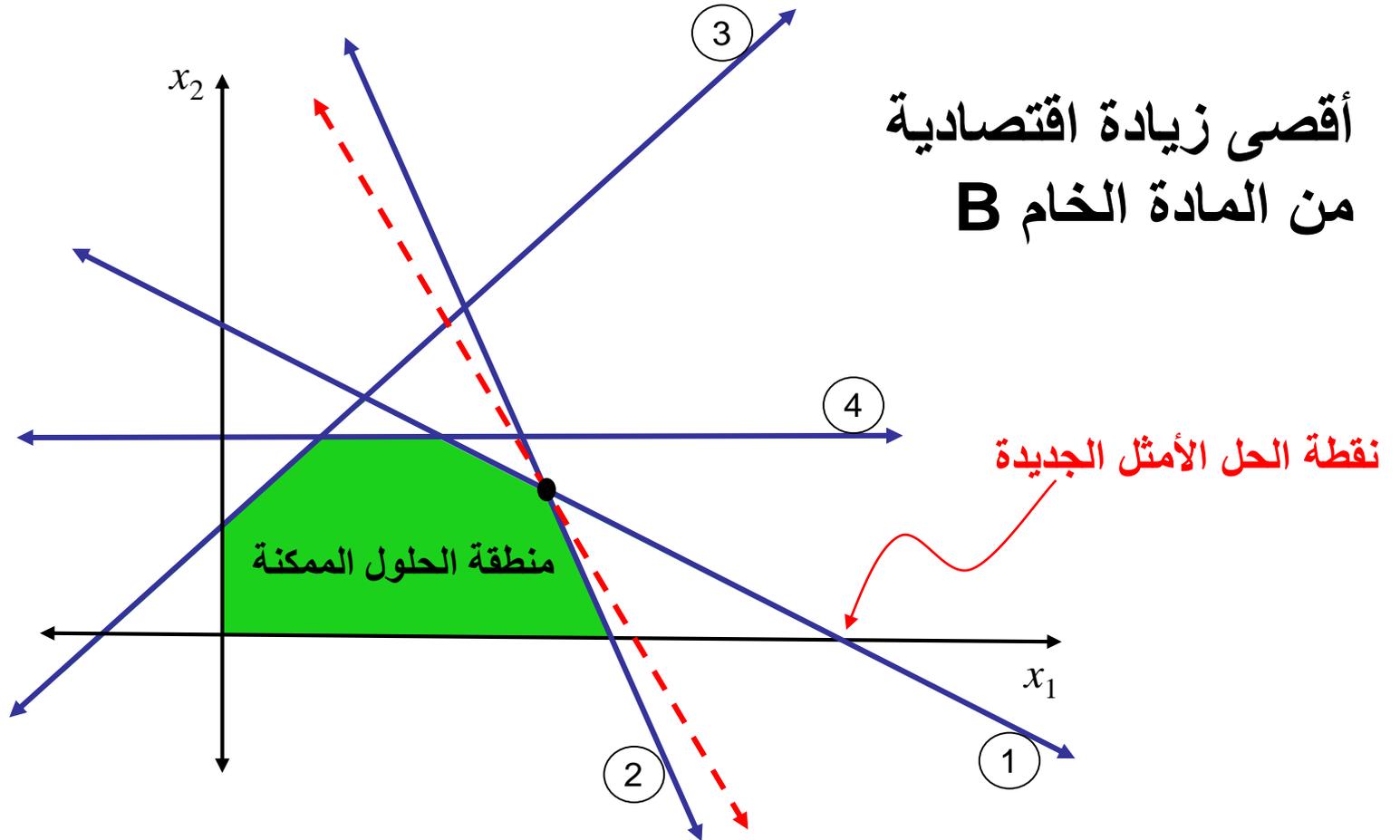
**الجواب:** إيجاد أبعد مسافة يمكن بها إزاحة قيد استهلاك المادة الخام B بحيث تحدث تغييراً في منطقة فضاء الحلول.

# تحليل حساسية الموارد النادرة

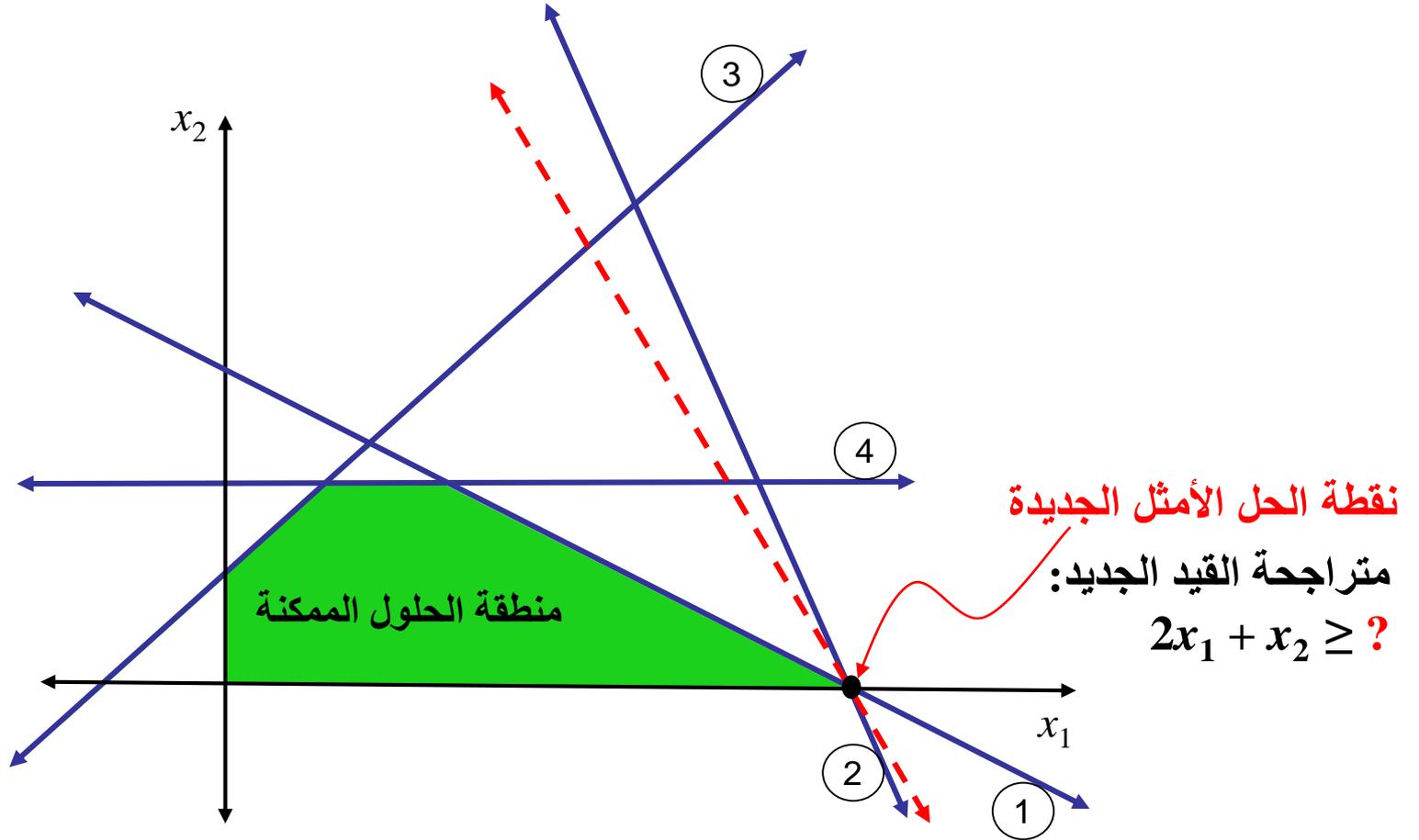


أقصى زيادة اقتصادية  
من المادة الخام B  
نحصل عليها بإيجاد أبعد  
مسافة يمكن بها إزاحة  
قيد استهلاك المادة الخام  
B بحيث تحدث تغيراً في  
منطقة فضاء الحلول

# تحليل حساسية الموارد النادرة



# تحليل حساسية الموارد النادرة



# تحليل حساسية الموارد النادرة

الحل الأمثل الجديد ( عند تقاطع المستقيم (1) مع المستقيم  $x_2 = 0$  ):

$$x_1^* = 6 , x_2^* = 0 , z^* = 18000$$

القيد الجديد للمادة الخام B هو:  $2x_1 + x_2 \leq ?$

بتعويض الحل الأمثل الجديد ( $x_1^* = 6 , x_2^* = 0$ ) في القيد كما يلي:

$$2(6) + (0) = 12$$

إذاً القيد الخطي الجديد هو:  $2x_1 + x_2 \leq 12$

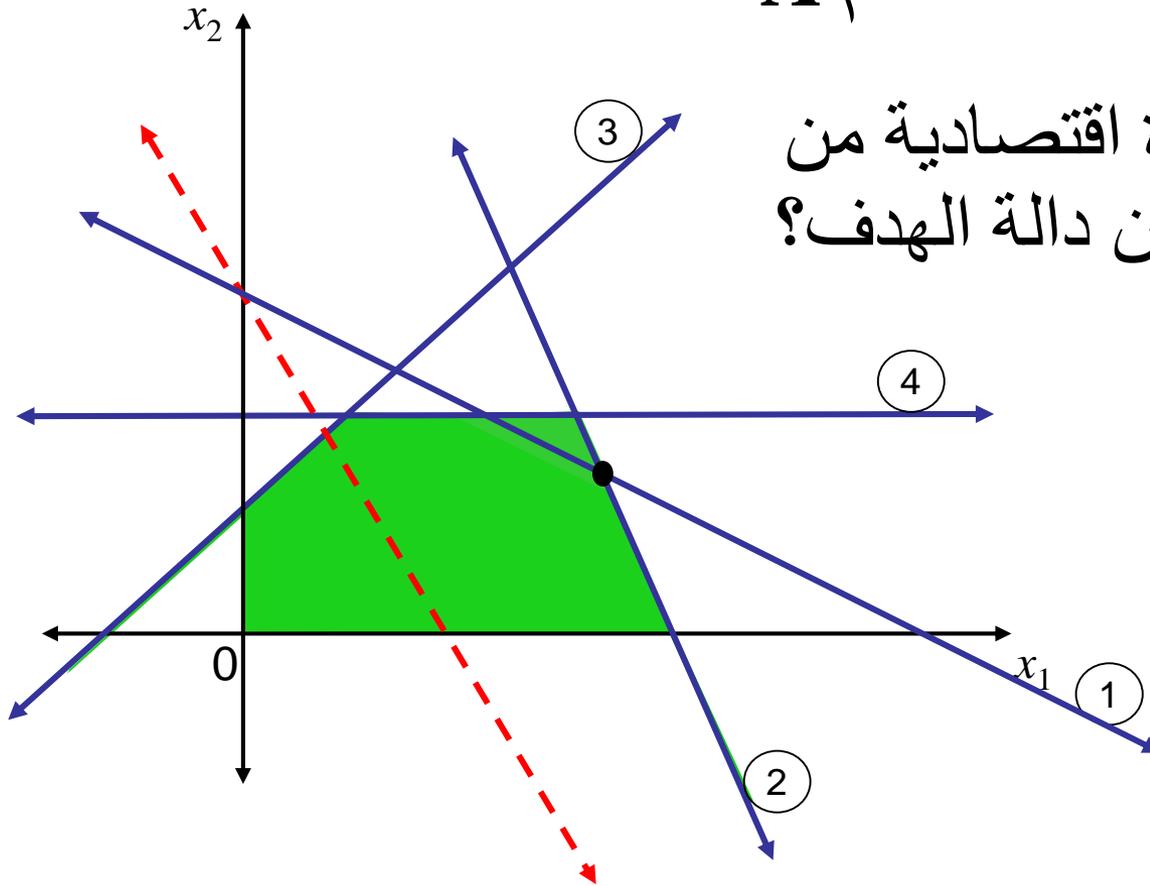
الحد الأعلى للمادة الخام B عند الحل الأمثل الجديد = 12 طن

وأقصى زيادة اقتصادية للمادة الخام B =  $8 - 12 = 4$  أطنان

# تحليل حساسية الموارد النادرة

من الموارد النادرة: المادة الخام A

ما مقدار أقصى زيادة اقتصادية من  
المادة الخام A لتحسين دالة الهدف؟



# تحليل حساسية الموارد النادرة

الحل الأمثل الجديد ( عند تقاطع المستقيم (2) مع المستقيم (4) ):

$$x_1^* = 3 , x_2^* = 2 , z^* = 13000$$

القيد الجديد للمادة الخام A هو:  $x_1 + 2x_2 \leq ?$

بتعويض الحل الأمثل الجديد ( $x_1^* = 3 , x_2^* = 2$ ) في القيد كما يلي:

$$(3) + 2(2) = 7$$

إذاً القيد الخطي الجديد هو:  $x_1 + 2x_2 \leq 7$

الحد الأعلى للمادة الخام A عند الحل الأمثل الجديد = 7 طن

وأقصى زيادة اقتصادية للمادة الخام  $A = 6 - 7 = 1$  طن

# أسعار الظل (Shadow Prices)

سعر الظل للمورد = القيمة الاقتصادية للوحدة الإضافية من المورد

$$\frac{Z_{\text{new}}^* - Z_{\text{old}}^*}{\text{أكبر زيادة اقتصادية ممكنة للمورد}} =$$

$Z_{\text{new}}^*$  = قيمة دالة الهدف بعد إضافة الوحدات الإضافية من المورد

$Z_{\text{old}}^*$  = قيمة دالة الهدف بدون إضافة أي وحدات إضافية من المورد

- زيادة قيمة المورد النادر يحسن قيمة دالة الهدف.
- سعر الظل للمورد المتوفر = صفر.

# أسعار الظل

القيمة الاقتصادية للوحدة الزائدة من المادة الخام A:  
إذا أمكن شراء وحدات إضافية من المادة الخام A فما هو أعلى سعر  
شراء ذو منفعة للوحدة الواحدة؟

$$z_{\text{new}}^* = 13000$$

$$z_{\text{old}}^* = 12666.67$$

$$\frac{13000 - 12666.67}{1} = \text{قيمة الوحدة الإضافية للمادة A}$$

$$= 333.33 \text{ ريال للطن}$$

# أسعار الظل

القيمة الاقتصادية للوحدة الزائدة من المادة الخام B:  
إذا أمكن شراء وحدات إضافية من المادة الخام B فما هو أعلى سعر  
شراء ذو منفعة للوحدة الواحدة؟

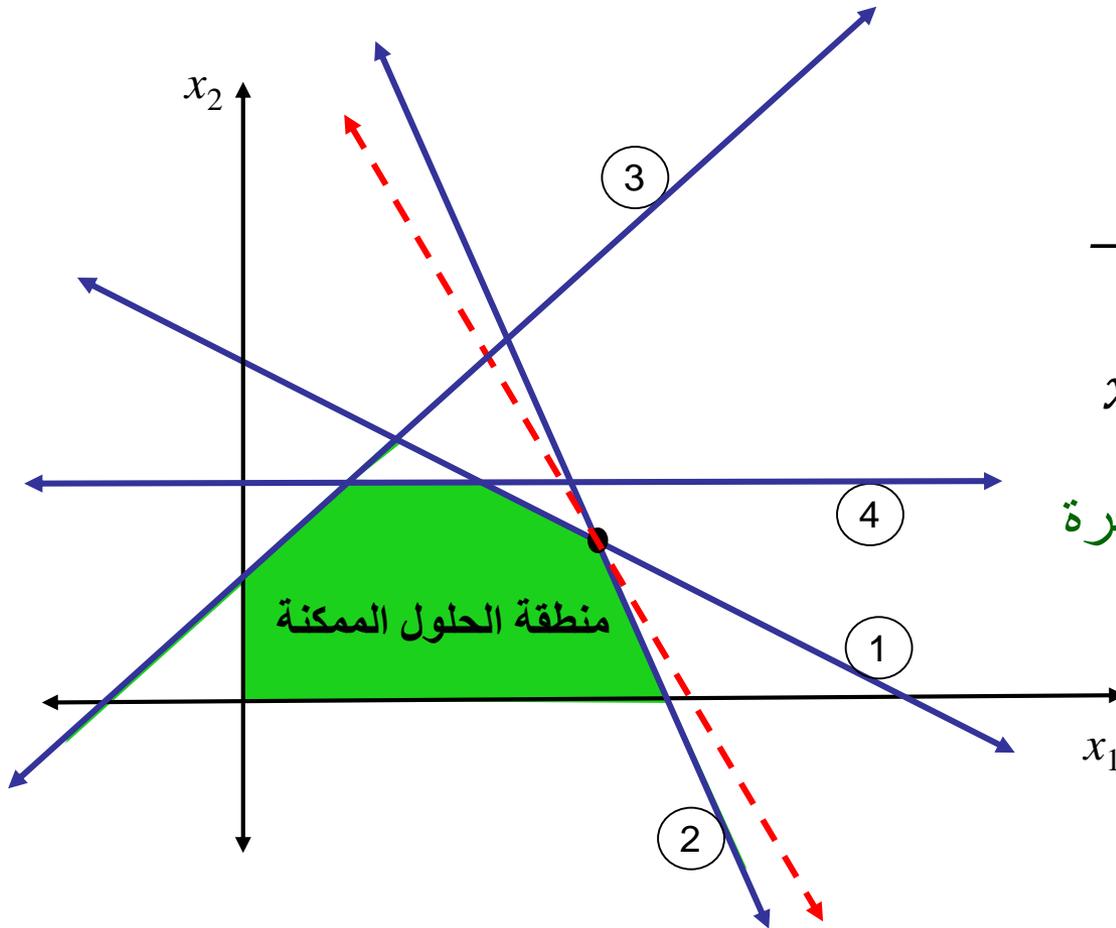
$$z_{\text{new}}^* = 18000$$

$$z_{\text{old}}^* = 12666.67$$

$$\frac{18000 - 12666.67}{4} = \text{قيمة الوحدة الإضافية للمادة B}$$

$$= 1333.33 \text{ ريال للطن}$$

# تحليل حساسية الموارد المتوفرة



الحل الأمثل:

$$x_1^* = \frac{10}{3} \text{ and } x_2^* = \frac{4}{3}$$

$$-x_1^* + x_2^* = -2 < 1 \quad (3)$$

$$x_2^* = \frac{4}{3} = 1.33 < 2 \quad (4)$$

موارد القيد الثالث والرابع متوفرة

# تحليل حساسية الموارد المتوفرة

## سؤال:

إلى أي مدى يمكن إنقاص المورد الوفير بحيث يبقى الحل الأمثل دون تغيير؟

## الجواب:

الحد الأقصى للتناقص في أي مورد من الموارد الوفيرة هو إزاحة القيد الوفير باتجاه نقطة الحل الأمثل حتى يصل إلى نقطة الحل الأمثل.

# تحليل حساسية الموارد المتوفرة

مورد القيد الثالث متوفر:

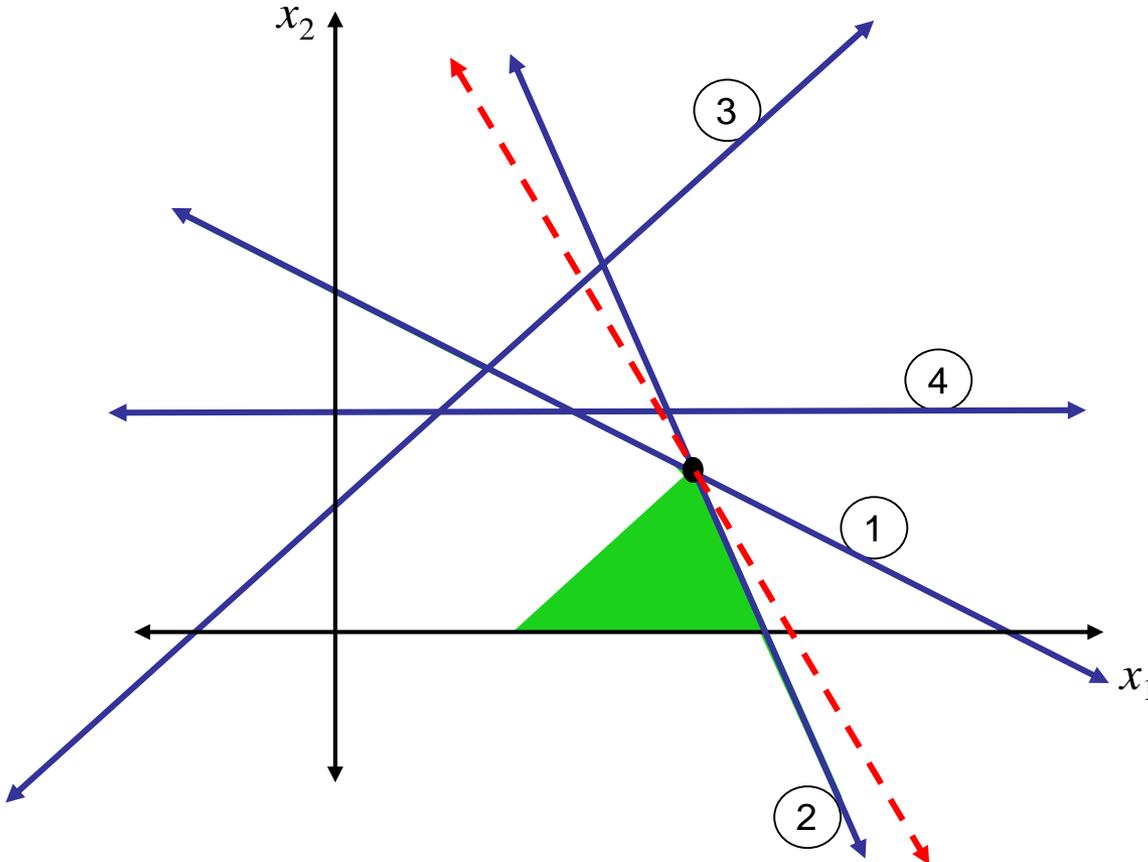
$$x_1^* = \frac{10}{3} \text{ and } x_2^* = \frac{4}{3}$$
$$-x_1^* + x_2^* = -2 < 1 \quad (3)$$

يمكن للطرف الأيمن أن ينقص

بمقدار 3 :  $(1 - (-2) = 3)$

ليصبح القيد:

$$-x_1^* + x_2^* \leq -2$$



# تحليل حساسية الموارد المتوفرة

مورد القيد الرابع متوفر:

$$x_1^* = \frac{10}{3} \text{ and } x_2^* = \frac{4}{3}$$

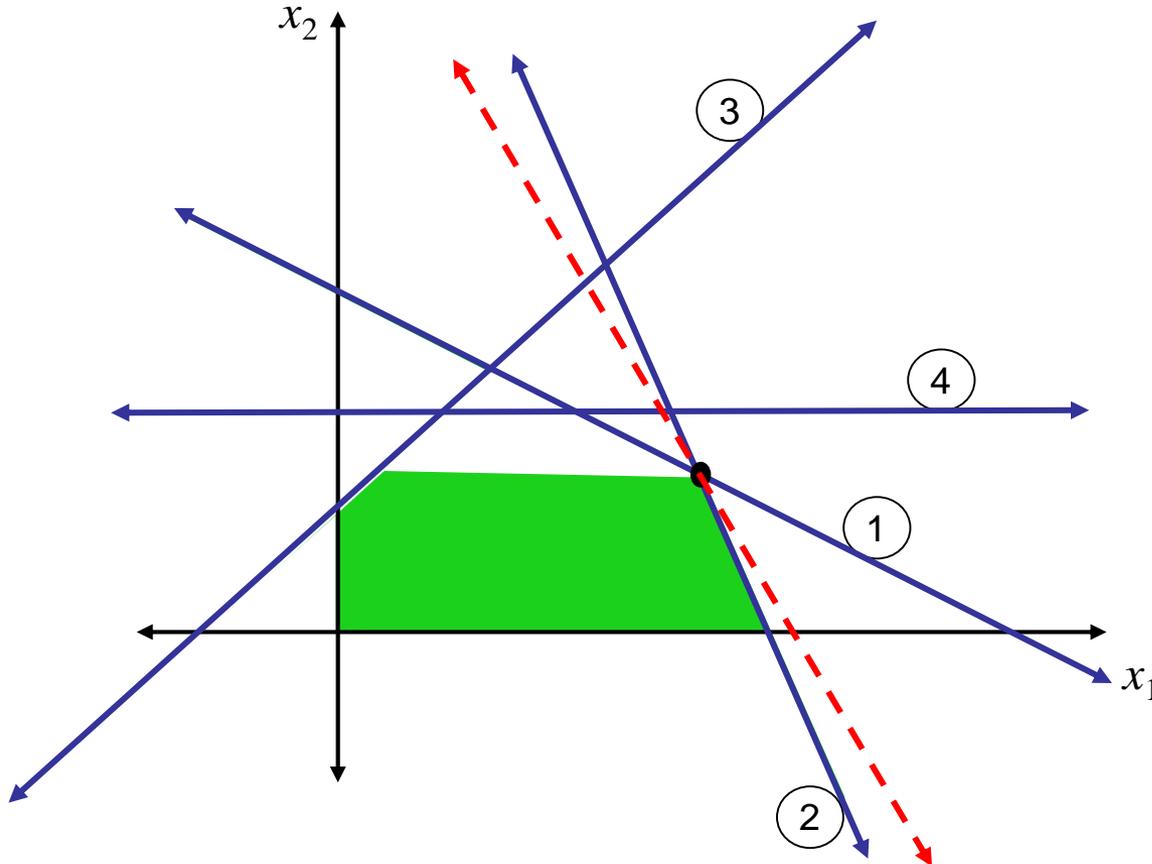
$$x_2^* = \frac{4}{3} = 1.33 < 2 \quad (4)$$

يمكن للطرف الأيمن أن ينقص

$$\text{بمقدار } \frac{2}{3} : \left(2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}\right)$$

ليصبح القيد:

$$x_2^* \leq \frac{4}{3}$$



# تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

ليكن لدينا مستقيم دالة الهدف:  $z = c_1x_1 + c_2x_2 = k$  حيث أن  $k, c_1, c_2 \neq 0$  ثوابت.

$$x_2 = -\frac{c_1}{c_2}x_1 + \frac{k}{c_2} \quad \text{أو}$$

ميل مستقيم دالة الهدف:  $-\frac{c_1}{c_2}$

التغير في قيمة أحد المعالم  $c_1$  أو  $c_2 \Leftrightarrow$  التغير في ميل دالة الهدف

# تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

قاعدة 1:

عند ضرب أو قسمة طرفي مترابحة بعدد سالب، نعكس اتجاه المترابحة. لأي ثوابت حقيقية  $a, b$ :

$$-1 \times (a \leq b) \Rightarrow -a \geq -b$$

$$-1 \times (a \geq b) \Rightarrow -a \leq -b$$

$$-1 \times (-1 \leq -a \leq 2) \Rightarrow 1 \geq a \geq -2$$

وتكافئ:  $-2 \leq a \leq 1$

مثال:

# تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

## قاعدة 2:

لأي ثوابت حقيقية  $a, b, c, d$  ، بحيث تكون جميعها موجبة أو جميعها سالبة، إذا قلبنا (عكسنا) طرفي المتراجحة ، نعكس اتجاه المتراجحة:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} \geq \frac{d}{c}$$

$$\frac{3}{4} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \geq \frac{2}{3}$$

$$-2 \leq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \geq -4$$

أمثلة:

# تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

سنكتفي بحالة عندما تكون القيود الرابطة ذات ميل سالب

سؤال:

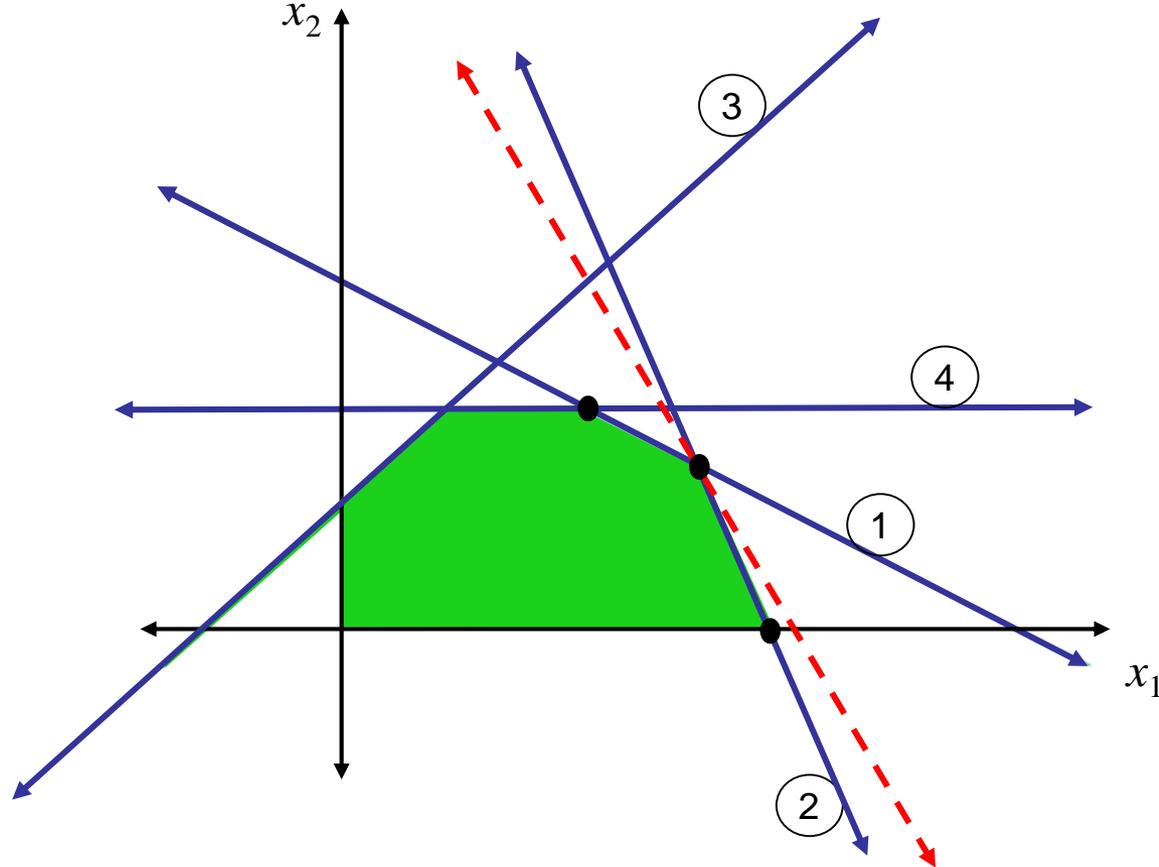
حدد المجال الذي يمكن أن يتغير فيه قيمة أحد المعالم  $c_1$  أو  $c_2$  دون أن يتغير الحل الأمثل.

الجواب:

لا يتغير الحل الأمثل إذا كان ميل دالة الهدف **محصور** بين ميل القيود الرابطة عند الحل الأمثل.

# تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

- التغير في أحد معالم دالة الهدف  $\Leftrightarrow$  التغير في ميل دالة الهدف



# تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

## مثال الدهانات:

لا يتغير الحل الأمثل  $x_1^* = \frac{10}{3}$ ,  $x_2^* = \frac{4}{3}$  مع تغير الأسعار إذا كان ميل دالة الهدف محصور بين ميل القيد (1) وميل القيد (2).

$$\text{ميل دالة الهدف } 3000x_1 + 2000x_2 = -\frac{3000}{2000} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{ميل القيد (1): } x_1 + 2x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ميل القيد (2): } 2x_1 + x_2 = -\frac{2}{1}$$

لا يتغير القرار الأمثل إذا كان :  $-2 \leq \text{slope } z \leq -\frac{1}{2}$

# تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

$$z = 3000x_1 + 2000x_2 \quad \text{دالة الهدف:}$$

$$c_1 = 3000 \quad (\text{سعر الطن من الدهان الخارجي})$$

$$c_2 = 2000 \quad (\text{سعر الطن من الدهان الداخلي})$$

## سؤال:

(أ) حدد المجال الذي يمكن أن يتغير فيه المعلم  $c_1$  فقط دون أن يتغير الحل المثلي.

(ب) حدد المجال الذي يمكن أن يتغير فيه المعلم  $c_2$  فقط دون أن يتغير الحل المثلي.

# تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

## جواب:

أ) فترة التغير السعري للطن من الدهان الخارجي  $c_1$  (مع بقاء بقية المعالم ثابتة) بحيث يبقى الحل الأمثل ثابتا هو:

$$-2 \leq -\frac{c_1}{2000} \leq -\frac{1}{2}$$

$$2 \geq \frac{c_1}{2000} \geq \frac{1}{2}$$

$$4000 \geq c_1 \geq 1000$$

وتكتب عادة:  $1000 \leq c_1 \leq 4000$

# تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

## جواب:

(ب) فترة التغير السعري للطن من الدهان الخارجي  $c_2$  (مع بقاء بقية المعالم ثابتة)

بحيث يبقى الحل الأمثل ثابتا هو:

$$-2 \leq -\frac{3000}{c_2} \leq -\frac{1}{2}$$

$$2 \geq \frac{3000}{c_2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{c_2}{3000} \leq 2$$

$$1500 \leq c_2 \leq 6000$$

# تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

$$a \leq \text{slope } z \leq b$$

$$a \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq b$$

ونحصل على:

$$-bc_2 \leq c_1 \leq -ac_2$$

$$-\frac{1}{a}c_1 \leq c_2 \leq -\frac{1}{b}c_1$$

# تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

$$-2 \leq \text{slope } z \leq -0.5$$

$$-2 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -0.5$$

ونحصل على:

$$0.5c_2 \leq c_1 \leq 2c_2 \quad \rightarrow \quad 1000 \leq c_1 \leq 4000$$

$$0.5c_1 \leq c_2 \leq 2c_1 \quad \rightarrow \quad 1500 \leq c_2 \leq 6000$$

# تحليل الحساسية

مثال: للبرنامج الخطي التالي:

$$\max z = 800x_1 + 500x_2$$

s.t.

$$3x_1 + 2x_2 \leq 40 \quad \text{القيود (1)}$$

$$x_1 + 0.5x_2 \leq 8 \quad \text{القيود (2)}$$

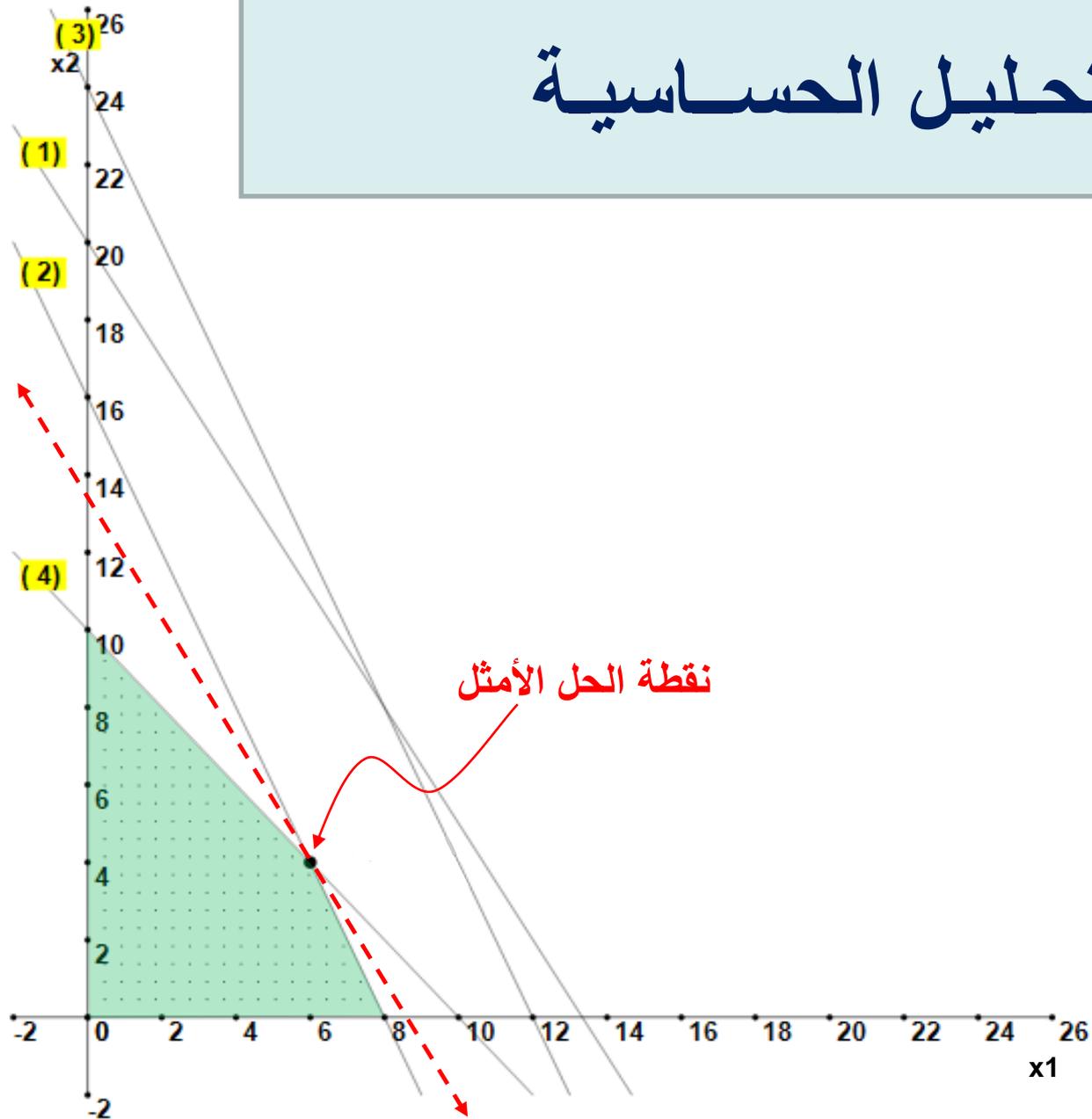
$$2x_1 + x_2 \leq 24 \quad \text{القيود (3)}$$

$$x_1 + x_2 \leq 10 \quad \text{القيود (4)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

أوجد تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف وللطرف الأيمن للقيود الخطية وأسعار الظل.

# تحليل الحساسية



# تحليل الحساسية

الحل الأمثل:

$$x_1^* = 6 , x_2^* = 4 , z^* = 6800$$

ويقع عند تقاطع القيد الثاني والرابع.

$$\text{ميل القيد (2)} = -\frac{1}{0.5} = -2$$

$$\text{ميل القيد (4)} = -\frac{1}{1} = -1$$

تحليل حساسية معاملات دالة الهدف:  $-2 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -1$

$$500 \leq c_1 \leq 1000$$

$$400 \leq c_2 \leq 800$$

# تحليل الحساسية

لمعرفة الموارد النادرة والمتوفرة:

نعوض بقيم الحل الأمثل  $x_2^* = 4$  ,  $x_1^* = 6$  في متراجحات القيود.

$$3x_1^* + 2x_2^* = 26 < 40$$

(1) قيد غير رابط ، مورد متوفر

$$x_1^* + 0.5x_2^* = 8 = 8$$

(2) قيد رابط ، مورد نادر

$$2x_1^* + x_2^* = 16 < 24$$

(3) قيد غير رابط ، مورد متوفر

$$x_1^* + x_2^* = 10 = 10$$

(4) قيد رابط ، مورد نادر

# تحليل الحساسية

الموارد النادرة: القيد (2)

الحل الأمثل الجديد سيكون:  $x_1^* = 10$  ,  $x_2^* = 0$  ,  $z^* = 8000$

نستطيع إزاحة القيد (2) ليصبح:  $x_1 + 0.5x_2 \leq 10$

أقصى زيادة اقتصادية ممكنة لمورد القيد (2) = 2

سعر الظل لمورد القيد (2) =

القيمة الاقتصادية لسعر الوحدة الإضافية من مورد القيد (2) =

$$600 = \frac{8000 - 6800}{10 - 8}$$

# تحليل الحساسية

الموارد النادرة: القيد (4)

الحل الأمثل الجديد سيكون:  $x_1^* = 0$  ,  $x_2^* = 16$  ,  $z^* = 8000$

نستطيع إزاحة القيد (4) ليصبح:  $x_1 + x_2 \leq 16$

أقصى زيادة اقتصادية ممكنة لمورد القيد (4) = 6

سعر الظل لمورد القيد (4) =

القيمة الاقتصادية لسعر الوحدة الإضافية من مورد القيد (4) =

$$200 = \frac{8000 - 6800}{16 - 10}$$

# تحليل الحساسية

الموارد المتوفرة:

يمكن إزاحة (إنقاص) القيد (1) ليصبح:

$$3x_1 + 2x_2 \leq 26$$

مقدار التوفير الاقتصادي في مورد القيد (1) = 14

يمكن إزاحة (إنقاص) القيد (3) ليصبح:

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$

مقدار التوفير الاقتصادي في مورد القيد (1) = 8

سعر الظل لمورد القيد (1) ولمورد القيد (3) = صفر.