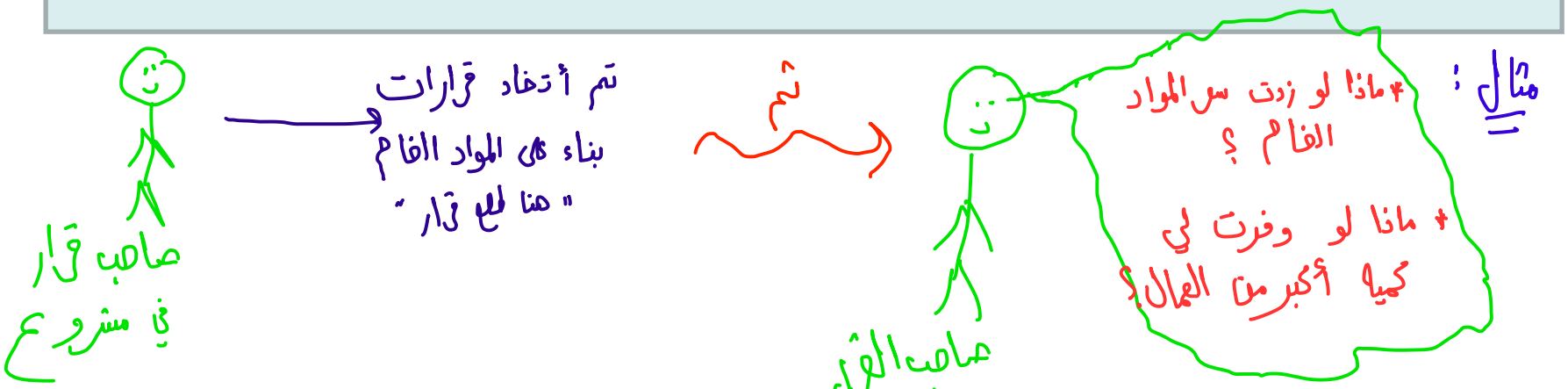
تحليل الحساسية
Sensitivity Analysis



* تحليل الحساسية: ماذا يحدث بعد أيجاد الحل الأمثل للمسألة؟

ما مدى مرونة هذا الحل أمام التغيرات.

تحليل الحساسية

- دراسة ما بعد إيجاد الحل الأمثل للبرنامج الخطي.
- مدى حساسية الحل الأمثل للتغير في إحدى معطيات المسألة.
- إلى أي مدى يمكن زيادة أو إنقاص قيمة أحد:
  - معاملات المتغيرات في دالة الهدف ← c_1 c_2
  - الموارد المتاحة (الطرف الأيمن للقيود) ← b_1 b_2 ...

ومعرفة تأثير ذلك في القرارات المتخذة و/أو قيمة دالة الهدف؟

ندرس تأثير تغيير قيمة معلم واحد فقط، مع بقاء بقية المعالم ثابتة.

البرنامج الخطي:

$$\max \text{ or } \min \quad Z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$\text{s.t} \quad x_1 + x_2 \geq b_1$$

$$x_1 + x_2 \leq b_2$$

$$=$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

تحليل الحساسية

أنواع القيود:

1. **القيد الرابط:** إذا عوضت بقيمة الحل الامثل أحصل على الطرف الأيمن

يكون أحد القيود قيداً رابطاً للحل الأمثل (x_1^* , x_2^*) إذا كان هذا القيد محققاً في صورة مساواة عند قيم متغيرات القرار الأمثل.

2. **القيد الغير الرابط:** إذا عوضت بقيمة الحل الامثل لا أحصل على الطرف الأيمن

يكون أحد القيود قيداً غير رابطاً للحل الأمثل (x_1^* , x_2^*) إذا كان هذا القيد غير متحقق في صورة مساواة عند قيم متغيرات القرار الأمثل.

- **المورد النادر:** مورد القيد الرابط يعتبر نادراً، لأنه تم استهلاكه كاملاً.
- **المورد المتوفر:** مورد القيد غير الرابط يعتبر متوفراً، لأنه لم يتم استهلاكه كاملاً.

تحليل الحساسية

مثال: مسألة إنتاج الدهانات التي تم صياغتها سابقاً.

$$\max \quad z = 3000x_1 + 2000x_2$$

s.t.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 &\le 8 \\ -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_2 &\le 2 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

تحليل الحساسية

الحل الأمثل: $x_1^* = \frac{10}{3}$ and $x_2^* = \frac{4}{3}$ and $z^* = 12666.67$

نقوم بالتعويض في القيود: أحد نوع القيود :

$x_1^* + 2x_2^* = 6 = 6$ قيد رابط ، مورد نادر

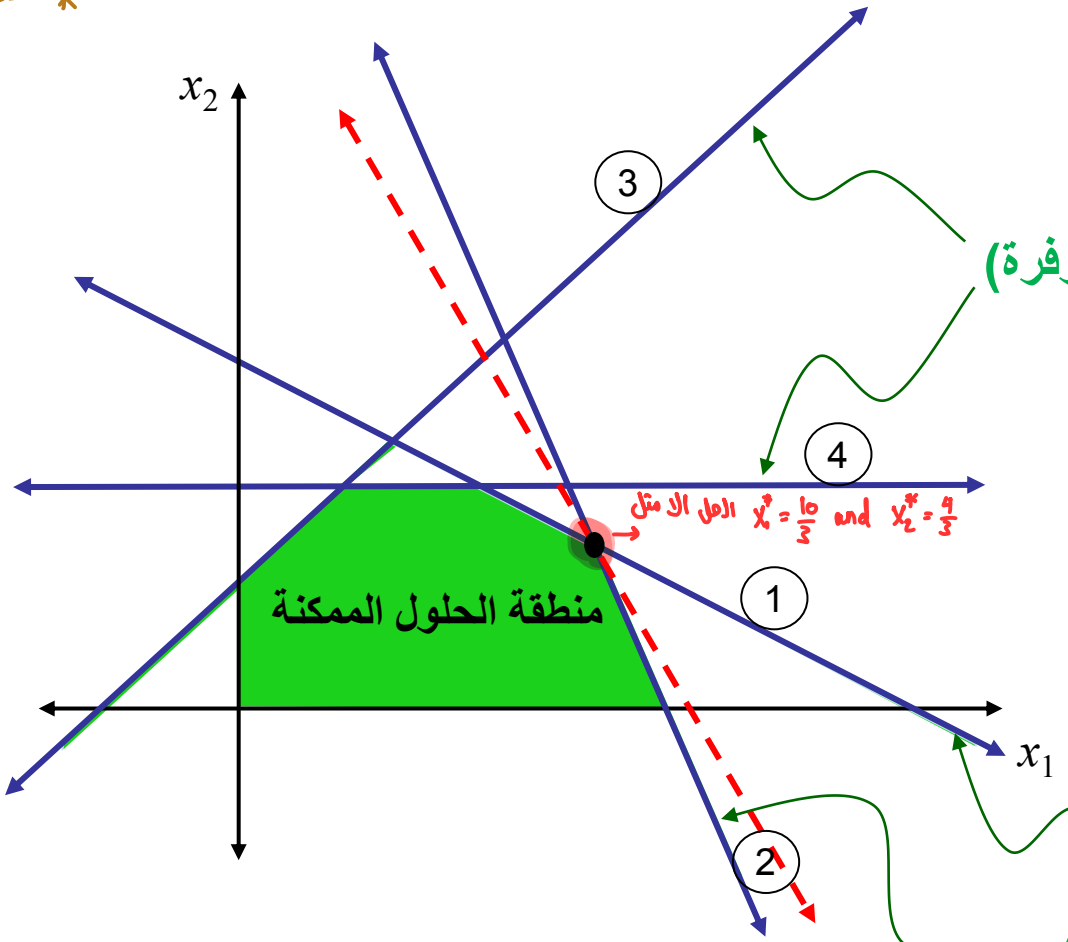
$2x_1^* + x_2^* = 8 = 8$ قيد رابط ، مورد نادر

$-x_1^* + x_2^* = -2 < 1$ قيد غير رابط ، مورد متوفر

$x_2^* = \frac{4}{3} = 1.333 < 2$ قيد غير رابط ، مورد متوفر

تحليل الحساسية

* الحل الامثل دائماً يكون عند نقاط القيود الرابطة



قيود غير رابطة (موارد متوفرة)

قيود رابطة (موارد نادرة)

تحليل الحساسية

لنفرض أن دالة الهدف $\max z$ وجميع القيود من نوع "$\leq$" أقل من أو يساوي

1) • الزيادة في الموارد النادرة ستؤدي إلى تحسين دالة الهدف.

السؤال 1: إلى أي مدى يمكن زيادة أحد الموارد النادرة لتحسين دالة الهدف؟

2) • النقصان في الموارد المتوفرة سيؤدي إلى توفير الاستهلاك.

السؤال 2: إلى أي مدى يمكن إنقاص أحد الموارد المتوفرة دون التأثير على دالة الهدف؟

تحليل حساسية الموارد النادرة

مثال: مسألة إنتاج الدهانات: المادة الخام B تعتبر مورد نادر.

ما مدى تأثير زيادة طن واحد من المادة الخام B على دالة الهدف؟

$$\max \quad z = 3000x_1 + 2000x_2$$

s.t.

قيد رابط ، مورد نادر (زيادة)	$x_1 + 2x_2$	≤ 6	(1)
قيد رابط ، مورد نادر (زيادة)	$2x_1 + x_2$	$\leq 8+1$	(2)
قيد غير رابط ، مورد متوفر (انقاص)	$-x_1 + x_2$	≤ 1	(3)
قيد غير رابط ، مورد متوفر (انقاص)	x_2	≤ 2	(4)

$$x_1 \geq 0 \quad \text{و} \quad x_2 \geq 0$$

تحليل حساسية الموارد النادرة

$X_1 + 2X_2 = 6$

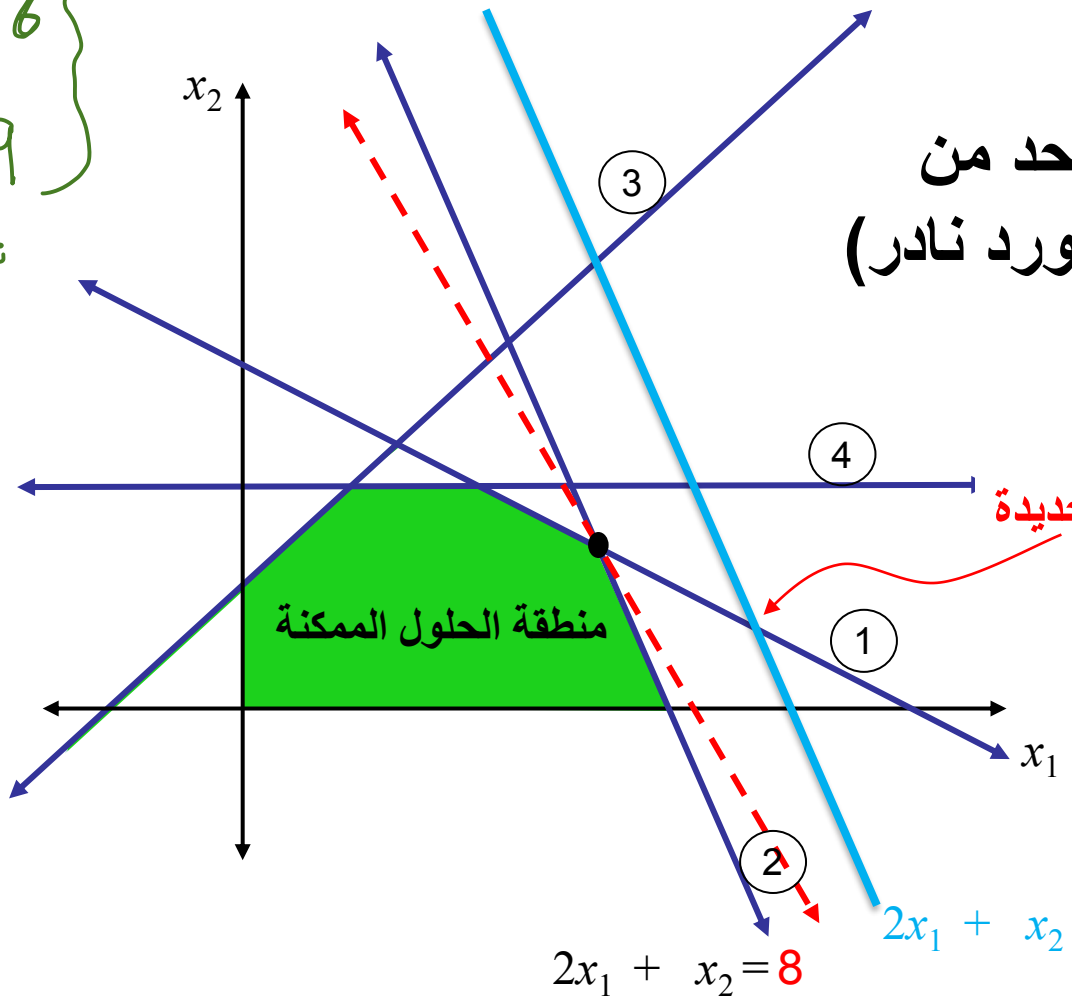
$2X_1 + X_2 = 9$

حل بالآلة الحاسبة:

$X_1 = 4$

$X_2 = 1$

(4 , 1)



تأثير زيادة طن واحد من المادة الخام B (مورد نادر)

تحليل حساسية الموارد النادرة

نقطة الحل الأمثل الجديدة ستكون عند تقاطع المستقيمين:

$$x_1 + 2x_2 = 6$$

$$2x_1 + x_2 = 8+1 = 9$$

الحل الأمثل الجديد

$$x_1^* = 4 \quad , \quad x_2^* = 1 \quad , \quad z^*_{new} = 14000$$

$Z^* = 3000 X_1^* + 2000 X_2^*$

تأثير زيادة طن واحد من المادة الخام B

$$= z^*_{new} - z^*_{old} = 14000 - 12666.67 = 1333.34 \text{ SR}$$

بعد التعويض في Z بالحل الأمثل الجديد (4,1)

قيمة Z بالحل الأمثل القديم $(\frac{10}{3}, \frac{4}{3})$

أقصى مبلغ للمنشأة أن تدفعه مقابل الحصول على طن 1 من خام B

تحليل حساسية الموارد النادرة

سؤال: ما مقدار أقصى زيادة اقتصادية من أحد الموارد النادرة لتحسين دالة الهدف؟

زيادة اقتصادية ⇔ كافة الكمية المتاحة من المورد تستهلك بدون فائض

الجواب: إيجاد أبعد مسافة يمكن بها إزاحة قيد استهلاك المورد بحيث تحدث تغيراً في منطقة فضاء الحلول.

تحليل حساسية الموارد النادرة

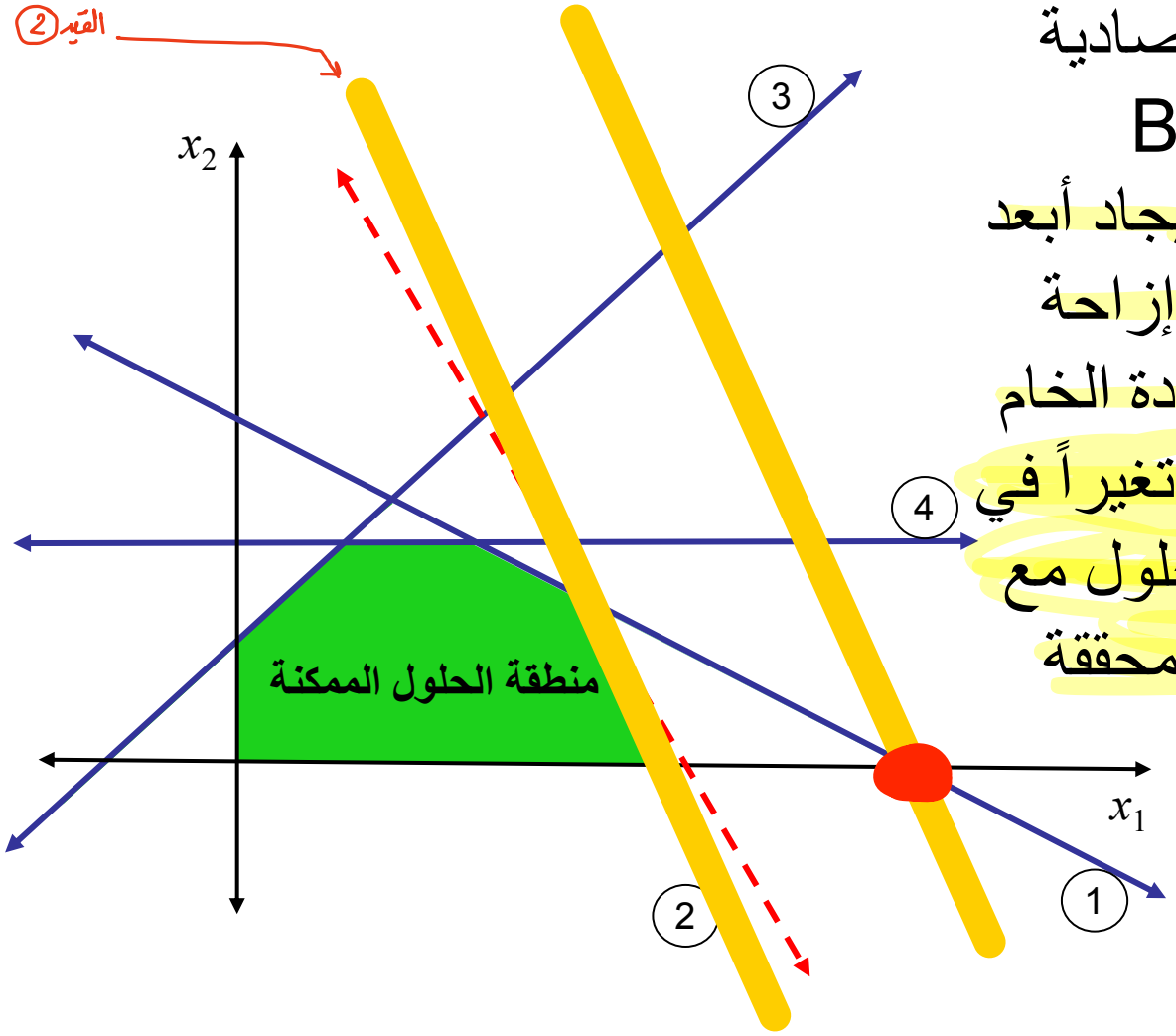
من الموارد النادرة: المادة الخام B (القيد 2)

سؤال: ما مقدار أقصى زيادة اقتصادية من المادة الخام B لتحسين دالة الهدف؟

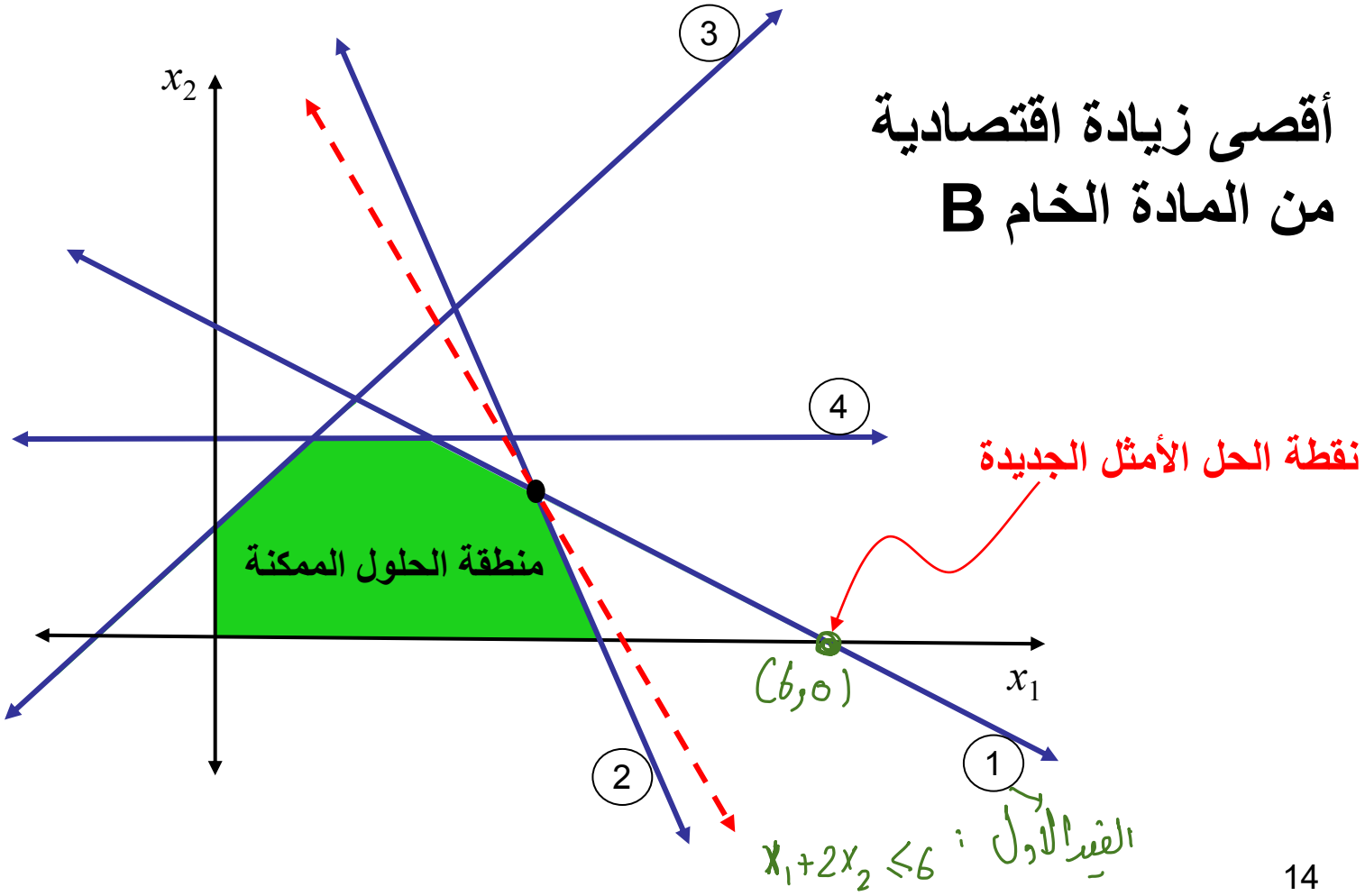
الجواب: إيجاد أبعد مسافة يمكن بها إزاحة قيد استهلاك المادة الخام B بحيث تحدث تغيراً في منطقة فضاء الحلول بحيث تكون جميع القيود الاخرى محققة.

تحليل حساسية الموارد النادرة

أقصى زيادة اقتصادية من المادة الخام B نحصل عليها بإيجاد أبعد مسافة يمكن بها إزاحة قيد استهلاك المادة الخام B بحيث تحدث تغيراً في منطقة فضاء الحلول مع بقاء باقي القيود محققة

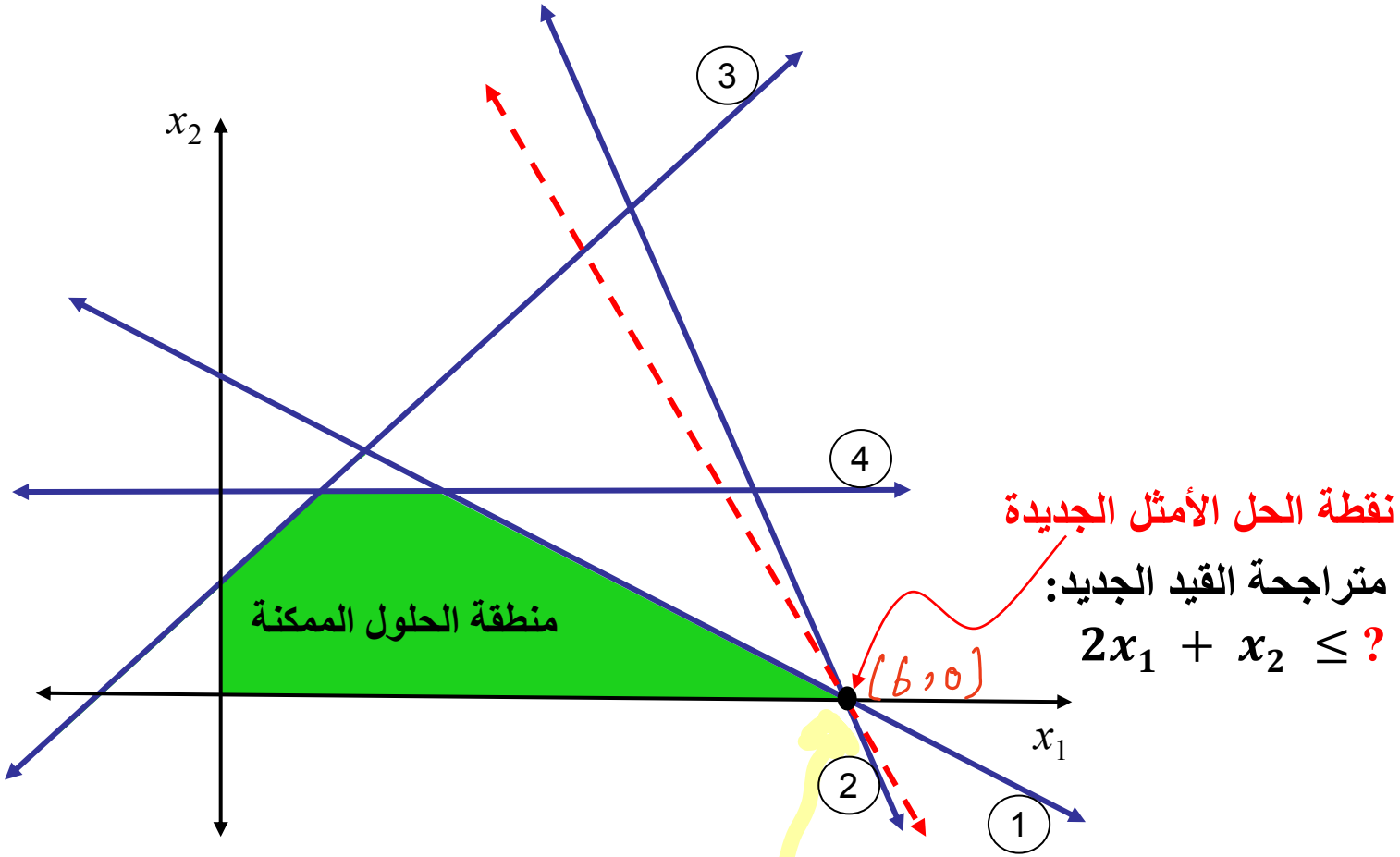


تحليل حساسية الموارد النادرة



أقصى زيادة اقتصادية من المادة الخام B

تحليل حساسية الموارد النادرة



تحليل حساسية الموارد النادرة

الحل الأمثل الجديد (عند تقاطع المستقيم (1) $[x_1 + 2x_2 = 6]$ مع المستقيم $x_2 = 0$):

$$x_1^* = 6 \ , \ x_2^* = 0 \ , \ z^* = 18000$$

القيد الجديد للمادة الخام B هو: $2x_1 + x_2 \leq \ ?$

بتعويض الحل الأمثل الجديد $(x_1^* = 6 \ , \ x_2^* = 0)$ في القيد كما يلي:

$$2(6) + (0) = 12$$

إذاً القيد الخطي الجديد هو: $2x_1 + x_2 \leq 12$

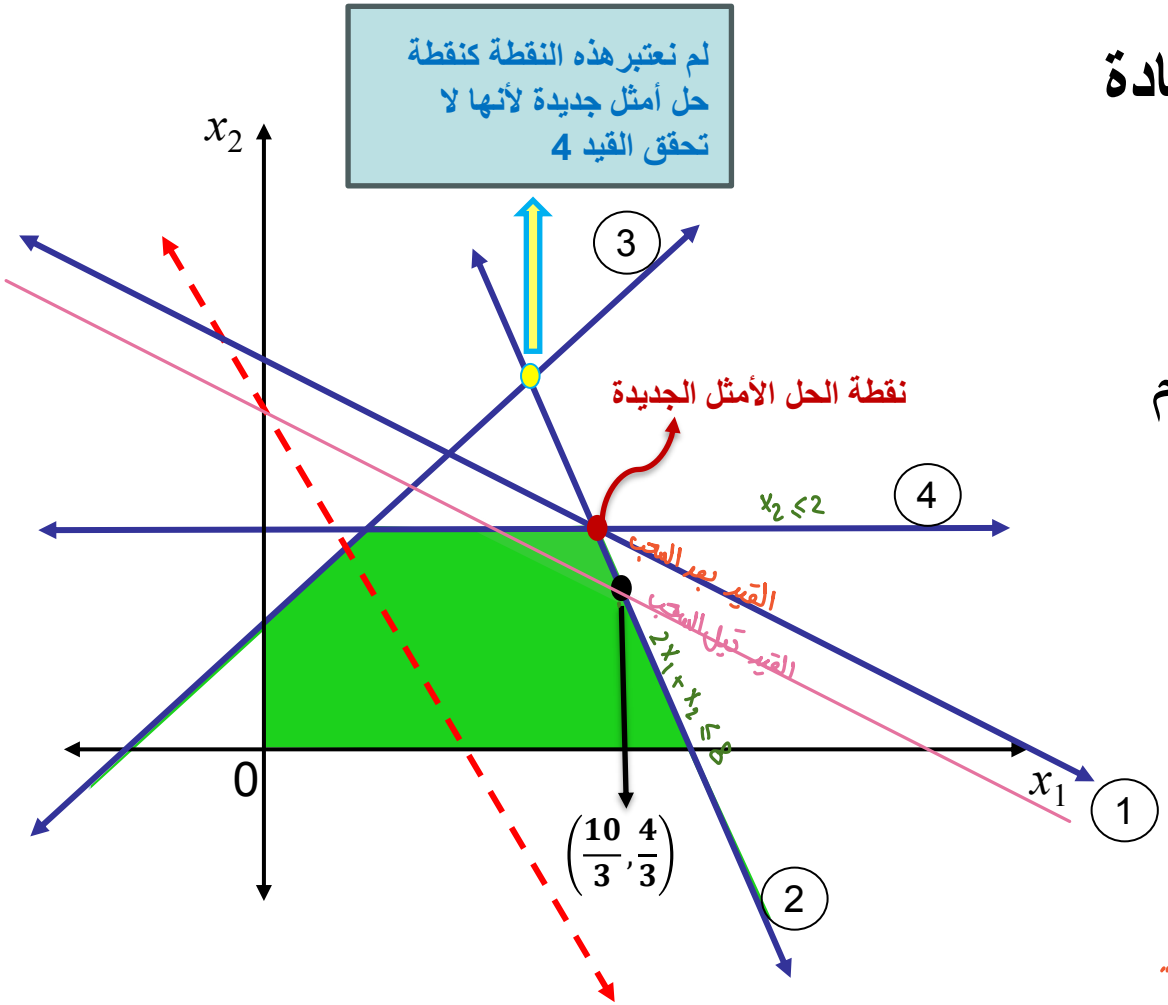
الحد الأعلى للمادة الخام B عند الحل الأمثل الجديد = 12 طن

و أقصى زيادة اقتصادية للمادة الخام B = 12 – 8 = 4 أطنان

تحليل حساسية الموارد النادرة

من الموارد النادرة: المادة الخام A (القيد 1)

ما مقدار أقصى زيادة اقتصادية من المادة الخام A لتحسين دالة الهدف؟



أقصى زيادة اقتصادية من المادة الخام A نحصل عليها بإيجاد أبعد مسافة يمكن بها إزاحة قيد استهلاك المادة الخام A بحيث تحدث تغيراً في منطقة فضاء الحلول مع بقاء باقي القيود محققة

القيد الأول ① نوع ؟ رابط مورد نادر

إذا ؟ سحب ؟ بحيث تزيد المنطقة الفضراء "منطقة الحلول"

تحليل حساسية الموارد النادرة

الحل الأمثل الجديد (عند تقاطع المستقيم (2) مع المستقيم (4)):

$$x_1^* = 3 \ , \ x_2^* = 2 \ , \ z^* = 13000$$

القيد الجديد للمادة الخام A هو: $x_1 + 2x_2 \leq ?$

بتعويض الحل الأمثل الجديد $(x_1^* = 3 \ , x_2^* = 2)$ في القيد كما يلي:

$$(3) + 2(2) = 7$$

إذاً القيد الخطي الجديد هو: $x_1 + 2x_2 \leq 7$

الحد الأعلى للمادة الخام A عند الحل الأمثل الجديد = 7 طن

وأقصى زيادة اقتصادية للمادة الخام A = 7 – 6 = 1 طن

أسعار الظل (Shadow Prices)

سعر الظل للمورد = القيمة الاقتصادية للوحدة الإضافية من المورد

$$= \frac{z^*_{new} - z^*_{old}}{\text{أكبر زيادة اقتصادية ممكنة للمورد}}$$

z^*_{new} = قيمة دالة الهدف بعد إضافة الوحدات الإضافية من المورد

z^*_{old} = قيمة دالة الهدف بدون إضافة أي وحدات إضافية من المورد

- زيادة قيمة المورد النادر يحسن قيمة دالة الهدف.
- سعر الظل للمورد المتوفر = صفر.

أسعار الظل

القيمة الاقتصادية للوحدة الزائدة من المادة الخام A:

إذا أمكن شراء وحدات إضافية من المادة الخام A فما هو أعلى سعر شراء ذو منفعة للوحدة الواحدة؟

$$z^*_{new} = 13000$$

$$z^*_{old} = 12666.67$$

قيمة الوحدة الإضافية للمادة A $= \frac{13000 - 12666.67}{1}$

$= 333.33$ ريال للطن

أسعار الظل

القيمة الاقتصادية للوحدة الزائدة من المادة الخام B:

إذا أمكن شراء وحدات إضافية من المادة الخام B فما هو أعلى سعر شراء ذو منفعة للوحدة الواحدة؟

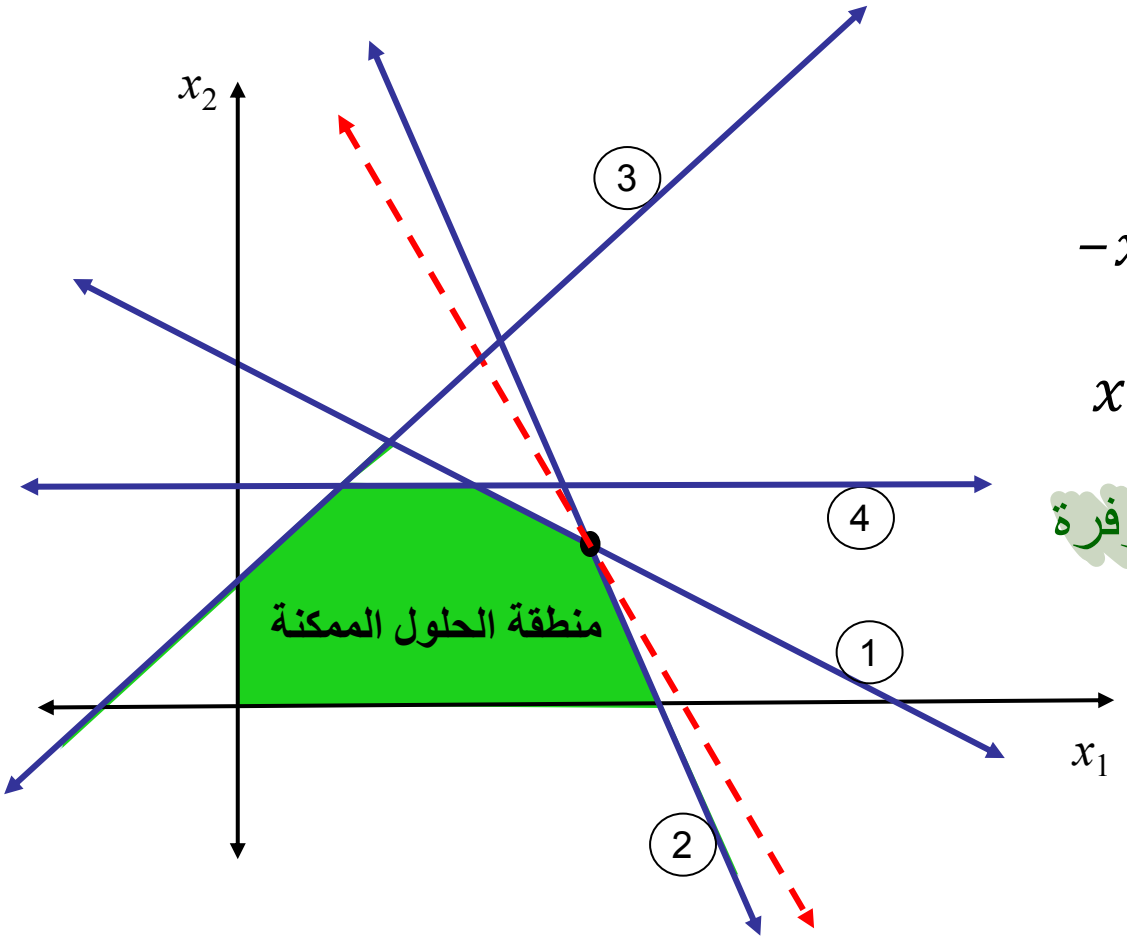
$$z^*_{new} = 18000$$

$$z^*_{old} = 12666.67$$

$$\text{قيمة الوحدة الإضافية للمادة B} = \frac{18000 - 12666.67}{4}$$

$$= 1333.33 \text{ ريال للطن}$$

تحليل حساسية الموارد المتوفرة



الحل الأمثل:

$$x_1^* = \frac{10}{3} \text{ and } x_2^* = \frac{4}{3}$$

$$-x_1^* + x_2^* = -2 < 1 \quad (3)$$

$$x_2^* = \frac{4}{3} = 1.33 < 2 \quad (4)$$

موارد القيد الثالث والرابع متوفرة

" قيود غير رابطة "

تحليل حساسية الموارد المتوفرة

سؤال:

إلى أي مدى يمكن إنقاص المورد الوفير بحيث يبقى الحل الأمثل دون تغيير؟

الجواب:

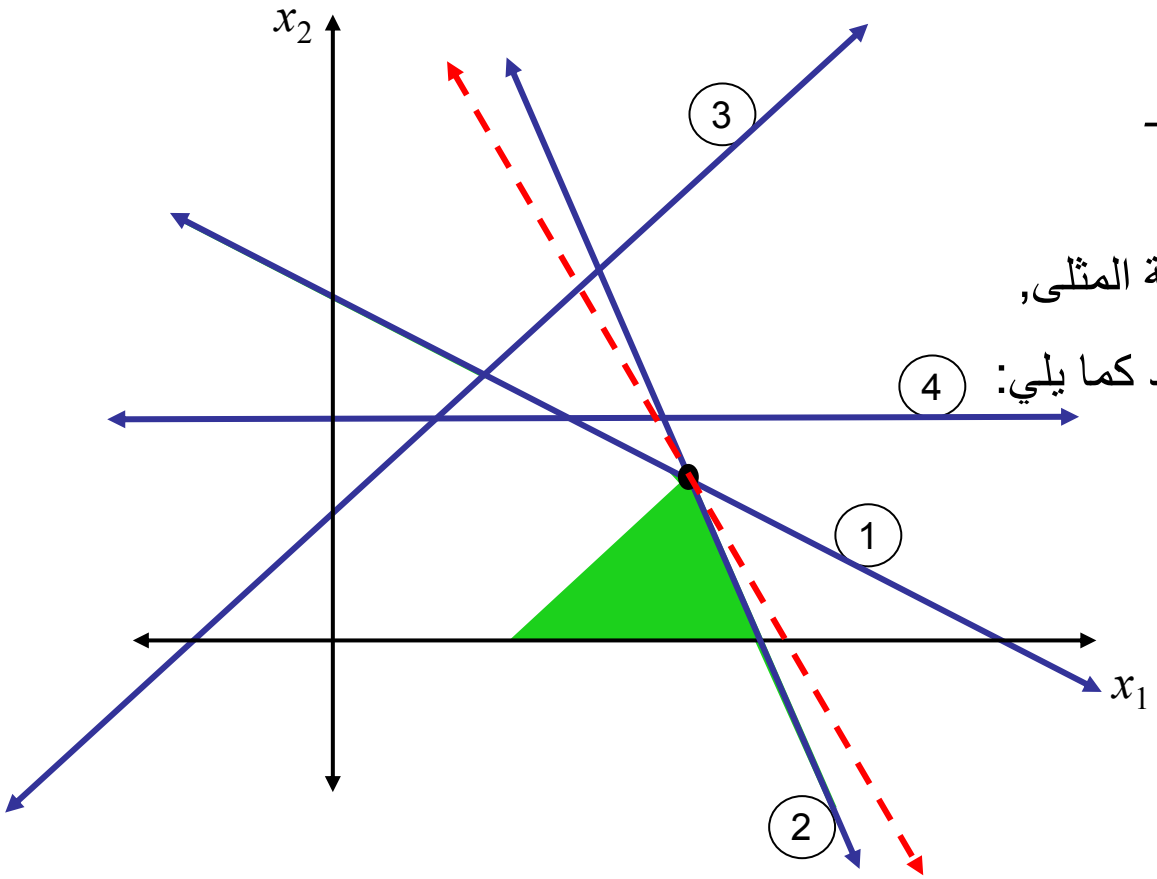
الحد الأقصى للتناقص في أي مورد من الموارد الوفيرة هو إزاحة القيد الوفير باتجاه نقطة الحل الأمثل حتى يصل إلى نقطة الحل الأمثل.

تحليل حساسية الموارد المتوفرة

مورد القيد الثالث متوفر:

$$x_1^* = \frac{10}{3} \text{ and } x_2^* = \frac{4}{3}$$

$$-x_1^* + x_2^* = -2 < 1 \quad (3)$$



يجب تحريك القيد (3) حتى نصل للقيمة المثلى,

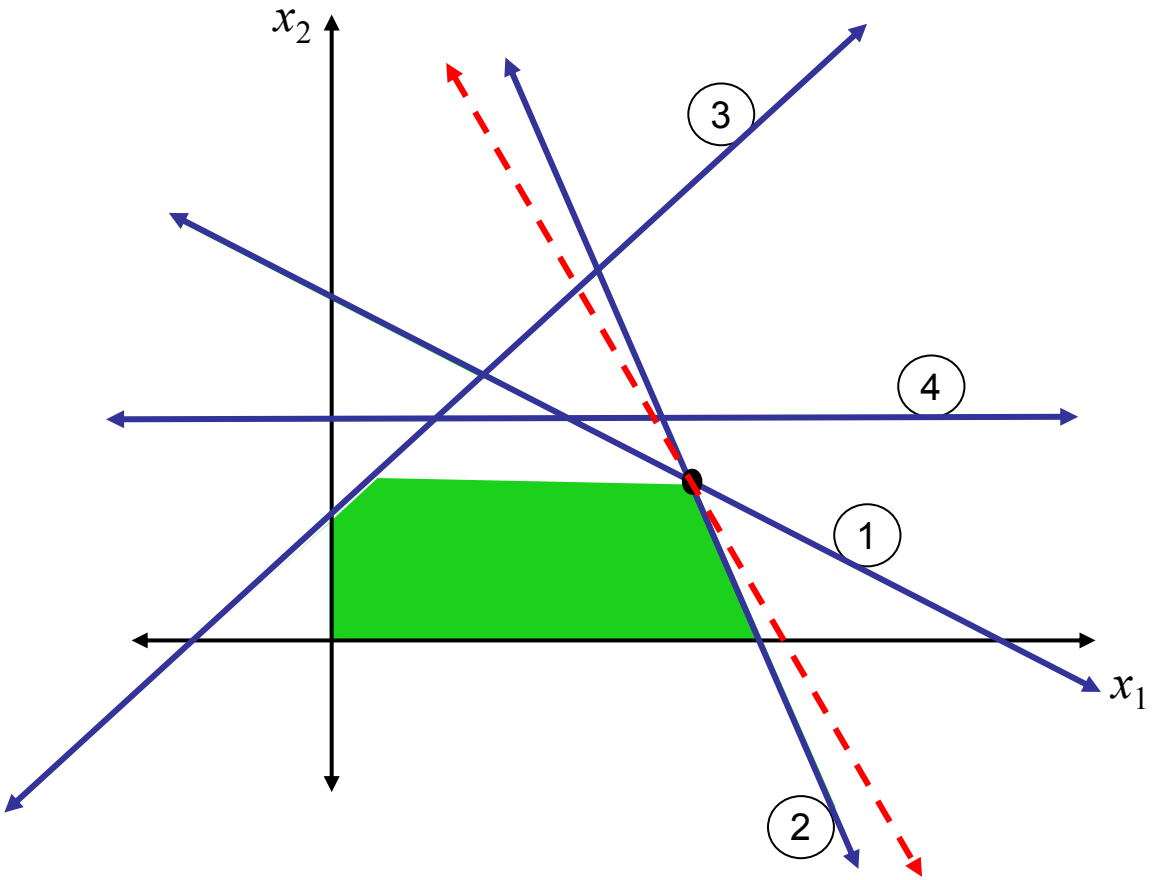
وبالتعويض في تلك النقطة سيصبح القيد كما يلي:

$$-x_1^* + x_2^* \leq -2$$

أي أنه يمكن للطرف الأيمن أن ينقص

بمقدار 3 : $(1 - (-2) = 3)$

تحليل حساسية الموارد المتوفرة



مورد القيد الرابع متوفر:

$$x_1^* = \frac{10}{3} \text{ and } x_2^* = \frac{4}{3}$$

$$x_2^* = \frac{4}{3} = 1.33 < 2 \quad (4)$$

يجب تحريك القيد (4) حتى نصل للقيمة المثلى,

وبالتعويض في تلك النقطة سيصبح القيد كما يلي:

$$x_2^* \leq \frac{4}{3}$$

أي أنه يمكن للطرف الأيمن أن ينقص بمقدار $\frac{2}{3}$: $(2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3})$

$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2$

تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

ليكن لدينا مستقيم دالة الهدف: $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 = k$

حيث أن $k \ , \ c_1 \ , \ c_2 \neq 0$ ثوابت.

أو $x_2 = -\frac{c_1}{c_2} x_1 + \frac{k}{c_2} \Longrightarrow (*)$

ميل مستقيم دالة الهدف (معامل x_1 في المعادلة $(*)$): $-\frac{c_1}{c_2}$

التغير في قيمة أحد المعالم c_1 أو c_2 $\Leftrightarrow$ التغير في ميل دالة الهدف

تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

قاعدة 1:

عند ضرب أو قسمة طرفي متراجحة بعدد سالب، نعكس اتجاه المتراجحة. لأي ثوابت حقيقية a , b :

$$-1 \times (a \leq b) \Rightarrow -a \geq -b$$
$$-1 \times (a \geq b) \Rightarrow -a \leq -b$$

مثال: $-1 \times (-1 \leq -a \leq 2) \Rightarrow 1 \geq a \geq -2$

وتكافئ: $-2 \leq a \leq 1$

تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

قاعدة 2:

لأي ثوابت حقيقية a, b, c, d ، بحيث تكون جميعها موجبة أو جميعها سالبة، إذا قلبنا (عكسنا) طرفي المتراجحة ، نعكس اتجاه المتراجحة:

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} \geq \frac{d}{c}$$

أمثلة:

$$\frac{3}{4} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \geq \frac{2}{3}$$

$$-2 \leq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \geq -4$$

تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

الميل $-\frac{c_1}{c_2}$

سنكتفي بحالة عندما تكون القيود الرابطة ذات ميل سالب

سؤال:

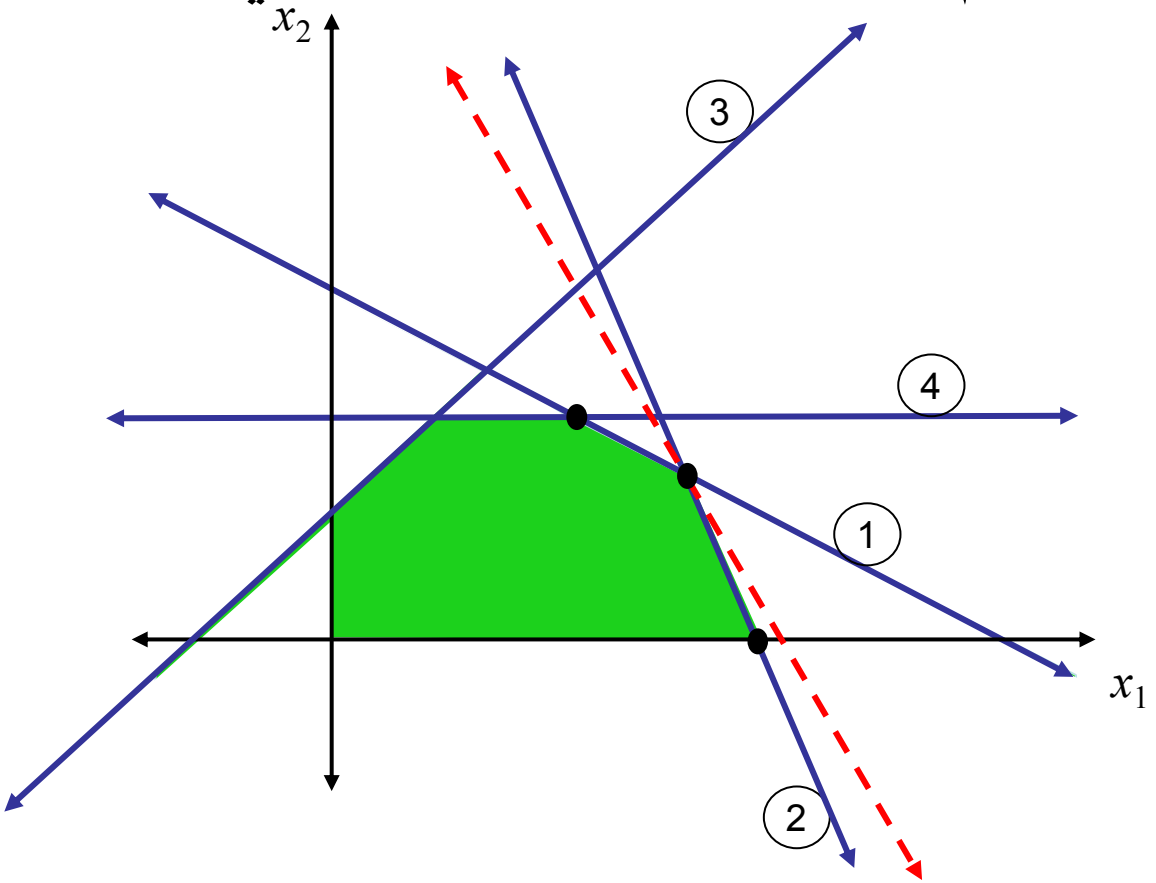
حدد المجال الذي يمكن أن يتغير فيه قيمة أحد المعالم c_1 أو c_2 دون أن يتغير الحل المثل.

الجواب:

لا يتغير الحل الأمثل إذا كان ميل دالة الهدف محصور بين ميل القيود الرابطة عند الحل الأمثل.

تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

- التغير في أحد معالم دالة الهدف ⇔ التغير في ميل دالة الهدف



تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

مثال الدهانات:

لا يتغير الحل الأمثل $x_1^* = \frac{10}{3}$, $x_2^* = \frac{4}{3}$ مع تغير الأسعار

إذا كان ميل دالة الهدف محصور بين ميل القيد (1) وميل القيد (2) (القيود الرابطة).

ميل دالة الهدف $-\frac{3}{2} = -\frac{3000}{2000} = 3000x_1 + 2000x_2$

ميل القيد (1) : $-\frac{1}{2} = x_1 + 2x_2$

ميل القيد (2) : $-\frac{2}{1} = 2x_1 + x_2$

لا يتغير القرار الأمثل إذا كان : $-2 \le slope\ z \le -\frac{1}{2}$

تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

دالة الهدف: $z = 3000x_1 + 2000x_2$

$c_1 = 3000$ (سعر الطن من الدهان الخارجي)

$c_2 = 2000$ (سعر الطن من الدهان الداخلي)

سؤال:

أ) حدد المجال الذي يمكن أن يتغير فيه المعلم c_1 فقط دون أن يتغير الحل المثل.

ب) حدد المجال الذي يمكن أن يتغير فيه المعلم c_2 فقط دون أن يتغير الحل المثل.

تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

جواب:

أ) فترة التغير السعري للطن من الدهان الخارجي c_1 (مع بقاء بقية المعالم ثابتة)

بحيث يبقى الحل الأمثل ثابتا هو:

$$-2 \le -\frac{c_1}{2000} \le -\frac{1}{2}$$

$$2 \ge \frac{c_1}{2000} \ge \frac{1}{2}$$

$$4000 \ge c_1 \ge 1000$$

$$-2 \le -\frac{c_1}{2000} \le -\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{c_1}{2000} \le 2$$

$$\frac{2000}{2} \le c_1 \le 4000$$

$$1000 \le c_1 \le 400$$

وتكتب عادة: $1000 \le c_1 \le 4000$

أي أنه في حالة ثبات سعر الطن للدهان الداخلي إلى 2000 ريال ممكن أن يتغير سعر الطن من الدهان الخارجي في الفترة [1000, 4000] ريال دون أن يتغير الحل الأمثل.

تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

جواب:

ب) فترة التغير السعري للطن من الدهان الخارجي c_2 (مع بقاء بقية المعالم ثابتة)

بحيث يبقى الحل الأمثل ثابتا هو:

$$-2 \le -\frac{3000}{c_2} \le -\frac{1}{2}$$

$$2 \ge \frac{3000}{c_2} \ge \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{c_2}{3000} \le 2$$

$$1500 \le c_2 \le 6000$$

أي أنه في حالة ثبات سعر الطن للدهان الخارجي إلى 3000 ريال ممكن أن يتغير سعر الطن من الدهان الداخلي في الفترة [1500, 6000] ريال دون أن يتغير الحل الأمثل.

تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

$$a \leq \ slope \ \ z \leq \ b$$

$$a \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq b$$

ونحصل على:

$$-bc_2 \leq c_1 \leq -ac_2$$

$$-\frac{1}{a}c_1 \leq c_2 \leq -\frac{1}{b}c_1$$

تحليل حساسية التغير في أحد معالم دالة الهدف

$$-2 \leq \ slope\ z \leq -0.5$$

$$-2 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq -0.5$$

ونحصل على:

$$0.5c_2 \leq c_1 \leq 2c_2 \quad \rightarrow \quad 1000 \leq c_1 \leq 4000$$

$$0.5c_1 \leq c_2 \leq 2c_1 \quad \rightarrow \quad 1500 \leq c_2 \leq 6000$$

تحليل الحساسية

مثال: للبرنامج الخطي التالي:

$$\max z = 800x_1 + 500x_2$$

s.t.

$$3x_1 + 2x_2 \le 40 \quad \text{القيد (1)}$$

$$x_1 + 0.5x_2 \le 8 \quad \text{القيد (2)}$$

$$2x_1 + x_2 \le 24 \quad \text{القيد (3)}$$

$$x_1 + x_2 \le 10 \quad \text{القيد (4)}$$

$$x_1 , x_2 \ge 0$$

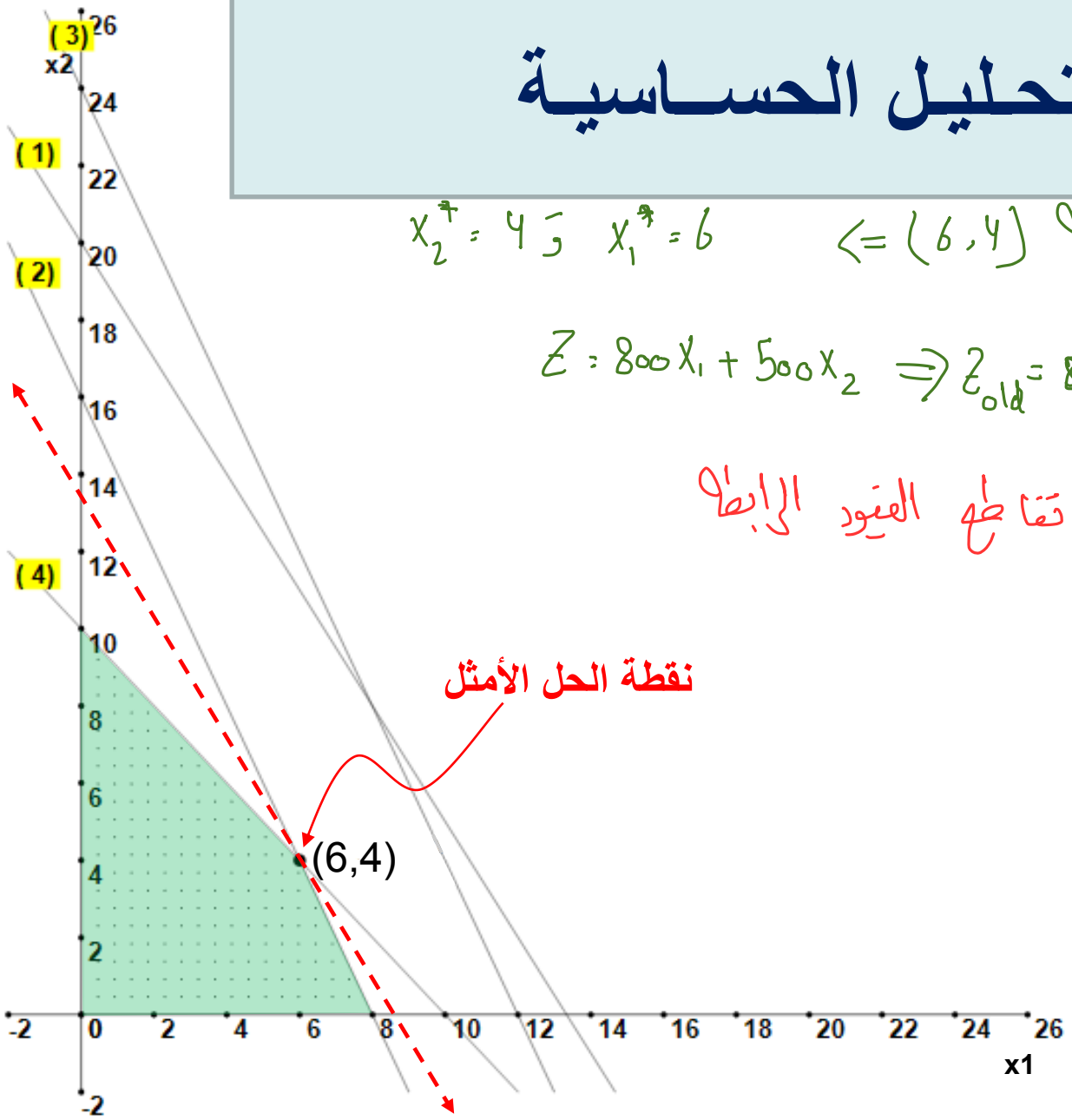
أوجد تحليل الحساسية لمعاملات دالة الهدف وللطرف الأيمن للقيود الخطية وأسعار الظل.

تحليل الحساسية

الحل الأمثل المساوي $(6,4) \Leftarrow x_1^* = 6$ و $x_2^* = 4$

$Z = 800x_1 + 500x_2 \Rightarrow Z_{old} = 800(6) + 500(4) = 6800$

* الحل الأمثل عند تقاطع القيود الرابطة



تحليل الحساسية

الحل الأمثل:

$$x_1^* = 6 \ , \ x_2^* = 4 \ , \ z^* = 6800$$

ويقع عند تقاطع القيدين الثاني والرابع.

ميل القيد $= -\frac{1}{0.5} = -2$ (2)

ميل القيد $= -\frac{1}{1} = -1$ (4)

تحليل حساسية معاملات دالة الهدف: $-2 \le -\frac{c_1}{c_2} \le -1$

$$500 \le c_1 \le 1000$$

$$400 \le c_2 \le 800$$

$$Z = \overset{c_1}{800}\, X_1 + \overset{c_2}{500}\, X_2$$

المطلوب حدود c_2 أعوض بـ $c_1 = 800$ وأحل

$$-2 \leq \frac{-800}{c_2} \leq -1$$

$$1 \leq \frac{800}{c_2} \leq 2$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{c_2}{800} \leq \frac{1}{1}$$

$$\frac{800}{2} \leq c_2 \leq 800$$

$$400 \leq c_2 \leq 800$$

هذا المدى اللي أقدر أغير فيه قيمة c_2 بحيث يكون قيمة الحل الأمثل ثابتة

$x_1 = 6$

$x_2 = 4$

المطلوب حدود c_1 إذا أعوض $c_2 = 500$ وأحل

$$-2 \leq \frac{-c_1}{500} \leq -1$$

$$1 \leq \frac{c_1}{500} \leq 2$$

$$500 \leq c_1 \leq 1000$$

إذا هذا المدى اللي أقدر أغير فيه قيمة c_1 بحيث تكون قيمة الحل الأمثل

ثابتة $x_1 = 6$

$x_2 = 4$

$X_1^* = 6$ $X_2^* = 4$

أحدد نوع القيود :

قيود السؤال

$3x_1 + 2x_2 \leq 40$	القيد (1)	$3(6) + 2(4) = 26 < 40$ قيد غير رابط مورد متوفر
$x_1 + 0.5x_2 \leq 8$	القيد (2)	$6 + 0.5(4) = 8 = 8$ قيد رابط مورد نادر
$2x_1 + x_2 \leq 24$	القيد (3)	$2(6) + 4 = 16 < 24$ قيد غير رابط مورد متوفر
$x_1 + x_2 \leq 10$	القيد (4)	$6 + 4 = 10 = 10$ قيد رابط مورد نادر

* القيود الرابطة (مورد نادر) ← أزيد (أوسع بالرسم)

* القيود غير رابطة (مورد متوفر) ← أنقص (أضيق بالرسم)

أزيح القيد للحل الأمثل

تحليل الحساسية

لمعرفة الموارد النادرة والمتوفرة:

نعوض بقيم الحل الأمثل $x_1^* = 6$, $x_2^* = 4$ في متراجحات القيود.

$3x_1^* + 2x_2^* = 26 < 40$ (1)	**قيد غير رابط ، مورد متوفر**
$x_1^* + 0.5x_2^* = 8 = 8$ (2)	**قيد رابط ، مورد نادر**
$2x_1^* + x_2^* = 16 < 24$ (3)	**قيد غير رابط ، مورد متوفر**
$x_1^* + x_2^* = 10 = 10$ (4)	**قيد رابط ، مورد نادر**

تحليل الحساسية

الموارد النادرة: القيد (2)

الحل الأمثل الجديد سيكون: $x_1^* = 10$, $x_2^* = 0$, $z_{new}^* = 8000$

نستطيع إزاحة القيد (2) ليصبح: $x_1 + 0.5x_2 \leq 10$

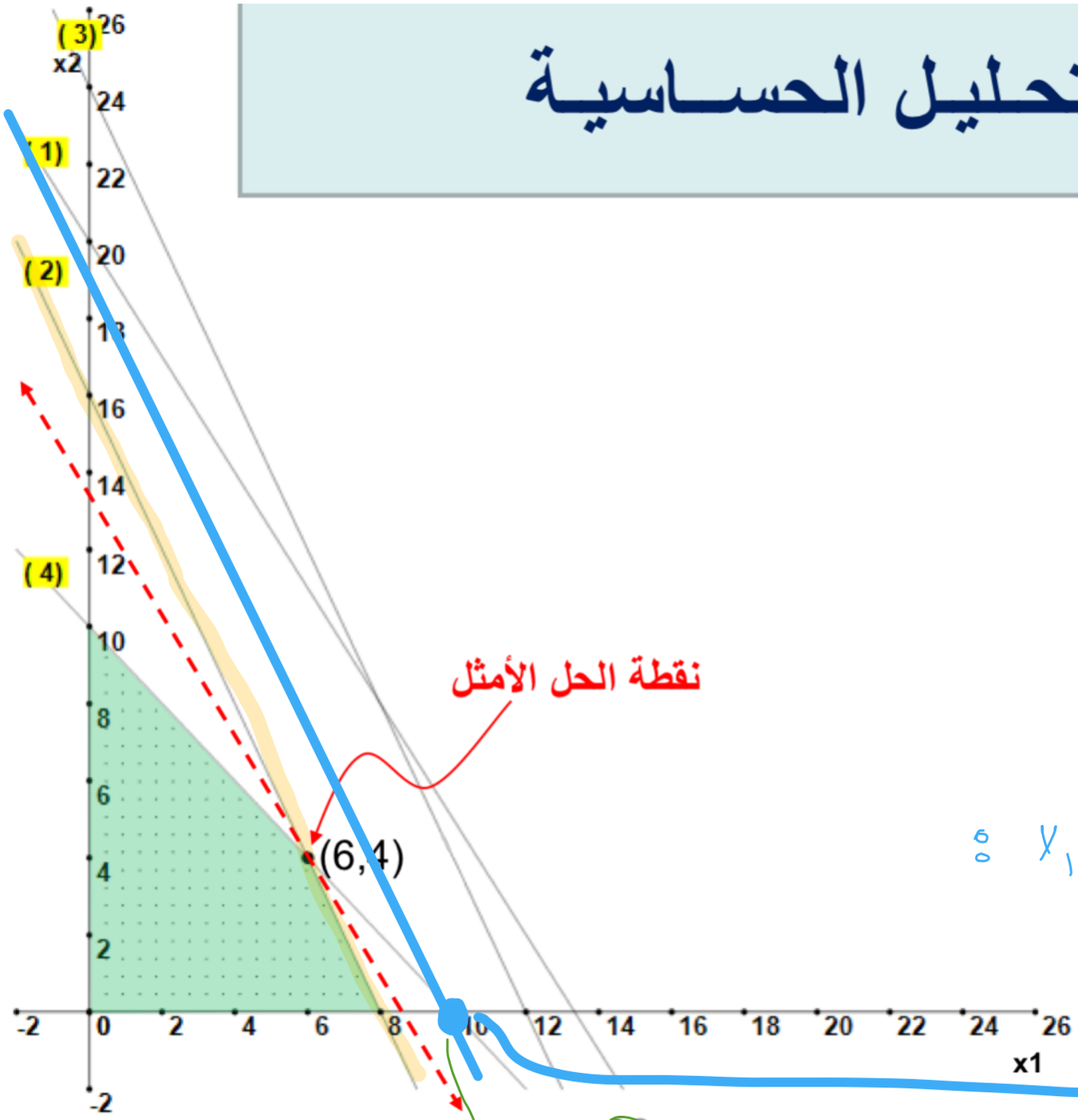
أقصى زيادة اقتصادية ممكنة لمورد القيد (2) $= 2$

سعر الظل لمورد القيد (2) =

القيمة الاقتصادية لسعر الوحدة الإضافية من مورد القيد (2) =

$$600 = \frac{8000 - 6800}{10 - 8}$$

تحليل الحساسية



الحل الأمثل الجديد

تقاطع القيد ① مع محور X_1 :

القيد ① : $X_1 + X_2 \leq 10$

محور X_1 معناه $X_2 = 0$

بعيد الحل ← $X_1 = 10$ و $X_2 = 0$

(١٠ و ٠)

تحليل الحساسية

الموارد النادرة: القيد (4)

الحل الأمثل الجديد سيكون: $x_1^* = 0 \ , \ x_2^* = 16 \ , \ z_{old}^* = 8000$

نستطيع إزاحة القيد (4) ليصبح: $x_1 + x_2 \leq 16$

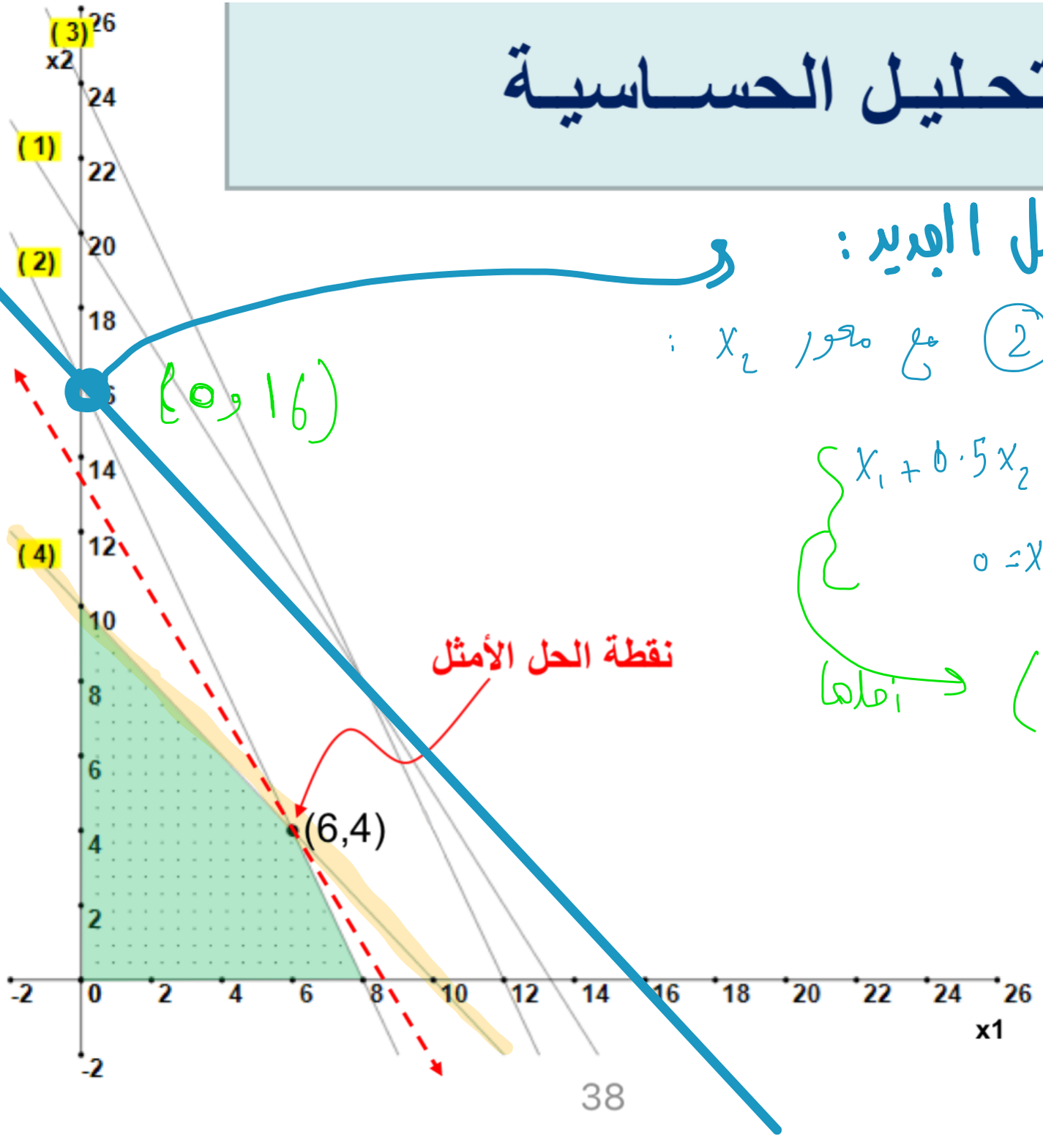
أقصى زيادة اقتصادية ممكنة لمورد القيد (4) = 6

سعر الظل لمورد القيد (4) =

القيمة الاقتصادية لسعر الوحدة الإضافية من مورد القيد (4) =

$$200 = \frac{8000 - 6800}{16 - 10}$$

تحليل الحساسية



الحل الأمثل الجديد:

تقاطع القيد ② مع محور x_2 :

القيد ② : $x_1 + 0.5x_2 \leq 8$

محور x_2 معناه فيها $x_1 = 0$

أعلاها ← $(x_1 = 0 \ , \ x_2 = 16)$

(0 و 16)

تحليل الحساسية

أنقص

أرجع القيم للحل الأمثل

الموارد المتوفره:

يمكن إزاحة (إنقاص) القيد (1) ليصبح:

القيم الأول

$3x_1 + 2x_2 \leq 60$

$3(6) + 2(4) = 26$

$$3x_1 + 2x_2 \leq \mathbf{26}$$

تعامل القيد بعد الإزاحة!

60 - 26

14 = مقدار التوفير الاقتصادي في مورد القيد (1)

يمكن إزاحة (إنقاص) القيد (3) ليصبح:

القيم التالي من السؤال

$2x_1 + x_2 \leq 24$

$2(6) + (4) = 16$

$$2x_1 + x_2 \leq \mathbf{16}$$

تعامل القيد بعد الإزاحة!

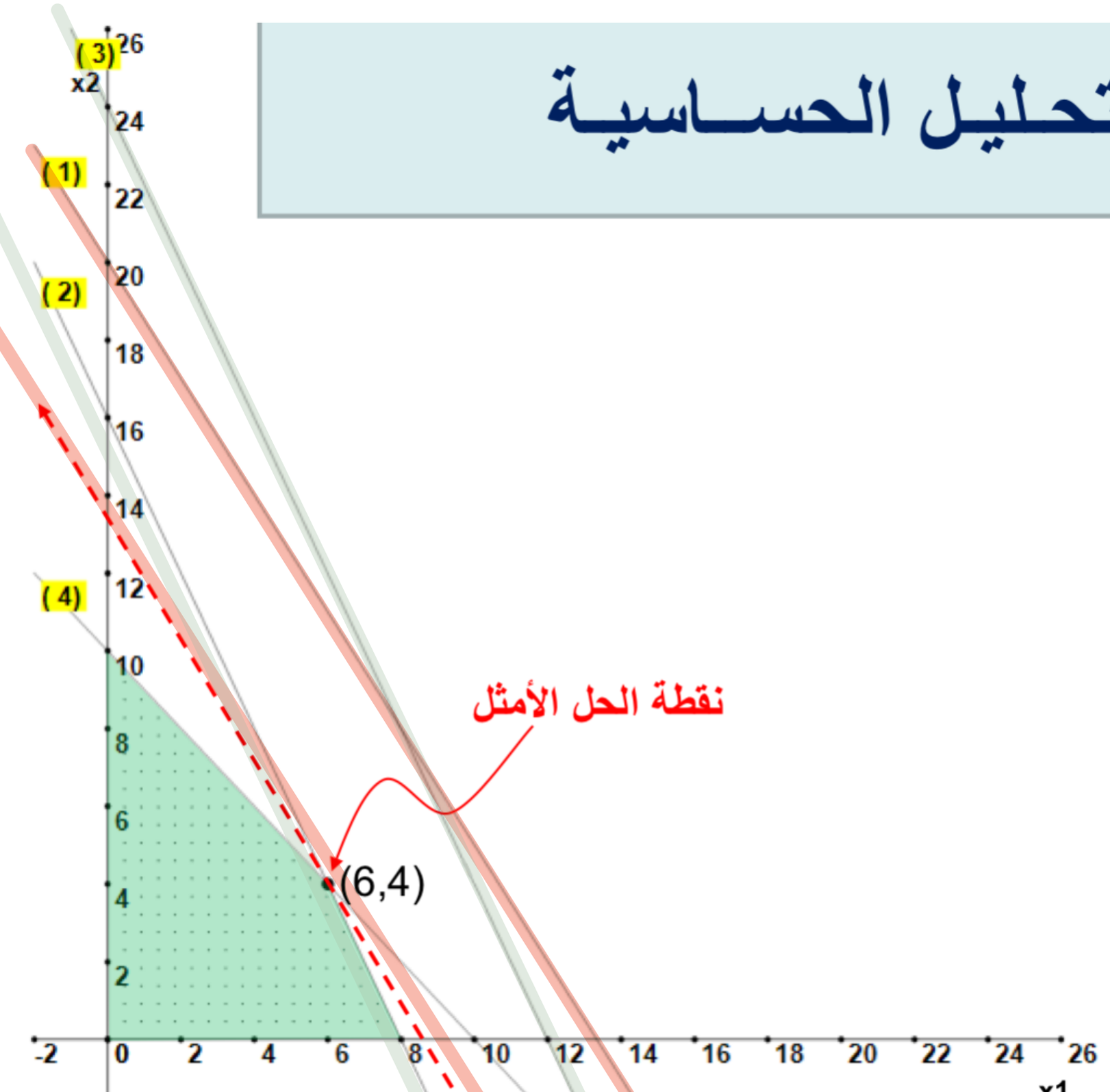
24 - 16

8 = مقدار التوفير الاقتصادي في مورد القيد (1)

سعر الظل لمورد القيد (1) ولمورد القيد (3) = صفر.

دائماً للمورد المتوفر

تحليل الحساسية



مثال :- ادرس تحليل الحساسية لمسألة البرمجة الخطية الآتية :-

$$\text{Min (total cost)} \quad Z = 5x_1 + 8x_2$$

s.t.

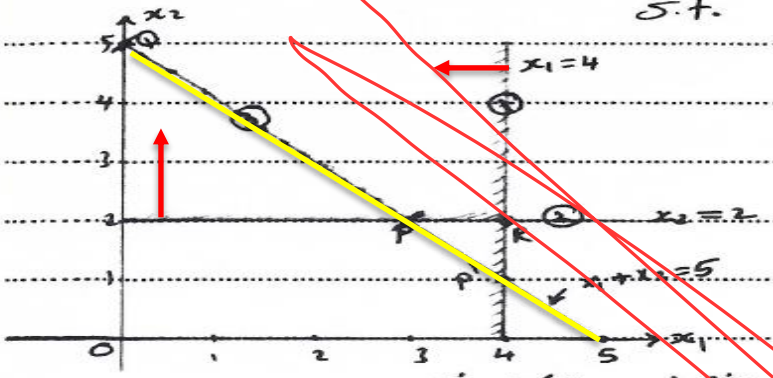
$x_1 \le 4$ ← ① القيد الأول

$x_2 \ge 2$ ← ② القيد الثاني

$x_1 + x_2 = 5$ ← ③ القيد الثالث

$x_1, x_2 \ge 0$

الحل :- ← تصوير منطقة الحل الممكن :-



من الرسم نجد أن منطقة الحل الممكنة عبارة عن قطعة المستقيمة PQ . النقطة R لا تعتبر من منطقة الحل الممكنة حيث $R = (4,2)$ لا تحقق القيد ① ولا تحقق القيد ③ .

* يجب أن جميع النقاط على القطعة المستقيمة PQ لا تخرج عن النقط وبالتالي فإن :-

$P = (3,2)$ و $Q = (0,5)$

يجب التأكد أن جميع النقاط المختارة على المستقيم تحقق بقية القيود

بالإضافة لنقاط أخرى مثل $(2,3)$ و $(1,4)$ وهكذا كلها نختبر النقاط حتى نجد

$Z|_P = 5(3) + 8(2) = 31$, $Z|_Q = 5(0) + 8(5) = 40$ و $Z|_{(1,4)} = 5 + 32 = 37$

$Z|_{(2,3)} = 10 + 24 = 34$

$\Rightarrow \text{Min } Z = 31$ at $P = (3,2)$ الحل الأمثل

* تحليل الحساسية :- القيود الرابطة « موارد نادرة » ، والقيود الغير رابطة « موارد متوفرة »

* من المعلوم أن الحل الأمثل هو $P = (3,2)$

① : $x_1|_P = 3 < 4$ قيد غير رابط « متوفر »

② : $x_2|_P = 2$ قيد رابط « نادر »

③ : $x_1 + x_2|_P = 5$ قيد رابط « نادر »

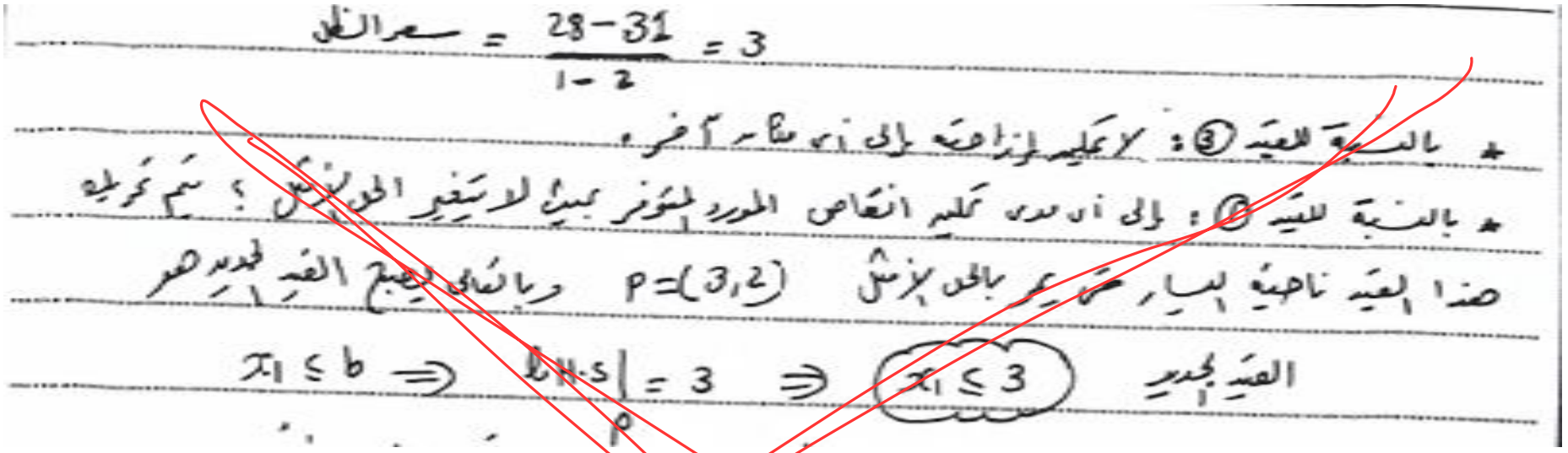
* إلى أي مدى يمكن زيادة المورد النادر حتى تحسن دالة الهدف ؟

يعني تحسن دالة الهدف من صغر الى كبر « تصغير دالة الهدف » لغاية أن تصل الى 31 .

* بالنسبة للقيد ② يتم إزاحته من النقطة P' حيث $P' = (4,1)$ حيث $x_2 \ge b$

$\Rightarrow b = 1 \Rightarrow$ القيد الجديد $x_2 \ge 1$

والحل الأمثل الجديد هو $P' = (4,1)$ حيث $Z|_{P'} = 20 + 8 = 28$



بالنسبة لمعالم دالة الهدف:

حدد منطقة المعالم بحيث

لايتغير الحل الأمثل

ميل القيد $(2) = -\frac{0}{1} = 0$

ميل القيد $(3) = -\frac{1}{1} = -1$

ميل دالة الهدف $= -\frac{5}{8}$

$$-1 \leq -\frac{c_1}{c_2} \leq 0$$

في حالة ثبات $c_1 = 5$:

$$-1 \leq -\frac{5}{c_2} \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{5}{c_2} \leq 1$$

$$1 \leq \frac{c_2}{5} \leq \frac{1}{0} \Leftrightarrow 1 \leq \frac{c_2}{5} < \infty$$

$$5 \leq c_2 < \infty \Leftrightarrow c_2 \in [5, \infty)$$

في حالة ثبات $c_2 = 8$:

$$-1 \leq -\frac{c_1}{8} \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{c_1}{8} \leq 1$$

$$0 \leq c_1 \leq 8 \Leftrightarrow c_1 \in [0,8]$$