جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الإحصاء وبحوث العلميات

نـــظريـــة الـــقـــرارات

Decision Theory

الباب الثالث

إيجاد تصرف بيز باستخدام التوزيع البعدي

بفرض أن$(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{g}$ هي دالة التوزيع القبلية(Prior Dist) للظرف $\boldsymbol{\theta}$ ، ونريد إيجاد تصرف بيز d^* الذي سبق وعرفناه بالعلاقة:

$$\forall \boldsymbol{d} \Longrightarrow \boldsymbol{B}(d^*) \leq \boldsymbol{B}(\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{\Sigma_\theta r(d;\theta) g(\theta)}$$

فإن ذلك صعب، خصوصاً عندما يكون لدينا عدد كبير من الإجراءات البسيطة:

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_k\}$$

وعدد كبير من قيم المتغير العشوائي المستخدم:

$$\mathbb{X} = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n\}$$

ويرجع ذلك الى كثرة الحسابات المتعلقة بدالة المخاطرة التي عرفناها بالعلاقة:

$$\boldsymbol{r(d;\theta) = E_x\big(\ell(d,\theta)\big) = \Sigma_x \ell(d(x),\theta) f(x;\theta)}$$

حيث $\boldsymbol{f(x;\theta)}$هي دالة البيانات الشرطية للمتغير $\boldsymbol{X}$.

في الحقيقة أنه يمكننا الوصول الى التصرف d^* بدون الإضطرار الى حسابات المخاطرة $\boldsymbol{r(d;\theta)}$ الطويلة وذلك با ســتخدام ما يســمى دالة التوزيع البعدية (Posterior Dist) للظرف $\boldsymbol{\theta}$ شرطي البيانات $\boldsymbol{x}$ التي نعطيها الرمز $\boldsymbol{h(\theta|x)}$.

<u>ونعرف دالة التوزيع البعدية للظرف $\boldsymbol{\theta}$ بالعلاقة:</u>

$$\boldsymbol{h(\theta|x) = \frac{f(x;\theta) g(\theta)}{k(x)}}$$

حيث $k(x)$ تمثل **<u>دالة التوزيع الكلية للمتغير $\boldsymbol{x}$</u>** المعرفة بالعلاقة:

$$\boldsymbol{\forall x \Rightarrow k(x) = \Sigma_\theta f(x;\theta) g(\theta)}$$

ويجب عند التعامل مع جميع دوال التوزيع السابقة الأخذ بالإعتبار الخواص التالية:

$$\boldsymbol{\forall \theta \Rightarrow \Sigma_x f(x;\theta) = 1} \quad \boldsymbol{\&} \quad \boldsymbol{\forall x \Rightarrow \Sigma_\theta h(\theta|x) = 1}$$

$$\boldsymbol{\Sigma_\theta g(\theta) = 1} \quad \boldsymbol{\&} \quad \boldsymbol{\Sigma_x k(x) = 1}$$

مثـــــــــــال1: لديك دالة التوزيع المبدئية $\boldsymbol{g(\theta_1) = 0.6}$ ، ولديك دالة البيانات الشرطية $\boldsymbol{f(x;\theta)}$ المعطاة بالجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3
θ_1	0.5	0.3	0.2
θ_2	0.1	0.7	0.2
$\boldsymbol{f(x;\theta)}$			

أحسب دالة التوزيع الكلية $\boldsymbol{k(x)}$ ودالة التوزيع البعدية $\boldsymbol{h(\theta|x)}$.

الحـــــــل : نعلم أن

$$\boldsymbol{k(x) = \Sigma_\theta f(x;\theta) g(\theta)}$$

ومنه

$$\boldsymbol{k(x_1) = 0.5(0.6) + 0.1(0.4) = 0.34}$$
$$\boldsymbol{k(x_2) = 0.3(0.6) + 0.7(0.4) = 0.46}$$
$$\boldsymbol{k(x_3) = 0.2(0.6) + 0.2(0.4) = 0.20}$$

ونضع النتائج في الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3
θ_1	0.5	0.3	0.2
θ_2	0.1	0.7	0.2
$\boldsymbol{k(x)}$	0.34	0.46	0.20

وباستخدام العلاقة:

$$\boldsymbol{h(\theta|x) = \frac{f(x;\theta) g(\theta)}{k(x)}}$$

نجد

$$\boldsymbol{h(\theta_1|x_1) = \frac{(0.5)(0.6)}{0.34} = \frac{15}{17}} \quad , \quad \boldsymbol{h(\theta_2|x_1) = \frac{(0.1)(0.4)}{0.34} = \frac{2}{17}}$$
$$\boldsymbol{h(\theta_1|x_2) = \frac{(0.3)(0.6)}{0.46} = \frac{9}{23}} \quad , \quad \boldsymbol{h(\theta_2|x_2) = \frac{(0.7)(0.4)}{0.46} = \frac{14}{23}}$$
$$\boldsymbol{h(\theta_1|x_3) = \frac{(0.2)(0.6)}{0.2} = 0.6}, \quad \boldsymbol{h(\theta_2|x_3) = \frac{(0.2)(0.4)}{0.2} = 0.4}$$

ونضع النتائج في الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3
θ_1	15/17	9/23	0.6
θ_2	2/17	14/23	0.4
$h(\theta\|x)$			

خطة إستخدام دالة التوزيع البعدية $h(\theta|x)$ لإيجاد تصرف بيز d^* :

لإيجاد تصرف بيز d^* ، سنقوم بتصغير المقدار:

$$B(d) = \Sigma_\theta \Sigma_x \ell(d(x), \theta) f(x; \theta) g(\theta)$$

أوسنقوم بتصغير المقدار المكافىء التالي:

$$B(d) = \Sigma_x [\Sigma_\theta \ell(d(x), \theta) h(\theta|x)] k(x)$$

معتبرين صحة العلاقة: $h(\theta|x)k(x) = f(x;\theta)g(\theta)$

وستكون خطة تصغير المقدار $B(d)$ بأن نصغر المجموع الداخلي:

$$\Sigma_\theta \ell(d(x), \theta) h(\theta|x)$$

عند كل قيمة من قيم البيانات x_i كمايلي:

1- نبدأ عند x_1، ونبحث في المجموعة $\mathcal{A}$ عن قيمة $d(x_1)$، نسميها a_1^*، التي تصغر المجموع التالي:

$$\Sigma_\theta \ell(d(x_1), \theta) h(\theta|x_1)$$

2- وثم عند x_2 ، ونبحث في المجموعة $\mathcal{A}$ عن قيمة $d(x_2)$ ، نسميها a_2^*، التي تصغر المجموع التالي:

$$\Sigma_\theta \ell(d(x_2), \theta) h(\theta|x_2)$$

3- وأخيراً عند x_n، ونبحث في المجموعة $\mathcal{A}$ عن قيمة $d(x_n)$، نسميها a_n^*، التي تصغر المجموع التالي:

$$\Sigma_\theta \ell(d(x_n), \theta) h(\theta|x_n)$$

وسيكون d^* هو:

$$d^*(x_1) = a_1^*, \quad d^*(x_2) = a_2^*, \ldots\ldots, \quad d^*(x_n) = a_n^*$$

مثـــــــال2: خذ من **المثال1** الدوال: $g(\theta_1) = 0.6$ ، $f(x;\theta)$، $k(x)$، $h(\theta|x)$ التالية:

	x_1	x_2	x_3
θ_1	0.5	0.3	0.2
θ_2	0.1	0.7	0.2
$f(x;\theta)$			

	x_1	x_2	x_3
$k(x)$	0.34	0.46	0.20

	x_1	x_2	x_3
θ_1	15/17	9/23	0.6
θ_2	2/17	14/23	0.4
$h(\theta|x)$			

ودالة الخسارة $\ell(a,\theta)$ التالية:

	a_1	a_2	a_3
θ_1	5	6	4
θ_2	4	3	5

ثم أجب على مايلي:

أ- كم عدد التصرفات وكم خلية يحوي جدول مخاطراتها؟

ب- إستعمل $h(\theta|x)$ لحساب تصرف بيز d^* .

ت- أحسب $B(d^*)$ بكل الطرق الممكنة.

ث- اقترح تصرفاً آخر d وثم قارنه مع d^* .

ج- أحسب قيمة البيانات لحل بيز.

الحـــــــل :

أ- لدينا $27 = 3^3$ تصرفاً، و يحتوي جدول المخاطرة على $54 = 2\times 27$ خلية.

ب-إستعمل $h(\theta|x)$ لحساب تصرف بيز d^* :

1- نبدأ عند x_1 ، ونبحث عن a_1^* التي تصغر المجموع $\Sigma_\theta \ell(d(x_1),\theta)h(\theta|x_1)$:

$d^*(x_1)=a_1^*=a_3$	قيمة المجموع عند a_1 : $5(15/17)+4(2/17)=4.88$ قيمة المجموع عند a_2 : $6(15/17)+3(2/17)=5.65$ قيمة المجموع عند a_3 : $4(15/17)+5(2/17)\approx 4.1176$

2- ثم عند x_2 ، ونبحث عن a_2^* التي تصغر المجموع $\Sigma_\theta \ell(d(x_2),\theta)h(\theta|x_2)$:

$d^*(x_2)=a_2^*=a_2$	قيمة المجموع عند a_1 : $5(9/23)+4(14/23)=4.4$ قيمة المجموع عند a_2 : $6(9/23)+3(14/23)\approx 4.174$ قيمة المجموع عند a_3 : $4(9/23)+5(14/23)=4.61$

3- وعند x_3 ، ونبحث عن a_3^* التي تصغر المجموع $\Sigma_\theta \ell(d(x_3),\theta)h(\theta|x_3)$:

$d^*(x_3)=a_3^*=a_3$	قيمة المجموع عند a_1 : $5(0.6)+4(0.4)=4.6$ قيمة المجموع عند a_2 : $6(0.6)+3(0.4)=4.8$ قيمة المجموع عند a_3 : $4(0.6)+5(0.4)=4.4$

ونلخص هذه النتائج في الجدول التالي:

X	x_1	x_2	x_3
d^*	a_3	a_2	a_3

ت-أحسب $B(d^*)$ بكل الطرق الممكنة:

- **<u>طريقة1:</u>** بالإستفادة من نتائج المرحلة السابقة **ب** كما يلي:

$$B(d^*)=\sum_x\left[\sum_\theta \ell(d^*(x),\theta)h(\theta|z)\right]k(x)\approx 4.1176(0.34)+4.174(0.46)+4.4(0.2)=4.20$$

- **<u>طريقة2</u>**: باستعمال الصيغة $B(d^*)=\sum_\theta r(d^*,\theta)g(\theta)$:

$$r(d^*,\theta_1)=\sum_x \ell(d^*(x),\theta_1)f(x;\theta_1)=\ell(a_3,\theta_1)(f(x_1;\theta_1)+f(x_3;\theta_1))+\ell(a_2,\theta_1)f(x_2;\theta_1)$$
$$=4(0.5+0.2)+6\times 0.3=4.6$$
$$r(d^*,\theta_2)=\sum_x \ell(d^*(x),\theta_2)f(x;\theta_2)=\ell(a_3,\theta_2)(f(x_1;\theta_2)+f(x_3;\theta_2))+\ell(a_2,\theta_2)f(x_2;\theta_2)$$
$$=5(0.1+0.2)+3\times 0.7=3.6$$
$$B(d^*)=\sum_\theta r(d^*,\theta)g(\theta)=4.6\times 0.6+3.6\times 0.4=4.2$$

ث-وللمقارنة نقترح التصرف التالي:

X	x_1	x_2	x_3
d	a_1	a_2	a_3

وتكون المقارنة بين $B(d^*)$ و $B(d)$ بأن نتحقق من صحة المتراجحة:

$$B(d^*) \le B(d)$$

-ونحسب $B(d)$ بالاستفادة من نتائج المرحلة السابقة **ب** كما يلي:

$$B(d) = \sum_x \left[\sum_\theta \ell(d(x),\theta) h(\theta \mid x) \right] k(x) = 4.88(0.34) + 4.17(0.46) + 4.4(0.2) = 4.46$$

واضح أن الناتج أكد المتراجحة $B(d^*) \le B(d)$

- ويمكن حساب $B(d)$ من قيم المخاطرة $r(d,\theta_1)$ و $r(d,\theta_2)$:

$$r(d,\theta_1) = \ell(a_1,\theta_1) f(x_1;\theta_1) + \ell(a_2,\theta_1) f(x_2;\theta_1) + \ell(a_3,\theta_1) f(x_3;\theta_1) = 5(0.5) + 6(0.3) + 4(0.2) = 5.1$$

$$r(d,\theta_2) = \ell(a_1,\theta_2) f(x_1;\theta_2) + \ell(a_2,\theta_2) f(x_2;\theta_2) + \ell(a_3,\theta_2) f(x_3;\theta_2) = 4(0.1) + 3(0.7) + 5(0.2) = 3.5$$

$$B(d) = \sum_\theta r(d,\theta) g(\theta) = 5.1 \times 0.6 + 3.5 \times 0.4 = 4.46$$

ج-أحسب قيمة البيانات لحل بيز عند التوزيع المبدئي $g(\theta_1) = 0.6$

نحسب إجراء بيز a^* أولاً باستخدام العلاقة: $B(a) = \sum_\theta \ell(a,\theta) g(\theta)$

$$B(a_1) = 5(0.6) + 4(0.4) = 4.6$$
$$B(a_2) = 6(0.6) + 3(0.4) = 4.8$$
$$B(a_3) = 4(0.6) + 5(0.4) = 4.4$$

واضح أن إجراء بيز $a^* = a_3$ وبالتالي فإن قيمة البيانات تساوي:

$$B(a^*) - B(d^*) = 4.4 - 4.2 = 0.2$$

باب 3 واجب (1): لديك دالة الخسارة والبيانات التالية:

	a_1	a_2	a_3	a_4
θ_1	1	6	3	2
θ_2	7	3	4	6

$\ell(a,\theta)$

X	x_1	x_2	x_3	x_4
θ_1	0.4	0.3	0.2	0.1
θ_2	0.1	0.5	0.1	0.3

$f(x;\theta)$

والتوزيع المبدئي هو $g(\theta_1)=0.2$.

ثم أجب على مايلي:

أ- كم عدد التصرفات وكم خلية يحوي جدول مخاطراتها؟

ب- احسب دالة التوزيع البعدية $h(\theta|x)$ واستعملها لحساب تصرف بيز d^* .

ت- أحسب $B(d^*)$ بكل الطرق الممكنة.

ث- اقترح تصرفاً آخر d وثم قارنه مع d^* .

ج- أحسب قيمة البيانات لحل بيز.

باب 3 واجب (2): ترد بضاعة الى مخزن في علب تحوي العلبة خمس قطع ولنفرض أن العلبة تحوي θ من القطع المعيبة. ويقوم المخزن إما بقبول العلبة (a_1) أو رفضها (a_2) بدالة الخسارة $\ell(a,\theta)$ التالية:

θ	$\theta_0=0$	$\theta_1=1$	$\theta_2=2$	$\theta_3=3$	$\theta_4=4$	$\theta_5=5$
a_1	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**
a_2	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
$\ell(a,\theta)$						

بفرض أن التوزيع المبدئي هو:

θ	0	1	2	3	4	5
$g(\theta)$	0.55	0.2	0.1	0.07	0.06	0.02

أولاً: يتخذ المخزن القرار **مع البيانات** عن طريق فحص عينة عشـــوائية من العلبة حجمها ***n=1*** وتعريف المتغير ***X*** بأنه عدد القطع المعيبة في العينة. أجب على مايلي:

1- عين التوزيع البعدي وإستعمله لإيجاد تصرف بيز.

2- أحسب قيمة البيانات عند حل بيز.

ثانياً: أعد حالة إتخاذ القرار **مع البيانات** بسحب عينة من العلبة حجمها ***n=2***

ثالثاً: قارن حلول بيز التي وصلت إليها هنا مع الحلول التي وصلت إليها في الفصل السابق لنفس المثال.