بسم الله الرحمن الرحيم

قسم الرياضيات | **الاختبار الفصلي الثاني** | **الفصل الثاني: 1431-1432**

كلية العلوم | **(384 ريض)** | **الزمن: ساعة ونصف**

السؤال الأول:

(i) أفرض أن $\forall n\in\mathbb{N}$ $f_n \in \mathrm{R}(a,b)$. إذا كان $f_n \xrightarrow{u} f$ على $[a,b]$، أثبت أن $f \in \mathrm{R}(a,b)$ و أن $\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$.

(ii) خذ $f_n(x)=\begin{cases}1/x & x\le n\\ 0 & x>n\end{cases}$. أثبت أن (f_n) تتقـــارب بانتظام على $[1,\infty)$ من دالة f حيث $\int_1^\infty f_n(x)\,dx$ موجود لكل $n\in\mathbb{N}$ و لكن $\int_1^\infty f(x)\,dx$ غير موجود. هل ينـــاقض هذا ما ورد في (i) ؟

السؤال الثاني:

(i) أثبت شرط فايشتراس لتقارب $\sum_n f_n$ بانتظام على D.

(ii) افرض أن $f_n(x)=\dfrac{x}{n\left(1+nx^2\right)}$. جد القيمة العظمى للدالة $|f_n|$ على $\mathbb{R}$ ثم أثبت أن $\sum_n f_n$ تتقارب بانتظام هناك.

(iii) لتكن $A=\{k^2 : k\in\mathbb{N}\}$. إذاكان $a_n=\begin{cases}2 & n\in A\\ 0 & n\notin A\end{cases}$، فاحسب نصف قطر تقارب $\sum_n a_n x^n$.

السؤال الثالث:

(i) لتكن Δ المجموعة المكونة من المجموعات ذات العنصر الواحد. جد حلقة سيجما المولدة بواسطة Δ.

(ii) عرف قياس لبيق الخارجي m^* ثم أثبت أنه يتمتع بخاصة دون التجميع القابل للعد.